ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

AS
262
A6248
v.20
1956
MATH
PER

Том 20

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1956

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

Редакционная коллегия:

акад. С. Н. Бернштейн, акад. И. М. Виноградов (главный редактор),
акад. С. Л. Соболев, доктор физ.-матем. наук И. Р. Шафаревич

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 3—16

М. А. НАЙМАРК

КОНТИНУАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ЛЕММЫ ШУРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ФОРМУЛЕ ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказывается теорема, обобщающая лемму Шура на случай континуальной суммы неприводимых представлений при помощи вполне непрерывных операторов. Применение этой теоремы дает возможность установить одно предложение о формуле Планшереля для комплексных классических групп.

В теории линейных представлений групп широко используется лемма Шура и ее обобщение на бесконечномерные унитарные представления; особенно большое значение лемма Шура приобретает при изучении дискретных прямых сумм представлений [см., например, ([4]) или ([11])].

С другой стороны, представления локально компактных групп, в частности комплексных классических групп, разлагаются в вообще континуальную (а не дискретную) прямую сумму неприводимых представлений *.

Изучение континуальных сумм представлений в значительной мере должно опираться на предложение, обобщающее на этот случай классическую лемму Шура. Одним из результатов этой статьи и является такое предложение (теорема 1, § 2), обобщающее лемму Шура на случай континуальной прямой суммы представлений вполне непрерывными операторами. Применение теоремы 1 дает возможность доказать одно предложение о формуле Планшереля для комплексных классических групп ** (теорема 2, § 4).

§ 1. Лемма о кольцах операторных функций

Пусть $\mathfrak{A}$ — локально бикомпактное хаусдорфово топологическое пространство, и пусть H — фиксированное евклидово или гильбертово пространство. Обозначим через R совокупность всех операторных функций $A = \{a(\alpha)\}$, удовлетворяющих следующим условиям;

1) *каждое значение* $a(\alpha)$ *есть вполне непрерывный оператор в* H;

2) $a(\alpha)$ *есть непрерывная в смысле нормы оператора функция от* $\alpha \in \mathfrak{A}$;

3) $\|a(\alpha)\| \to 0$ *при* $\alpha \to \infty$.

Определим в R операции сложения, умножения на число и умноже-

* См., например, ([9]), где приведена литература по данному вопросу.

** Краткое изложение результатов данной статьи опубликовано в работе автора ([13]).

(Е) М5035
05

ния по формулам

$$\lambda A + \mu B = \{\lambda a(\alpha) + \mu b(\alpha)\}, \quad AB = \{a(\alpha)\, b(\alpha)\} \tag{1}$$

при $A = \{a(\alpha)\}$, $B = \{b(\alpha)\}$; при этом определении операций R становится кольцом. Определим, далее, в R инволюцию и норму, полагая

$$A^* = \{a^*(\alpha)\}, \quad \| A \| \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \| a(\alpha) \| \tag{2}$$

при $A = \{a(\alpha)\}$, где $a^*(\alpha)$ — оператор в H, сопряженный к $a(\alpha)$; тогда R станет полным нормированным кольцом с инволюцией*.

Пусть R_1 — произвольное замкнутое подкольцо с инволюцией кольца R, а α_0 — фиксированная точка в $\mathfrak{A}$; тогда соответствие $A \to a(\alpha)$ есть $*$-представление** кольца R_1 в пространстве H.

В следующей лемме указаны условия, при которых R_1 совпадает с R.

ЛЕММА. *Пусть R_1 — замкнутое подкольцо с инволюцией кольца R такое, что:*

1) *при любом $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ представление $A \to a(\alpha_0)$ кольца R_1 неприводимо;*

2) *при любых $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$, представления $A \to a(\alpha_1)$, $A \to a(\alpha_2)$ кольца R_1 неэквивалентны.*

Тогда R_1 совпадает с R.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех вполне непрерывных операторов H, а через $\mathfrak{C}_\alpha$ — совокупность всех операторов $a(\alpha)$ при $\{a(\alpha)\} \in R_1$. В силу условия 1), $\mathfrak{C}_\alpha$ есть неприводимое замкнутое в смысле нормы *** кольцо вполне непрерывных операторов; следовательно, на основании результатов Капланского ([8]), $\mathfrak{C}_\alpha$ совпадает с $\mathfrak{C}$.

Докажем, что для любых двух различных точек α_1, α_2 из $\mathfrak{A}$ и любых двух операторов a_1, $a_2 \in \mathfrak{C}$ существует функция $\{a(\alpha)\} \in R_1$ такая, что $a(\alpha_1) = a_1$ и $a(\alpha_2) = a_2$. В силу одной теоремы Капланского **** [см. ([8]), теорема 3.4], отсюда будет следовать, что $R_1 = R$.

Обозначим через I_1 совокупность всех функций $\{a(\alpha)\}$ кольца R_1, удовлетворяющих условию

$$a(\alpha_1) = 0,$$

а через $\mathfrak{C}_1$ — совокупность всех значений $a(\alpha_2)$, принимаемых функциями $\{a(\alpha)\}$ из I_1. Тогда $\mathfrak{C}_1$ — двусторонний идеал в $\mathfrak{C}$ или $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{C}$ (совокупность всех вполне непрерывных операторов в H) есть кольцо, не содержащее отличных от (0) замкнутых двусторонних идеалов, то имеются только две возможности:

а) $\mathfrak{C}_1 = (0)$,

б) $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}$.

---

* По поводу теории колец с инволюцией см. ([11]); мы пользуемся здесь терминологией и результатами этой статьи.

** Представление $A \to T_A$ кольца R_1 мы будем называть $*$-представлением, если $T_{A^*} = (T_A)^*$.

*** См. ([7]) или ([11]).

**** Данная работа была выполнена до опубликования статьи ([8]) Капланского и автором было дано другое доказательство леммы, не опирающееся на теорему 3.4 этой статьи. В целях сокращения автор решил исключить соответствующую часть доказательства леммы и ограничиться ссылкой на теорему 3.4 статьи ([8]).

Докажем, что первая возможность не имеет места. Действительно, пусть $\mathfrak{C}_1 = (0)$; это означает, что из $a(\alpha_1) = 0$ следует $a(\alpha_2) = 0$. Но тогда, поставив в соответствие при $\{a(\alpha)\} \in R_1$ оператору $a(\alpha_1)$ оператор $a(\alpha_2)$, мы получим $*$-изоморфизм кольца $\mathfrak{C}$ на самого себя. В силу теоремы 2 n° 2 § 14 работы ([11]), такой изоморфизм унитарно эквивалентен тождественному отображению $a \to a$ кольца $\mathfrak{C}$, т. е. этот изоморфизм порождается унитарным преобразованием пространства H. Но это означает, что, вопреки условию 2) леммы, представления $A \to a(\alpha_1)$ и $A \to a(\alpha_2)$ кольца R_1 унитарно эквивалентны. Следовательно, возможность а) не имеет места и остается возможность б). Но возможность б) означает, что для любого $a_1 \in \mathfrak{C}$ существует функция $\{a_1(\alpha)\} \in R$, удовлетворяющая условиям

$$a_1(\alpha_1) = 0, \quad a_1(\alpha_2) = a_2.$$

Меняя ролями α_1, α_2, мы заключаем, что в R_1 существует также функция $\{a_2(\alpha)\}$, удовлетворяющая условиям

$$a_2(\alpha_1) = a_1, \quad a_2(\alpha_2) = 0.$$

Тогда функция $a(\alpha) = a_1(\alpha) + a_2(\alpha)$ также принадлежит R_1 и удовлетворяет условиям:

$$a(\alpha_1) = a_1, \quad a(\alpha_2) = a_2.$$

Тем самым лемма полностью доказана.

§ 2. Континуальный аналог леммы Шура

Предположим, что на $\mathfrak{A}$ задана мера, т. е. некоторая вполне аддитивная неотрицательная функция множества $\mu(\Delta)$, определенная на всех борелевских множествах $\Delta \subset \mathfrak{A}$ и конечная на бикомпактных множествах $\Delta \subset \mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех вектор-функций $\xi = \{\xi_\alpha\}$ со значениями из H, измеримых относительно меры μ и удовлетворяющих условию

$$\int \| \xi_\alpha \|^2 d\mu(\Delta_\alpha) < \infty. \tag{1}$$

Очевидно $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство; оно называется *континуальной прямой суммой* (вообще континуума) экземпляров пространства H и обозначается через

$$\int_{\mathfrak{A}} H d\mu(\Delta_\alpha).$$

Элементы $A = \{a(\alpha)\}$ кольца R можно рассматривать как ограниченные операторы в $\mathfrak{H}$, полагая

$$A\{\xi_\alpha\} = \{a(\alpha)\xi_\alpha\}. \tag{2}$$

Пусть M — произвольное кольцо с инволюцией; рассмотрим унитарное представление $x \to A_x$ кольца M при помощи операторов кольца R, т. е. гомоморфизм $x \to A_x$ кольца M в кольцо R, удовлетворяющее условию:

$$(A_x)^* = A_x \cdot A_{x^*}. \tag{3}$$

В подробной записи это представление имеет вид $x \to \{a_x(\alpha)\}$ и при фиксированном α соответствие $x \to a_x(\alpha)$ есть $*$-представление кольца M в пространстве H.

ТЕОРЕМА 1. (Континуальный аналог леммы Шура). *Пусть задано $*$-представление $x \to \{a_x(\alpha)\}$ $*$-полного кольца M в пространстве $\mathfrak{H}$ при помощи элементов кольца R, обладающее следующими свойствами:*

1) *при каждом фиксированном $\alpha \in \mathfrak{A}$ представление $x \to a_x(\alpha)$ в пространстве H неприводимо;*

2) *для любых двух различных точек $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$ представления $x \to a_x(\alpha_1)$ и $x \to a_x(\alpha_2)$ неэквивалентны.*

Тогда всякий оператор B в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, имеет вид $B = \{\lambda(\alpha)\,1\}$, где $\lambda(\alpha)$ — измеримая существенно ограниченная числовая функция, а 1 — единичный оператор H.*

Доказательство. Обозначим через R_1 совокупность всех операторов $\{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$; как гомоморфный образ $*$-полного кольца M, R_1 есть замкнутое в смысле нормы подкольцо кольца R [см. (7) или (14)]. Следовательно, учитывая условия 1) и 2), мы видим, что R_1 удовлетворяет всем условиям леммы § 1 и поэтому совпадает с R. Таким образом, оператор B, перестановочный со всеми операторами $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, есть оператор, перестановочный со всеми операторами кольца R. В частности, он перестановочен со всеми операторами $\{\lambda(\alpha)\,1\}$, где $\lambda(\alpha)$ — произвольная непрерывная числовая функция, удовлетворяющая условию $\lambda(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$, и потому B имеет вид $B = \{b(\alpha)\}$, где $\{b(\alpha)\}$ — измеримая существенно ограниченная операторная функция со значениями из $\mathfrak{C}$.

Перестановочность оператора $B = \{b(\alpha)\}$ с операторами $A = \{a(\alpha)\}$ кольца R означает, что

$$a(\alpha)\,b(\alpha) = b(\alpha)\,a(\alpha) \tag{4}$$

для почти всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть $\|a_{jk}\|$ — матрица оператора a в фиксированном базисе $\{e_1, e_2, \ldots\}$; обозначим через $a^{(p,q)}$ оператор, определенный условиями:

$$a^{(p,q)}_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq p \text{ или } k \neq q, \\ 1 \text{ при } j = p \text{ и } k = q, \end{cases} \tag{5}$$

где $a^{(p,q)}_{jk}$ — матрица оператора $a^{(p,q)}$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Очевидно всякий оператор a есть предел линейных комбинаций операторов $a^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2, \ldots$. Применим (4) к функции $a(\alpha) = \mu(\alpha)\,a^{(p,q)}$, где $\mu(\alpha)$ — фиксированная непрерывная на $\mathfrak{A}$ числовая функция, отличная от нуля всюду на $\mathfrak{A}$, и равная нулю на бесконечности. Мы получим, что вне некоторого множества E_{pq} меры нуль

$$a^{(p,q)}\,b(\alpha) = b(\alpha)\,a^{(p,q)}\,. \tag{6}$$

Поэтому вне множества $E = U_{p,q}E_{p,q}$ также меры нуль соотношение (6) будет выполняться для всех $p, q = 1, 2, \ldots$. Но тогда вне E также

$$ab(\alpha) = b(\alpha)\,a$$

* Т. е. ограниченная на множестве $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, дополнение которого имеет меру, равную нулю.

для всех операторов $a \in \mathfrak{C}$, что возможно лишь тогда, когда $b(\alpha)$ есть оператор умножения на число:

$$b(\alpha) = \lambda(\alpha)\,1,$$

где $\lambda(\alpha)$ — измеримая функция.

Таким образом, вне множества E меры нуль $b(\alpha) = \lambda(\alpha)\,1$ и потому

$$B = \{\lambda(\alpha)\,1\}.$$

Из ограниченности оператора B следует, что функция $\lambda(\alpha)$ существенно ограничена, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть M, $x \to a_x(\alpha)$ и $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 1. Тогда всякое подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi_\alpha\}$ из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию*:

$$\xi_\alpha = 0 \text{ для почти всех } \alpha \in \Delta, \tag{7}$$

где Δ — фиксированное измеримое множество в $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть P — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$; в силу инвариантности подпространства $\mathfrak{M}$, оператор P перестановочен со всеми операторами $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, и потому имеет вид:

$$P = \{\lambda(\alpha)\,1\},$$

где $\lambda(\alpha)$ — измеримая существенно ограниченная числовая функция. Так как $P^2 = P$, то $\lambda^2(\alpha) = \lambda(\alpha)$ почти всюду в $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что

$$\lambda(\alpha) = 0 \text{ или } \lambda(\alpha) = 1 \text{ почти всюду в } \mathfrak{A}. \tag{8}$$

Пусть Δ — множество всех точек α, для которых $\lambda(\alpha) = 0$; так как функция $\lambda(\alpha)$ измерима, то Δ измеримо.

Пространство $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех векторов ξ из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $P\xi = \xi$, т. е. $\lambda(\alpha)\,\xi_\alpha = \xi_\alpha$ для почти всех α. В силу (8), это сводится к условию

$$\xi_\alpha = 0 \text{ при } \alpha \in \Delta.$$

Следствие 2. *Пусть M, $x \to a_x(\alpha)$ и $\mathfrak{H}$ — те же, что в теореме 1, и пусть $\mathfrak{M}$ — пространство в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$. Если $\mathfrak{M}$ содержит вектор $\xi = \{\xi_\alpha\}$, удовлетворяющий условию*

$$\xi_\alpha \neq 0 \text{ для почти всех } \alpha, \tag{9}$$

то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Из (9) следует, что Δ есть множество меры нуль и потому $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

§ 3. Представления группы $G \times G$

Пусть G — топологическая группа. Рассмотрим прямое произведение $G \times G$ группы G на самое себя, т. е. совокупность всех пар $g = (g_1, g_2)$, закон умножения которых задается формулой:

$$g\,g' = (g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1',\ g_2 g_2'); \tag{1}$$

при этом топология в $G \times G$ определяется естественным образом по топологии в G, как в прямом произведении топологических пространств.

Если $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$ — два каких-либо унитарных представления группы G в пространствах $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ соответственно, то, полагая при $\mathfrak{g} = \{g_1, g_2\}$

$$\hat{T}_{\mathfrak{g}} = T_{g_1}^{(1)} \times T_{g_2}^{(2)}, \tag{2}$$

получим представление $\mathfrak{g} \to \hat{T}_{\mathfrak{g}}$ группы $G \times G$ в прямом произведении* $\mathfrak{H}^{(1)} \times \mathfrak{H}^{(2)}$ пространств $\mathfrak{H}^1$ и $\mathfrak{H}^2$.

I. *Если представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$ неприводимы, то и построенное по ним представление $\mathfrak{g} \to \hat{T}_{\mathfrak{g}}$ группы $G \times G$ неприводимо.*

Доказательство. В силу неприводимости представления $g \to T_g^{(1)}$, всякий ограниченный оператор A_1 в $\mathfrak{H}^{(1)}$ есть слабый предел последовательности конечных линейных комбинаций операторов $T_g^{(1)}$; аналогично, всякий ограниченный оператор A_2 в $\mathfrak{H}^{(2)}$ есть слабый предел последовательности конечных линейных комбинаций операторов $T_g^{(2)}$. Поэтому оператор $A_1 \times A_2$ в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ есть слабый предел последовательности конечных линейных комбинаций операторов $\hat{T}_{\mathfrak{g}} = T_{g_1}^{(1)} \times T_{g_2}^{(2)}$. Но слабо замкнутое кольцо, порожденное всеми операторами $A_1 \times A_2$, есть кольцо всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ [см. (10)]; поэтому всякий ограниченный оператор в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, перестановочный со всеми операторами

$$\hat{T}_{\mathfrak{g}} = T_{g_1}^{(1)} \times T_{g_2}^{(2)}, \tag{3}$$

перестановочен также со всеми вообще ограниченными операторами в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и потому кратен единичному оператору.

II. *Пусть унитарные представления $g \to T_g^{(1)}$, $g \to T_g^{(1)'}$, $g \to T_g^{(2)}$, $g \to T_g^{(2)'}$ группы G неприводимы; тогда представления*

$$\{g_1, g_2\} \to T_{g_1}^{(1)} \times T_{g_2}^{(2)}, \quad \{g_1, g_2\} \to T_{g_1}^{(1)'} \times T_{g_2}^{(2)'} \tag{4}$$

группы $G \times G$ унитарно эквивалентны в том и только в том случае, когда представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(1)'}$, а также представления $g \to T_g^{(2)}$ и $g \to T_g^{(2)'}$ унитарно эквивалентны.

Доказательство. Достаточность условия очевидна; докажем его необходимость.

Итак, пусть представления (4) унитарно эквивалентны. Тогда, в частности, унитарно эквивалентны представления

$$\{g_1, e\} \to T_{g_1}^{(1)} \times 1 \text{ и } \{g_1, e\} \to T_{g_1}^{(1)'} \times 1 \tag{5}$$

группы G, кратные неприводимым представлениям $g \to T_{g_1}^{(1)}$ и $g \to T_{g_1}^{(1)'}$. На основании следствия 4 n° 3 § 7 в (11), отсюда вытекает, что сами эти неприводимые представления также унитарно эквивалентны. Аналогично доказывается, что представления $g_2 \to T_{g_2}^{(2)}$ и $g_2 \to T_{g_2}^{(2)'}$ унитарно эквивалентны.

---

* По поводу определения прямого произведения пространств см. (10).

§ 4. Применения к формуле Планшереля для комплексных классических групп

Пусть $\mathfrak{G}$ — комплексная классическая группа, т. е. одна из следующих четырех классов групп:

1) A_n — группа всех комплексных матриц n-го порядка с определителем, равным 1 (комплексная унимодулярная группа);

2) B_n, D_n — группы всех ортогональных комплексных матриц соответственно порядка $2n$ и $2n+1$ с определителем, равным 1 (ортогональные группы);

3) C_n — группа всех комплексных матриц $2n$-го порядка с определителем, равным 1, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную кососимметрическую форму (симплектическая группа).

Группы B_n, C_n, D_n характеризуются тем, что они оставляют инвариантной некоторую билинейную форму $\varphi(\xi, \eta)$, симметричную в случае групп B_n, D_n и кососимметричную в случае группы C_n. Выбирая надлежащим образом базис в соответствующем пространстве, можно добиться того, чтобы матрица формы $\varphi(\xi, \eta)$ имела вид:

$$S_0 = \left\| \begin{matrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

в случае групп B_n, D_n и

$$S_0 = \left\| \begin{matrix} & & & & -1 \\ & & & -1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

в случае группы C_n.

В дальнейшем мы будем рассматривать матрицы групп B_n, C_n, D_n только в таком базисе.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц $u \in \mathfrak{G}$, через K — совокупность всех матриц $k \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \tag{3}$$

через Z — совокупность всех матриц $\zeta \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$\zeta_{pp} = 1, \quad \zeta_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \tag{4}$$

через D — совокупность всх диагональных матриц $\delta \in \mathfrak{G}$, через E — совокупность всех диагональных матриц $\varepsilon \in \mathfrak{G}$ с положительными диагональными элементами, через Γ — совокупности всех диагональных унитарных матриц $\gamma \in \mathfrak{G}$. Очевидно $\mathfrak{U}$, K, Z, D, E, Γ — подгруппы * группы $\mathfrak{G}$, причем $\Gamma = D \cap \mathfrak{U}$, $\mathrm{E} \subset D$, $\mathrm{Z} \subset K$, $D \subset K$.

Обозначим, далее, через S совокупность всех матриц $s \in \mathfrak{G}$, осуществляющих подстановку координатных осей и таких, что

$$s^{-1} \delta s \in D \tag{5}$$

* Подробнее об этих подгруппах см. в [5].

для всех $\delta \in D$. Очевидно S — также подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $S \subset \mathfrak{U}$. В группах $\mathfrak{U}$, Z, D, E, Γ существует двусторонне инвариантная мера, дифференциал которой мы обозначим через $d\mu(u)$, $d\mu(\zeta)$, $d\mu(\delta)$ и $d\mu(\gamma)$ соответственно; так как группы $\mathfrak{U}$ и Γ компактны, то $d\mu(u)$ и $d\mu(\gamma)$ можно считать пронормированными так, что

$$\int d\mu(u) = 1 \tag{6}$$

и

$$\int d\mu(\gamma) = 1. \tag{7}$$

В группе K существуют лево- и право-инвариантные меры, дифференциалы которых обозначим через $d\mu_l(k)$ и $d\mu_r(k)$ соответственно; положим

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}. \tag{8}$$

Так как D — коммутативная группа, совокупность X всех характеров $\chi = \chi(\delta)$ группы D есть также коммутативная группа — группа характеров группы D.

Положим

$$\chi_s(\delta) = \chi(s^{-1}\delta s) \text{ при } s \in S; \tag{9}$$

тогда χ_s есть также характер группы D и соответствие $\chi \to \chi_s$ есть гомеоморфизм в X.

Каждому $\chi \in X$ отвечает неприводимое унитарное представление $g \to T_g^\chi$ группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^\chi$, которое строится следующим образом:

Пространство $\mathfrak{H}^\chi$ есть совокупность всех измеримых функций $f(u)$, $u \in \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям:

$$f(\gamma u) = \chi(\gamma) f(u), \tag{10}$$

$$\int |f(u)|^2 du < \infty \tag{11}$$

и при $f \in \mathfrak{H}^\chi$

$$T_g^\chi f(u) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \chi(\varepsilon) f(v), \tag{12}$$

где

$$ug = \varepsilon \zeta v. \tag{13}$$

Совокупность всех представлений $g \to T_g^\chi$, отвечающих всевозможным $\chi \in X$, называется *основной серией* представлений группы $\mathfrak{G}$. При этом два представления $x \to T_g^\chi$ и $x \to T_g^{\chi'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi' = \chi_s$ при некотором $s \in S$.

Неприводимому представлению $g \to T_g^\chi$ основной серии отвечает неприводимое представление $x \to T_x^\chi$ группового кольца R группы $\mathfrak{G}$. Оказывается *, что T_x^χ есть интегральный оператор с ядром Гильберта — Шмидта

* См. ([5]), § 19, 35; элементами кольца R мы считаем непрерывные функции $x(g)$, равные нулю вне компактного множества.

$$K(u_1, u_2, \chi) = \int x(u_1^{-1}\delta\zeta u_2)\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(\delta), \tag{14}$$

причем

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \int \left[\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2\,d\mu(u_1)\,d\mu(u_2)\right]\omega(\chi)\,d\mu(\chi), \tag{15}$$

где $\omega(\chi)$ — некоторая неотрицательная функция, явный вид которой нам не понадобится. Отметим только, что $\omega(\chi)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\chi_s) = \omega(\chi) \text{ для всех } s \in S \text{ и } \chi \subset X. \tag{16}$$

Формула (15) называется *аналогом формулы Планшереля* *. Внутренний интеграл в (15)

$$\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2\,d\mu(u_1)\,d\mu(u_2)$$

есть след оператора $T^{\chi}_{x^*x}$; отсюда, учитывая эквивалентность представлений $x \to T^{\chi}_x$ и $x \to T^{\chi_s}_x$, заключаем, что

$$\iint |K(u_1, u_2, \chi_s)|^2\,d\mu(u_1)\,d\mu(u_2) = \iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2\,d\mu(u_1)\,d\mu(u_2). \tag{17}$$

Поэтому интеграл в правой части (15) можно преобразовать следующим образом. Обозначим через X_e максимальное открытое множество в X такое, что если $\chi \in X_e$ и $s \neq e$, то $\chi_s \overline{\in} X$. Пусть X_s — открытое множество, которое получается из X_e преобразованием $\chi \to \chi_s$; очевидно, почти вся группа X представится в виде теоретико-множественной суммы множества X_s и потому интеграл по X в формуле (15) — в виде суммы интегралов по X_s. В силу (16) и (17), эти интегралы друг другу равны и поэтому формулу (15) можно переписать в виде:

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = m\int\limits_{X_e}\left[\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2\,d\mu(u_1)\,d\mu(u_2)\right]\omega(\chi)\,d\mu(\chi), \tag{18}$$

где m — число элементов группы S.

Отметим, что ядра $K(u_1, u_2, \chi)$, отвечающие функциям $x(g) \in R'$, удовлетворяют условиям:

$$K(\gamma u_1, u_2, \chi) = \chi(\gamma)K(u_1, u_2, \chi), \tag{19а}$$

$$K(u_1, \gamma u_2, \chi) = \overline{\chi(\gamma)}K(u_1, u_2, \chi). \tag{19б}$$

Действительно, из (17) мы заключаем, что

$$K(\gamma u_1, u_2, \chi) = \int x(u_1^{-1}\gamma^{-1}\delta\zeta u_2)\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(\delta) =$$

$$= \int x(u_1^{-1}\delta\zeta u_2)\beta^{-\frac{1}{2}}(\gamma\delta)\chi(\gamma\delta)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(\delta) =$$

$$= \int x(u_1^{-1}\delta\zeta u_2)\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\gamma)\chi(\delta)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(\delta) = \chi(\gamma)K(u_1, u_2, \chi),$$

---

* Впервые (для группы A_2) эта формула была получена в [2], а затем обобщена в [3] и [5]. Наиболее простой ее вывод см. в [1].

ибо $\beta(\gamma\delta) = \beta(\delta)$, $\chi(\gamma\delta) = \chi(\gamma)\chi(\delta)$. Таким образом, (19а) доказано; (19б) доказывается аналогично.

Обозначим через $\mathfrak{H}_K$ гильбертово пространство всех измеримых функций $K(u_1, u_2, \chi)$, $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$, $\chi \in X_e$, удовлетворяющих условиям (19а), (19б) и условию

$$m \int_{X_e} \left[\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2 \omega(\chi)\, d\mu(u_1)\, d\mu(u_2)\, d\mu(\chi) < \infty, \right. \tag{20}$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}_K$ определим по формуле

$$(K_1, K_2) = m \int \left[\iint K_1(u_1, u_2, \chi)\, \overline{K_2(u_1, u_2, \chi)}\, d\mu(u_1)\, d\mu(u_2) \right] \omega(\chi)\, d\mu(\chi). \tag{21}$$

Формула (18) означает, что переход $x \to K$ по формуле (14) от функции $x(g) \in R$ к ядру K оператора T_x^χ есть изометрическое отображение множества $R \subset L_2(\mathfrak{G})$ в пространство $\mathfrak{H}_K$. Так как R плотно в $L_2(\mathfrak{G})$, то это отображение продолжается единственным образом до изометрического) отображения всего пространства $L_2(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{H}_K$.

Для группы A_2 в работе [2] было показано, что в действительности это отображение есть изометрическое отображение пространства $L_2(\mathfrak{G})$ на $\mathfrak{H}_K$.

Мы покажем, что из результатов § 2 следует справедливость этого предложения для любой комплексной классической группы $\mathfrak{G}$. Другими словами, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $x \to K$ — изометрическое отображение пространства $L_2(\mathfrak{G})$ в пространство $\mathfrak{H}_K$, определенное для $x \in R$ формулой*

$$K(u_1, u_2, \chi) = \int x(u_1^{-1}\delta\zeta u_2)\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\delta). \tag{22}$$

Тогда образ пространства $L_2(\mathfrak{G})$ при этом изометрическом отображении есть все пространство $\mathfrak{H}_K$.

Доказательство. Рассмотрим представление

$$\{g_1, g_2\} \to T_{g_1}^\chi \times T_{g_2}^{\bar\chi} \tag{23}$$

группы $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, где $g_1 \to T_{g_1}^\chi$ и $g_2 \to T_{g_2}^\chi$ — представления основной серии. Для краткости положим $\mathfrak{g} = \{g_1, g_2\}$ и

$$\hat T_{\mathfrak{g}}^\chi = T_{g_1}^\chi \times T_{g_2}^{\bar\chi}; \tag{24}$$

тогда представление (23) запишется в виде

$$\mathfrak{g} \to T_{\mathfrak{G}}^\chi. \tag{25}$$

В силу (10) и (11), пространство $\hat{\mathfrak{H}}^\chi$ этого представления есть совокупность всех измеримых функций $f(u_1, u_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\iint |f(u_1, u_2)|^2\, d\mu(u_1)\, d\mu(u_2) < \infty \tag{26}$$

и

$$f(\gamma u_1, u_2) = \chi(\gamma) f(u_1, u_2), \quad f(u_1, \gamma u_2) = \overline{\chi(\gamma)} f(u_1, u_2). \tag{27}$$

Далее, в силу (12) и (13), при $f \in \hat{\mathfrak{H}}^\chi$

$$\hat{T}^\chi_{\mathfrak{g}} f(u_1, u_2) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon_1)\chi(\varepsilon_1)\beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon_2)\chi(\varepsilon_2) f(v_1, v_2), \tag{28}$$

где

$$u_1 g_1 = \varepsilon_1 \zeta_1 v_1, \quad u_1 g_2 = \varepsilon_2 \zeta_2 v_2. \tag{29}$$

Применяя предложения I и II § 3, мы заключаем, что представление $\mathfrak{g} \to \hat{T}^\chi_{\mathfrak{g}}$ неприводимо и что при $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{X}_e$, $\chi_1 \neq \chi_2$, представления $\mathfrak{G} \to T^{\chi_1}_{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{G} \to \hat{T}^{\chi_2}_{\mathfrak{g}}$ неэквивалентны.

Обозначим через $\hat{R}$ групповое кольцо без единицы группы $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$; представлениям $\mathfrak{g} \to \hat{T}^\chi_{\mathfrak{g}}$ группы $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ отвечают $*$-представления $\hat{x} \to \hat{T}^\chi_{\hat{x}}$ кольца $\hat{R}$. Эти представления неприводимы и при $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{X}_e$, представления $\hat{x} \to \hat{T}^{\chi_1}_{\hat{x}}$, $\hat{x} \to \hat{T}^{\chi_2}_{\hat{x}}$ неэквивалентны.

Пусть $\tilde{R}$ есть $*$-пополнение кольца $\hat{R}$. Так как $\hat{R}$ — групповое кольцо, то $\tilde{R}$ — приведенное кольцо [см. ([11]), § 8] и потому всякое $*$-представление кольца $\hat{R}$ продолжается по непрерывности (и притом единственным образом) до $*$-представления кольца $\tilde{R}$. В частности, это справедливо для представлений $\hat{x} \to \hat{T}^\chi_{\hat{x}}$; очевидно, эти представления, рассматриваемые как представления кольца $\tilde{R}$, попрежнему будут неприводимыми и при $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{X}_e$, — неэквивалентными.

Операторы $\hat{T}^\chi_{\hat{x}}$, $\hat{x} \in \tilde{R}$, вполне непрерывны и удовлетворяют условию

$$\| \hat{T}^\chi_{\hat{x}} \| \to 0 \text{ при } \chi \to \infty. \tag{30}$$

Действительно, это очевидно для функций

$$\hat{x}(g_1, g_2) = x_1(g_1) x_2(g_2),$$

где $x_1(g)$, $x_2(g)$ — функции из группового кольца R группы $\mathfrak{G}$, ибо для таких функций

$$\hat{T}^\chi_{\hat{x}} = T^\chi_{x_1} \times T^\chi_{x_2},$$

а операторы T^χ_x, $x \in R$, вполне непрерывны и удовлетворяют условию (3). Так как всякий оператор $\hat{T}_{\hat{x}}$, $\hat{x} \in \tilde{R}$, есть предел в смысле нормы $\sup \| \hat{T}^\chi_{\hat{x}} \|$ конечных линейных комбинаций операторов $T^\chi_{x_1} \times T^\chi_{x_2}$, то утверждение справедливо для любых операторов $\hat{T}^\chi_{\hat{x}}$, $\hat{x} \in \tilde{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ образ пространства $L_2(\mathfrak{G})$ при отображении $x \to K$. Нам надо доказать, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_K$. Для этого заметим, что $L_2(\mathfrak{G})$ инвариантно при преобразованиях

$$x(g) \to x(g_1^{-1} g g_2). \tag{31}$$

Но непосредственные вычисления показывают, что при этом преобразовании ядро $K(u_1, u_2, \chi)$, отвечающее функции $x(g)$, преобразуется по формуле

$$K(u_1, u_2, \chi) \to \hat{T}^\chi_{\mathfrak{g}} K(u_1, u_2, \chi), \quad \mathfrak{g} = \{g_1, g_2\}, \tag{32}$$

где $\hat{T}^\chi_{\mathfrak{g}}$ применяется к ядру $K(u_1, u_2, \chi)$, рассматриваемому как функция

от u_1, u_2 [см., например, ([5]) или ([12])]. Следовательно, $\mathfrak{M}$ инвариантно по отношению к преобразованиям (32), а значит, и по отношению к преобразованиям

$$K(u_1, u_2, \chi) \to \hat{T}^{\chi}_{\hat{x}} K(u_1, u_2, \chi), \quad \hat{x} \in \tilde{R}, \tag{33}$$

где $\hat{T}^{\chi}_{\hat{x}}$ применяется к ядру $K(u_1, u_2, \chi)$, рассматриваемому как функция от u_1, u_2.

Применим теперь следствие 1 из теоремы 1 к представлениям $\hat{T}^{\chi}_{\hat{x}}$, $\chi \in \mathrm{X}_e$ (вместо $a_x(\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$).

Непосредственно применить это следствие нельзя, так как $\hat{T}^{\chi}_{\hat{x}}$ — операторы в вообще различных пространствах $\mathfrak{H}^{\chi} \times \mathfrak{H}^{\bar{\chi}}$. Однако легко произвести унитарное преобразование этих пространств, в результате которого применение следствия 1 станет возможным. Именно, пусть $\varphi_{\chi}(u)$ — фиксированная непрерывная функция на $\mathfrak{U} \times \mathrm{X}$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_{\chi}(\gamma u) = \overline{\chi(\gamma)}\, \varphi_{\chi}(u), \quad |\varphi_{\chi}(u)| = 1. \tag{34}$$

Каждой функции $f(u) \in \mathfrak{H}^{\chi}$ поставим в соответствие функцию

$$f_1(u) = \varphi_{\chi}(u) f(u); \tag{35}$$

из определения $\mathfrak{H}^{\chi}$ (см. стр. 10) вытекает, что это соответствие есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}^{\chi}$ на гильбертово пространство всех измеримых функций $f_1(u)$, удовлетворяющих условиям

$$\int |f_1(u)|^2 \, d\mu(u) < \infty, \quad f_1(\gamma u) = f_1(u);$$

обозначим это гильбертово пространство через H. Аналогично, переход от $f(u)$ к $\overline{\varphi_{\chi}(u)} f(u)$ есть изометрическое отображение $\mathfrak{H}^{\bar{\chi}}$ на H; следовательно, переход от $f(u_1, u_2)$ к $\varphi_{\chi}(u_1)\overline{\varphi_{\chi}(u_2)} f(u_1, u_2)$ есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}^{\chi} \times \mathfrak{H}^{\bar{\chi}}$ на пространство $H \times H$. Наконец, переход от $K(u_1, u_2, \chi)$ к $\varphi_{\chi}(u_1)\overline{\varphi_{\chi}(u_2)} K(u_1, u_2, \chi)$ есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}_K$ на гильбертово пространство всех измеримых функций $\tilde{K}(u_1 u_2, \chi)$, $\chi \in \mathrm{X}_e$, удовлетворяющих условиям

$$\int \left[\iint |\hat{K}(u_1, u_2, \chi)|^2 \, d\mu(u_1)\, d\mu(u_2) \right] \omega(\chi)\, d\mu(\chi) < \infty \tag{36}$$

и

$$\tilde{K}(\gamma_1 u_1, \gamma_2 u_2, \chi) = \tilde{K}(u_1, u_2, \chi). \tag{37}$$

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}_K$ это гильбертово пространство; очевидно, $\tilde{\mathfrak{H}}_K$ есть континуальная прямая сумма по мере $m\,\omega(\chi)\, d\mu(\chi)$ континуума экземпляров пространства $H \times H$:

$$\tilde{\mathfrak{H}}_K = \int_{\mathrm{X}_e} (H \times H)\, m\, \omega(\chi)\, d\mu(\chi). \tag{38}$$

При этих изометрических отображениях представления $x \to T^{\chi}_x$, $\hat{x} \to \hat{T}^{\chi}_{\hat{x}}$ перейдут в унитарно им эквивалентные представления в пространствах H

и $H \times H$ соответственно; эти представления мы снова обозначим через $x \to T_x^\chi$ и $\hat{x} \to \hat{T}_{\hat{x}}^\chi$. Очевидно, операторы T_x^χ попрежнему вполне непрерывны, представления $\hat{x} \to \hat{T}_{\hat{x}}^{(\chi)}$ неприводимы при $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_1, \chi_2 \in X_e$, неэквивалентны и попрежнему выполнено условие (30). Кроме того, для любого $\hat{x} \in \tilde{R}$ оператор $\hat{T}_{\hat{x}}^{(\chi)}$ в пространстве $H \times H$ есть непрерывная в смысле нормы оператора функция от χ. Действительно, ядро $\tilde{K}(u_1, u_2, \chi)$ оператора T_x^χ, $x \in R$, в пространстве H задается формулой

$$\tilde{K}(u_1, u_2, \chi) = \varphi_\chi(u_1)\overline{\varphi_\chi(u_2)}\, K(u_1, u_2, \chi);$$

отсюда и из формулы (14) для ядра $K(u_1, u_2, \chi)$ следует, что T_x^χ есть непрерывная в смысле нормы оператора функция от χ.

Так как всякий оператор $\hat{T}_{\hat{x}}^\chi$ есть предел в смысле нормы $\sup_\chi \| \hat{T}_x^\chi \|$ линейных комбинаций операторов $T_{x_1}^\chi \times T_{x_2}^{\bar{\chi}}$, $x_1, x_2 \in R$, то отсюда следует утверждение и для оператора $T_{\hat{x}}^\chi$. Таким образом, представления $\hat{x} \to \hat{T}_{\hat{x}}^\chi$ $*$-полного кольца $\tilde{R}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1 § 2 (с χ и X_e вместо α и $\mathfrak{A}$).

Пусть $A_{\hat{x}}$ — оператор в $\tilde{\mathfrak{H}}_K$, определенный формулой

$$A_{\hat{x}}\{\tilde{K}_\chi\} = \{\hat{T}_{\hat{x}}^\chi \tilde{K}_\chi\}, \quad (\tilde{K}_\chi = \tilde{K}(u_1, u_2, \chi)), \tag{39}$$

и пусть $\tilde{\mathfrak{M}}$ — образ подпространства $\mathfrak{M}$ при построенном выше отображении $K(u_1, u_2, \chi) \to \tilde{K}(u_1, u_2, \chi)$. Инвариантность $\mathfrak{M}$ по отношению к преобразованиям (33) означает инвариантность $\tilde{\mathfrak{M}}$ по отношению к операторам $A_{\hat{x}}$, $\hat{x} \in \tilde{R}$. На основании следствия 1 из теоремы 1, $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех функций $\tilde{K}_\chi$, удовлетворяющих условию:

$$\tilde{K}_\chi = 0 \text{ для почти всех } \chi \in \Delta,$$

где Δ — фиксированное измеримое множество в X_e. Поэтому достаточно доказать, что Δ есть множество меры нуль; тем самым будет показано, что $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{H}}_K$, а значит, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_K$. Но при фиксированном χ_0 операторы $T_x^{\chi_0}$ в H образуют неприводимое множество и потому при некотором x ядро $\tilde{K}_\chi = \tilde{K}(u_1, u_2, \chi)$ этого оператора отлично от нуля. В силу непрерывности оператора T_x^χ в точке χ_0, существует окрестность $U(\chi_0)$ такая, что $\tilde{K}_\chi \neq 0$ при $\chi \in U(\chi_0)$. Поэтому $\Delta \cap U(\chi_0)$ есть множество меры нуль. Отсюда легко заключаем, что пересечение множества Δ с любым компактным множеством из X_e также имеет меру, равную нулю, а значит, и Δ есть множество меры нуль. Теорема доказана.

Поступило
15. VII. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые представления, Доклады Ак. наук СССР, 92, № 2 (1953), 221—224.

[2] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 411—504.

[3] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы, Доклады Ак. наук СССР, 63 (1948), 609—612.

[4] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Кольца с инволюцией и их представления, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 445—480.
[5] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, 36 (1950), 1—288.
[6] Harish-Chandra, Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37 (1951), 813—818.
[7] Kaplansky I., Normed algebras, Duke Math. Journ., 16, No 3 (1949), 399—418.
[8] Kaplansky I., The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 70, No 2 (1951), 219—255.
[9] Mackey G. W., Functions on locally compacte groups, Bull. of Amer. Math. Soc., 56 (1950), 385—412.
(Русский перевод см. в Успехах матем. наук, 8, вып. 4(56) (1953), 95—129).
[10] Murray F. J. and Neumann J. V., On rings of operators. I, Ann. of Math., 37 (1936), 116—229.
[11] Наймарк М. А., Кольца с инволюцией, Успехи матем. наук, 3, вып. 5 (27) (1948), 52—145.
[12] Наймарк М. А., Об описании всех неприводимых унитарных представлений комплексных классических групп, Матем. сборник, 35(77) : 2 (1954), 317—356.
[13] Наймарк М. А., О континуальном аналоге леммы Шура, Доклады Ак. наук СССР, 98 (1954), 185—188.
[14] Segal I. E., Two-sided ideals in operator algebras, Ann. of Math., 50 (1949), 856—865.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 17—32

И. И. ВОРОВИЧ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе рассматриваются динамические системы, подверженные воздействию возмущений, составляющих непрерывный случайный процесс.

§ 1

Во многих вопросах физики и механики для описания некоторых процессов приходится решать и исследовать дифференциальные уравнения, правые части которых зависят от случайных функций. Простейшим примером таких задач являются задача о броуновском движении частицы, задача о воздействии случайных импульсов на гармонический осциллятор и т. д.

Многие такие уравнения подробно исследованы. В настоящей работе рассматриваются некоторые общие свойства таких систем дифференциальных уравнений.

В дальнейшем мы будем считать вероятностное описание случайного процесса $x(t)$ заданным, если известна так называемая полная система корреляционных функций (п. с. к. ф) [см. ([6])]:

$$K_1(t) = \text{м. о. } x(t_1),\ K_2(t_1, t_2) = \text{м. о. } x(t_1)\,x(t_2), \ldots$$
$$\ldots,\ K_n(t_1, \ldots t_n) = \text{м. о. } x(t_1)\,x(t_2)\ldots x(t_n).$$

Если у нас имеется некоторая система зависимых случайных функций $x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_p(t)$, то и в этом случае мы введем понятие п. с. к. ф. Именно, под п.с.к.ф. мы будем понимать бесконечное семейство функций

$$K_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \text{м. о.} \left\{ \underbrace{x_1(t_{11})\,x_1(t_{12})\ldots x_1(t_{1\alpha_1})}_{\alpha_1} \ \ldots\ \underbrace{x_p(t_{p1})\ldots x_p(t_{p\alpha_p})}_{\alpha_p} \right\}.$$

Как известно, случайный процесс $x(t)$ может быть описан еще иначе, если для любой совокупности моментов времени $t_1, \ldots, t_k$ указан закон распределения системы случайных величин $x(t_1), \ldots, x(t_k)$

$$\Phi\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k)\}.$$

Вопрос о том, в какой мере оба способа задания случайного процесса эквивалентны, мы здесь рассматривать не будем. Укажем лишь, что если случайный процесс задан вторым способом, т. е. заданием закона

распределения Φ, то соответствующие к. ф. существуют и легко могут быть определены, если характеристическая функция $\Omega(u_1, u_2, \dots, u_k)$ закона распределения $\Phi\{x(t_1), \dots, x(t_k)\}$, равная

$$\text{м. о. } e^{i\sum_{i=1}^{k} x(t)u_i},$$

будет голоморфной функцией своих аргументов $u_1, \dots, u_k$ в точке $u_1 = u_2 = \dots u_k = 0$. Вообще же, если Ω не является голоморфной функцией, но имеет производную

$$\frac{\partial^n F}{\partial u_1^{k_1} \partial u_2^{k_2} \dots \partial u_k^{k_k}}, \quad k_1 + k_2 + \dots = n,$$

то этим обеспечивается существование к. ф.

$$K_{k_1 k_2 \dots k_n} = \text{м. о. } \{x^{k_1}(t_1)\, x^{k_2}(t_2) \dots x^{k_n}(t_n)\}.$$

С другой стороны, не всякая система функций может служить п. с. к. ф. для некоторого случайного процесса. Действительно, рассмотрим квадратичную форму:

$$A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \text{м. о. } \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x(t_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j K_2(t_i, t_j).$$

Эта форма должна быть неотрицательной и поэтому $K_2(t_i, t_j)$ должны удовлетворять известным неравенствам.

Следует заметить, что если только случайные функции $x_i(t)$ могут принимать в результате опыта значения из конечного промежутка, т. е. если выполняются неравенства

$$|x_i(t)| \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

то в этом случае можно гарантировать существование всех к. ф. и всех характеристических функций.

В дальнейшем будут рассматриваться дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ki} x_k + \\ + \varphi_i(x_1, \dots, x_n;\ t;\ x_{n+1}, \dots, x_m) = F_i, \qquad (1)$$

где x_i, $i = 1, \dots, n$, — искомые функции, а $(x_{n+1}, \dots, x_m)$ — некоторый случайный процесс, вероятностное описание которого задано.

Решить систему (1) — это значит найти вероятностное описание процесса $(x_1, x_2, \dots, x_n;\ x_{n+1}, \dots, x_m)$, если известно вероятностное описание процесса $(x_{n+1}, \dots, x_m)$. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать $x_i(0) = 0$, если $i = 1, \dots, n$, м. о. $x_k \equiv 0$, $k = n+1, \dots, m$, $\varphi_i(0, \dots, 0;\ t;\ 0, \dots, 0) \equiv 0$. В случае, если даже решение системы (1) в указанном смысле существует, его фактическое построение очень затруднено. Ниже даются и обосновываются приемы, позволяющие в некоторых случаях производить построение решений системы (1). Аналогичные приемы даны в работе [5], но без строгого, на наш взгляд, обоснования, вследствие чего трудно судить о пределах их применимости.

§ 2

На протяжении данного параграфа мы будем считать, что:

1. F_i — аналитические функции x_j, x_k в некоторой замкнутой области $\overline{G}$, содержащей точку

$$x_j \equiv x_k \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

2. F_i — непрерывные функции времени, если $0 \leqslant t \leqslant T$.

3. При любых возможных в результате опыта случайных функциях $x_k (k = n+1, \ldots, m)$ решения системы (1) не выходят из области аналитичности F_i, если $0 \leqslant t \leqslant T$.

4. Уравнения (1) таковы, что система

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mu \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k + \mu \varphi_i (x_1, \ldots, x_n; t; \mu x_{n+1}, \ldots, \mu x_m),$$

полученная из уравнений (1) введением числового множителя μ, допускает представление решений в виде рядов по степеням параметра μ, равномерно сходящихся для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ при любых возможных в результате опыта x_k и для $0 \leqslant t \leqslant T$. При указанных условиях оказывается справедливой

ТЕОРЕМА I. *П. с. к. ф. для x_i определяется, если задана п. с. к. ф. для x_k, причем любая к. ф. x_i выражается в виде ряда по степеням параметра μ, все члены которого выражаются через к. ф. для x_k.*

В дальнейшем для однообразия обозначений будем считать функции x_k $(k = n+1, \ldots, m)$ также разложенными в ряды по степеням μ, причем примем

$$x_k = x_{k1} + \mu x_{k2} + \ldots,$$

где

$$x_{k1} = x_k, \quad x_{k2} = 0, \quad x_{k3} = 0, \ldots.$$

В силу сделанных допущений, при фиксированных x_k $(k = n+1, \ldots, m)$ x_i дается рядом:

$$x_i = \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{i\sigma} \mu^{\sigma}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $x_{i\sigma}$ последовательно определяются из следующих систем:

$$\dot{x}_{i1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1} + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k \tag{3}$$
$$(i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m),$$

$$\dot{x}_{i2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \varphi_i \{x_j; t; \mu x_k\}_{\mu=0} \tag{4}$$
$$(i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m),$$

$$x_{i\sigma} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j\sigma} + \Phi_{i\sigma}\{x_{j\sigma-1}, x_{j\sigma-2}, \ldots, x_{j1}; t; x_k\} \quad (5)$$
$$(i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m, \quad \sigma = 1, \ldots, \infty),$$

где

$$\Phi_{i\sigma} = \frac{\partial^\sigma}{\partial \mu^\sigma}\{\varphi_i\}_{\mu=0}$$

— некоторый полином относительно

$$x_{j\,\sigma-1}, x_{j\sigma-2}, \ldots, x_{j1}, x_{n+1}, \ldots, x_m.$$

Обозначим м. о. $\{x_{ar} \cdot x_{bs} \ldots x_{fu}\}$ через $K^{rs\ldots u}_{ab\ldots f}$ и условимся называть высотой к. ф. $K^{rs\ldots u}_{ab\ldots f}$ наибольшее из чисел r, s, u, а показателем к. ф. $K^{rs\ldots u}_{ab\ldots f}$ число индексов из $r, s, \ldots, u$, равных высоте.

Рассмотрим, как определяются к. ф. высоты 1 и показателя 1. Пусть требуется определить $K_{ab\ldots f}$, причем все $b, \ldots, f \geqslant n+1$, $a = 1, \ldots, n$. Рассмотрим систему (3). Умножим правую и левую части каждого из уравнений (3) на $x_b \ldots x_f$. После осреднения каждого уравнения найдем:

$$\frac{d}{dt} K^{11\ldots1}_{ab\ldots f} = \sum_{j=1}^{1} a_{aj} K^{11\ldots1}_{jb\ldots f} + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ak} K_{kb\ldots f} \quad (6)$$
$$(a = 1, \ldots, n; \; b, \ldots, f \subset (n+1, \ldots, m)).$$

Из этой системы находим $K^{11\ldots1}_{ab\ldots f}$.

Предположим, что нам известны все к. ф. высоты 1 показателя w. Покажем, как найти все к. ф. высоты 1 и показателя $w+1$.

Пусть требуется найти $K_{ab\ldots f}$, причем $w+1$ из чисел $a, b, \ldots, f$ будут $\leqslant n$. Для этого снова рассмотрим систему (3). Умножим и левую часть каждого из уравнений системы на $x_b x_c \ldots x_f$ (ровно w из чисел $b, c, \ldots, f \leqslant n$) и осредним их. Тогда получим систему вида (6), где в правой части стоят известные по предположению к. ф. высоты 1 и показателя w и ниже. Таким образом, доказана возможность определения к. ф. высоты 1 и любого показателя.

Возможность определения к. ф. любой высоты будет показана также с помощью индукции. Предположим, что известны все к. ф. высоты $1, \ldots, h$; покажем, как найти все к. ф. высоты $h+1$. Очевидно, достаточно определить все к. ф. высоты $h+1$ и показателя 1.

Пусть требуется найти $K^{h+1\,s\ldots u}_{ab\ldots f}$, причем все $s, \ldots, u \leqslant h$.

Рассмотрим для этого систему, определяющую x_{ah+1}:

$$x_{ah+1} = \sum_{j\ 1}^{n} a_{aj} x_{jh+1} + \Phi_{ah+1}\{x_{jh}, x_{jh-1}, \ldots, x_{j1}; t; x_k\}$$
$$(j = 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m). \quad (7)$$

Умножив каждое уравнение этой системы на $x_{bs} \ldots x_{fu}$ и осреднив их, получим:

$$\frac{d}{dt} K^{h+1\,s\ldots u}_{ab\ldots f} = \sum_{j=1}^{n} a_{aj} K^{h+1\,s\ldots u}_{jb\ldots f} + \text{м. о. } \Phi_{ah+1} \cdot x_{bs} \ldots x_{fu}. \quad (8)$$

В правых частях системы (8) свободные члены содержат только к. ф. высоты h и ниже, т. е. известные функции. Разрешая эту систему, мы получим $K_{ab\ldots f}^{h+1\ s\ldots u}$.

Таким образом, задача определения всех к. ф. для системы случайных функций x_{ih}, x_k $(i = 1, \ldots, n, h = 1, \ldots, \infty, k = n+1, \ldots, m)$ решена.

Рассмотрим какую-либо к. ф., равную м. о. $\{x_a \cdot x_b \ldots x_u\}$. Мы имеем:

$$x_a = \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{a\sigma}\mu^{\sigma}, \quad x_b = \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{b\sigma}\mu^{\sigma}, \ldots .$$

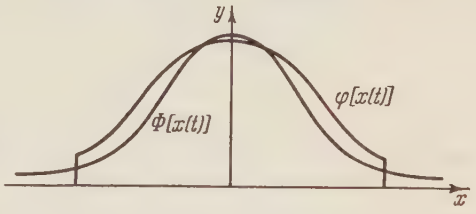
Отсюда следует:

$$\text{м. о.}\{x_a \cdot x_b \ldots x_u\} = \text{м. о.}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{a\sigma}\mu^{\sigma} \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{b\sigma}\mu^{\sigma} \ldots \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{u\sigma}\mu^{\sigma}\right\}.$$

В фигурных скобках можно произвести перемножение рядов, в результате чего получим ряд, каждый член которого есть произведение вида

$$x_{a\sigma_1} \cdot x_{b\sigma_2} \ldots x_{u\sigma_\rho};$$

м. о. $\{x_a \cdot x_b \ldots x_u\}$ будет также рядом, причем члены этого ряда будут типа м. о. $\{x_{a\sigma_1} \cdot x_{b\sigma_2} \ldots x_{u\sigma_\rho}\}$, т. е. уже определенными нами к. ф.



Таким образом, задача определения всех к. ф. решений системы (1) решена при сформулированных выше условиях.

Отметим, что при использовании данного приема для определения всех к. ф. требуется уметь решать лишь однородную систему первого приближения.

Замечание I. Условие 3, вообще говоря, исключает возможность применения теоремы 1 в тех случаях, когда закон распределения $x(t_1) \ldots x(t_p)$ считается допускающим сколь угодно большие значения для $x(t_1) \ldots x(t_p)$. Однако если даже это имеет место, то плотность вероятности для больших значений $x(t_i)$ должна быть очень мала, так как физические величины в результате опыта могут принимать значения, лежащие лишь внутри некоторого интервала. Поэтому в данном случае без большой погрешности можно функцию распределения $x(t_1) \ldots x(t_p)$ заменить другой функцией, которая обращалась бы в нуль в некоторой конечной области изменения переменных $x(t_1), \ldots, x(t_p)$, и тогда может оказаться возможным применение теоремы 1. Например, если закон распределения $x(t_1)$ принят нормальным, то закон $\Phi[x(t_1)]$ может быть заменен законом $\varphi[x(t_1)]$ [см. рисунок]. При этом может оказаться, что $\varphi[x(t_1)]$ передает распределение случайной величины $x(t_1)$ даже лучше, чем $\Phi[x(t_1)]$.

Однако при использовании закона $\varphi[x(t_1)]$, вследствие его разрывности, могут значительно усложниться выкладки*.

Замечание II. Используя известную теорему Пуанкаре [см. (1), стр. 153—160], можно показать, что условия 3,4 будут выполнены, например, если помимо 1,2 будут иметь место следующие условия:

а) расстояние $r(t)$ точки $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, до границы G имеет нижнюю грань $\rho \neq 0$, если $0 \leqslant t \leqslant T$.

б) $$\sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \leqslant \frac{\rho}{1+\frac{nKM}{\rho}} \left\{1 + \frac{2nKM}{\rho} - 2\sqrt{\frac{nKM}{\rho}\left(1+\frac{nKM}{\rho}\right)}\right\}.$$

В неравенстве б) $M = \max F_i$, если $x_1, \ldots, x_m$ изменяются в замкнутой области $\overline{G}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, \ldots, n$, постоянная K такова, что

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t, s)|\, ds \leqslant K,$$

если $0 \leqslant t \leqslant T$ и $i = 1, \ldots, n$, причем $G_{ij}(t, s)$ — фундаментальная матрица Грина для системы первого приближения:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание III. Пусть условие 2 данного параграфа выполнено для $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Пусть, кроме того, система первого приближения

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

такова, что выполнено соотношение

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t, s)|\, ds \leqslant K, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8'}$$

если $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Предположим далее, что в условиях а) и б) можно положить $T = \infty$.

В этом случае построенные для к. ф. ряды будут сходиться при любом $0 \leqslant t \leqslant \infty$.

В том случае, если правые части дифференциальных уравнений, определяющих x_i, будут полиномами относительно x_i, x_k, для определения п. с. к. ф. удобно применить некоторый процесс последовательных приближений. Именно, пусть наша система имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k + \varphi_i(x_j; t; x_k)$$
$$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ k = n+1, \ldots, m). \tag{9}$$

* Разумеется, замечание I нельзя считать строгим обоснованием возможности замены закона $\Phi[x(t)]$ законом $\varphi[x(t)]$. В случае нарушения условия 3 такая замена должна обосновываться в каждом конкретном случае особо.

Предположим, что при любых возможных в результате опыта x_k данную систему можно решить по методу последовательных приближений, принимая

$$\dot{x}_{i1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1} + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\dot{x}_{i\sigma} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j\sigma} + \sum_{s=n+1}^{m} b_{is} x_s + \varphi_i(x_{j\sigma-1}; t; x_k)$$
$$(i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \equiv n+1, \ldots, m, \quad \sigma > 1), \tag{11}$$

причем последовательность приближений будет равномерно сходиться к решению, если $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для удобства обозначений мы примем $x_k \equiv x_{k\sigma}$ и обозначим м. о. $\{x_{ar} \cdot x_{b\sigma} \ldots x_{fu}\}$ через $K_{ab\ldots f}^{rs\ldots u}$.

Условимся, как и ранее, называть высотой к. ф. $K_{ab\ldots f}^{rs\ldots u}$ наибольшее из чисел $r, s, \ldots, u$, а показателем — количество чисел из $(r, s, \ldots, u)$, равных высоте.

Как уже было доказано, система (10) определяет все к. ф. высоты 1. Точно так же легко видеть, что если только определены все к. ф. высоты $\sigma - 1$, то система (11) позволяет найти все к. ф. высоты σ.

Таким образом, определена п. с. к. ф. для случайных функций

$$x_{i\sigma}, \quad x_{k\sigma}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = n+1, \ldots, m, \quad \sigma = 1, \ldots, \infty.$$

Легко видеть, что при сделанных предположениях

$$K_{ab\ldots f,} = \text{м. о. } \{x_a x_b \ldots x_f\} = \lim \text{м. о. } \{x_{a\sigma} x_{b\sigma} \ldots x_{1\sigma}\}_{\sigma \to \infty}.$$

Метод последовательных приближений может быть иногда использован для вычисления к. ф. с бо́льшим успехом, чем описанный выше метод разложения в ряды.

§ 3

1. Пусть имеется нелинейная система вида:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; t; x_{n+1}, \ldots, x_m) =$$
$$= F_i(x_1, \ldots, x_n, t, \ldots), \tag{12}$$

где a_{ik} и b_{ik} могут зависеть от времени.

Предположим, что наша система устойчива при постоянно действующих возмущениях, т. е. что для достаточно малых ε из

$$|x_k| \leqslant \varepsilon, \quad k = n+1, \ldots, m, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty,$$

следует

$$|x_i| \leqslant \delta, \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty;$$

при этом δ может быть сделано как угодно малым, если ε будет достаточно мало [см. (8), стр. 121—124]*.

* $x_i(0)$ считается равным нулю, если $i = 1, \ldots, n$.

Положим далее, что

$$|K_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_m}| \leqslant \varepsilon^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_m}, \tag{13}$$

где ε — достаточно малое число. В таком случае легко видеть, что и

$$|K_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}| \leqslant \delta^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}; \tag{14}$$

при этом δ может быть сделано сколь угодно малым, если ε будет достаточно мало.

В самом деле, из (13) следует:

$$|x_k| \leqslant \varepsilon, \quad k = n+1, \ldots, m,$$

а в силу устойчивости системы (12) при постоянно действующих возмущениях имеем:

$$|x_i| \leqslant \delta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда непосредственно следует (14).

Таким образом, при выполнении условия (13) устойчивость при постоянно действующих возмущениях системы обеспечивает существование и ограниченность всех к. ф. процесса $(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_m)$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$.

Устойчивость системы (12) при постоянно действующих возмущениях будет обеспечена, если, например, выполнены условия 1 и 2 § 2, условие а) замечания II § 2 для $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и, наконец, неравенство (8′).

В случае, когда возмущения входят линейно в правую часть системы (12), этот факт следует из одной теоремы, данной в работе [3] (стр. 59—73), однако теорема остается верной и в наших предположениях.

Кроме того, при выполнении этих же условий может быть доказано следующее неравенство:

$$|K_{\alpha_1\ldots\alpha_n} - K'_{\alpha_1\ldots\alpha_n}| \leqslant C\varepsilon^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1}}, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant \infty. \tag{15}$$

Здесь $K'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ — к. ф., определенная из линейной системы (системы первого приближения):

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik}x_k, \tag{16}$$

а C — некоторая константа.

Иными словами, погрешность, возникающая при определении к. ф. из линейной системы, при $\varepsilon \to 0$ имеет порядок малости, бо́льший, чем самые к. ф.

Неравенство (15) может служить оправданием весьма распространенного на практике приема приближенного решения системы (12) посредством линеаризации.

Если закон распределения системы $(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ допускает сколь угодно большие значения для $x_{n+1}, \ldots, x_m$, то в этом случае устойчивость при постоянно действующих возмущениях не обеспечивает существования и ограниченности всех к. ф. процесса $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m)$, если существуют и ограничены все к. ф. процесса $(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$. В этом можно убедиться на простом примере системы

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \beta x_1^3 + x_2, \tag{17}$$

где α и β — положительные постоянные.

Положим, что x_2 есть нормально распределенная случайная постоянная. Легко видеть, что система (17) устойчива при постоянно действующих возмущениях, так как в данном случае мы имеем:

$$G_{11} = e^{-\alpha(t-s)}, \quad \int_0^t |G_{11}|\, ds \leqslant \frac{1}{\alpha}, \quad \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \infty,$$

и все остальные условия устойчивости при постоянно действующих возмущениях выполнены. Вместе с этим можно показать, что, несмотря на ограниченность всех моментов x_2,

$$\lim \text{ м. о. } x_1^2|_{t\to\infty} = \infty.$$

Поэтому, чтобы добиться ограниченности к. ф. процесса $(x_1, \ldots, x_m)$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$, если закон распределения $(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ допускает сколь угодно большие значения, требуется наложить на систему (12) более сильные условия, чем условие устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Легко видеть, что ограниченность всех абсолютных к. ф. процесса $(x_1, \ldots, x_m)$ для $0 \leqslant t \leqslant \infty$ при ограниченных абсолютных к. ф. процесса $(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ будет выполнена, если система (12) такова, что

$$x_i^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{m} \int_0^t K_{ij}(t, s)\, x_j^2 ds, \tag{18}$$

где

$$K_{ij}(t, s) \geqslant 0, \quad \int_0^t K_{ij}(t, s)\, ds \leqslant K,$$
$$i = 1, \ldots, n, \quad j = n+1, \ldots, m, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Системы, удовлетворяющие условию (18), в дальнейшем будут называться K-системами.

Существенно, что неравенство (18) должно выполняться для любых возможных в результате опыта x_j, для которых имеет смысл уравнение (12), а не только для достаточно малых. Совершенно очевидно, что K-системы всегда устойчивы при постоянно действующих возмущениях.

Для решения вопроса о принадлежности системы к типу K-систем можно применять методы, аналогичные второй методе Ляпунова.

Рассмотрим, например, встречающуюся в некоторых задачах механики систему:

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j + x_{n+i} \tag{19}$$

и предположим, что:

1. корни уравнения

$$|a_{ij}(t) - \lambda I| = 0$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_i(t) \leqslant -\varepsilon < 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \infty, \tag{20}$$

где λ_i приняты действительными с целью сокращения выкладок;

2. $w(x_1, \ldots, x_n; t; x_{n+1}, \ldots, x_m)$ — однородная относительно $x_1, \ldots, x_n$ знакопостоянная положительная форма степени N, каковы бы ни были возможные в результате опыта $x_{n+1}, \ldots, x_m$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$;

3. $v_{ij}(x_1, \ldots, x_n; t; x_{n+1}, \ldots, x_m) = -v_{ji}(x_1, \ldots, x_n; t; x_{n+1}, \ldots, x_m)$.

Докажем, что при сформулированных условиях система (19) будет K-системой. Действительно, рассмотрим

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Мы имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j + x_{n+i} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - Nw + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i},$$

где N — показатель однородности формы w.

Пусть $y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$ — ортогональное преобразование, приводящее форму $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ к каноническому виду. Тогда получим:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_{n+i}|. \tag{20'}$$

Далее, легко видеть, что при любом $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$|x_i| \cdot |x_{n+i}| \leqslant \frac{1}{2} \left(\nu x_i^2 + \frac{1}{\nu} x_{n+i}^2 \right), \tag{21}$$

вследствие чего имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2.$$

Учитывая, что $\lambda_i(t)$ удовлетворяют условию (20), и выбрав $\nu = \varepsilon$, находим:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2.$$

В силу ортогональности преобразования,

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

и мы имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2} v + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2,$$

откуда следует:

$$v \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2\, ds,$$

что и доказывает наше утверждение, так как можно принять

$$K_{ij} = e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Таким образом, для системы (19) существование и ограниченность абсолютных к. ф. процесса $x_{n+1}, \ldots, x_m$ влечет за собой существование и ограниченность к. ф. $x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$.

Рассмотрим теперь нелинейную систему вида:

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + f(\sigma), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k, \qquad \sigma f(\sigma) > 0. \tag{22}$$

Как показано в работе (4), к виду (22) может быть приведена система уравнений, описывающих процесс в некоторых системах регулирования. Если учесть воздействие возмущений на систему (22), то она примет вид:

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + f(\sigma) + x_{n+i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k, \tag{23}$$

где λ_i приняты действительными с целью сокращения выкладок. Покажем, что развитая в работе (4) методика подбора параметров системы (22), при которых она была бы устойчивой при больших начальных отклонениях, обеспечивает также и принадлежность системы (22) к типу K-систем.

Для этого введем, как это сделано в работе (4), функцию v:

$$v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{\lambda_i + \lambda_j} a_i a_j.$$

Можно показать, что v будет положительно определенной квадратичной формой при любых действительных a_i и при $A_i \geqslant 0$. В силу уравнений (23), имеем:

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 +$$
$$+ f(\sigma)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \left(A_i + a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_i + \lambda_j} + \gamma_i\right)\right] - \sigma \cdot f(\sigma) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i x_i x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{\lambda_i + \lambda_j}(x_j x_{n+i} + x_i x_{n+j}).$$

Предположим, что нам удалось найти такие $A_i > 0$, что система уравнений

$$A_i + a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_i + \lambda_j} + \gamma_i = 0 \tag{24}$$

имеет действительные решения для a_i. В таком случае

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i |x_i| |x_{n+i}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{a_i a_j}{\lambda_i + \lambda_j} \right| (|x_i| |x_{n+i}| + |x_j| |x_{n+j}|),$$

откуда получаем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i x_i^2 + L \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_{n+i}| + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |x_j| \cdot |x_{n+1}| \right),$$

где

$$L = \sup \left(A_i, \frac{|a_i a_j|}{\lambda_i + \lambda_j} \right), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

В силу неравенства (21) имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i x_i^2 + L \left(\nu \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2 \right) +$$

$$+ 2L\nu n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2L \frac{n}{\nu} \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (A_i \lambda_i = L\nu - 2L\nu n) x_i^2 + \frac{L}{\nu} (1 + 2n) \sum_{i+1}^{n} x_{n+i}^2 . \qquad (25)$$

Пользуясь произволом ν, выберем эту величину настолько малой, чтобы форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (A_i \lambda_i - L\nu - 2L\nu n) x_i^2$$

была положительно определенной. После этого преобразуем формы v и Φ неособенным преобразованием $x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j$ к виду:

$$v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2.$$

Очевидно, что все $k_i > 0$, а тогда неравенство (25) запишется в виде:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 + \frac{L}{\nu} (1 + 2n) \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2 ,$$

откуда получаем:

$$v \leqslant \int_0^t e^{-k(t-s)} \frac{L}{\nu} (1 + 2n) \sum_{i=1}^{n} x_{n+i}^2 \, ds, \qquad (26)$$

где $k = \min (k_1, \ldots, k_n)$. Неравенство (26) и показывает, что наша система является K-системой, так как можно принять

$$K_{ij} = e^{-k(t-s)} \frac{L}{\nu} (1 + 2n).$$

Таким образом, если параметры системы (22) выбраны так, что при положительных A_i система (24) допускает действительные решения для a_i, то система (23) не только будет устойчива при больших возмущениях начальных данных, но случайный процесс $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n})$ будет иметь ограниченные абсолютные к. ф. при $0 \leqslant t \leqslant \infty$, если только случайный процесс $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$ имеет ограниченные абсолютные к. ф. при $0 \leqslant t \leqslant \infty$. При этом к. ф. процесса $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n})$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, если соответственно малы к. ф. процесса $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$, что весьма важно для практики.

Вопросы принадлежности систем к типу K-систем решаются в существенной связи со свойствами нелинейной части системы (12). Например, если в уравнении (17), которое, как указывалось ранее, при $\beta > 0$ не может быть K-системой, считать $\beta < 0$, то это уравнение будет частным случаем системы (19) и, следовательно, будет K-системой.

Таким образом, делать какие-либо заключения о рассеивании решений дифференциальных уравнений для больших t, если закон распределения $x_{n+1}, \ldots, x_m$ допускает сколь угодно большие значения, на основе анализа линейной системы первого приближения следует с большой осторожностью. При этом возможны не только количественно, но и качественно неверные выводы, на что часто обращается мало внимания. Следует отметить, что вопросы устойчивости движения при наличии случайных толчков рассматривались в другой постановке в работе [9], а устойчивость движения при случайных возмущениях начальных данных исследовалась в работах [10], [11], [12].

§ 4

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые свойства стационарных по времени процессов, которые имеют широкое приложение на практике.

Определение стационарного процесса дано в работах [2] и [7].

Мы используем несколько иное определение стационарного процесса. Именно, совокупность случайных функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ назовем стационарным случайным процессом, если:

1) каждая к. ф.

$$K_{x_1 \ldots x_n}(t_1, \ldots, t_n) = \text{м. о. } \{x_1(t_1)\, x_2(t_2) \ldots x_n(t_n)\} \tag{27}$$

зависит только от разностей $t_1 - t_n$, $t_2 - t_n, \ldots, t_{n-1} - t_n$;

2) м. о. $x_i(t) \equiv C_i$, где C_i — константы.

Если некоторый процесс является стационарным в смысле определения, приведенного в работах [2], [7], то, очевидно, будут выполнены и данные в настоящем параграфе условия стационарности. Справедливость обратного утверждения зависит от того, определяет ли заданная совокупность функций некоторый случайный процесс или нет (см. § 1).

Рассмотрим снова систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=n+1}^{m} b_{ik} x_k + \varphi_i \{x_j;\, x_k\} = F_i. \tag{28}$$

Используя терминологию теории колебаний, мы будем называть данную

систему автономной, поскольку a_{ij}, b_{ik} предполагаются постоянными, а φ_i — явно от времени не зависящими. Кроме того, будем считать выполненными условия 1 § 2 и условия замечания III § 2. В этом случае справедлива

ТЕОРЕМА II. *Среди решений системы* (28) *есть решение, являющееся стационарным случайным процессом, которое может быть представлено в виде ряда, сходящегося для* $0 \leqslant t \leqslant \infty$, *все члены которого в совокупности составляют некоторый стационарный случайный процесс, если только* $x_{n+1}, \ldots, x_m$ *образуют в совокупности стационарный процесс.*

Вместе с этим будет доказано, что и к. ф. представляются рядами, сходящимися при любых значениях аргументов.

Для доказательства указанного факта мы заметим, что если система первого приближения

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t |G_{ij}(t, s)|\, ds \leqslant K, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty,$$

то все корни уравнения

$$|a_{ij} - \lambda I| = 0$$

будут обязательно слева от мнимой оси.

Кроме того, для дальнейшего будет существенна следующая

ЛЕММА 1. *Пусть имеется некоторая система*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + P_i(t), \tag{29}$$

где a_{ij} *постоянны, функции* P_i *образуют стационарный процесс, а однородная система*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t,s)|\, ds \leqslant K, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

В таком случае среди решений системы (29) *имеется решение, являющееся стационарным процессом.*

В самом деле, для $\bar{x}_i$ мы получаем систему

$$\dot{\bar{x}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j + \bar{P}_i. \tag{30}$$

В силу того, что $\bar{P}_i$ постоянны, система (30) допускает решение:

$$\bar{x}_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots P_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots P_2 \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots P_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\operatorname{Det} \| a_{ij} \|}.$$

Далее,

$$K_{x_i x_j \ldots x_\omega} = \int_{m_i}^{t_i} \int_{m_j}^{t_j} \cdots \int_{m_\omega}^{t_\omega} G_i^p(t_i, s_i) G_j^q(t_j, s_j) \ldots K_{p\ldots r}(s_i, s_j \ldots s_\omega) ds_i \ldots ds_\omega.$$

Поскольку $K_{p\ldots r}(s_i, s_j, \ldots, s_\omega)$ есть функция, ограниченная при любых $s_i, s_j, \ldots, s_\omega$, то мы можем положить $m_i = m_j = \ldots = -\infty$, и $K_{x_i x_j \ldots x_\omega}$ будет все-таки существовать. Кроме того, в силу постоянства a_{ij} и стационарности случайного процесса $P_i(t)$,

$$G_i^p(t_i, s_i) = G_i^p(t_i - s_i), \quad G_j^q(t_j, s_j) = G_j^q(t_j - s_j), \ldots,$$
$$K_{p\ldots r}(s_i, s_j, \ldots, s_\omega) = K_{p\ldots r}(s_i + \tau, s_j + \tau, \ldots, s_\omega + \tau)$$

при любом τ. Легко видеть, что при этом

$$K_{x_i x_j \ldots x_\omega} =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_i} \int_{-\infty}^{t_j} \ldots \int_{-\infty}^{t_\omega} G_i^p(t_i - s_i) G_j^q(t_j - s_j) \ldots G_\omega^r(t_\omega - s_\omega) K_{pq\ldots r}(s_i, s_j, \ldots, s_\omega) ds_i ds_j \ldots ds_\omega$$

не изменится, если заменить t_i на $t_i + \tau$, t_j на $t_j + \tau$ и т. д. В самом деле,

$$K_{x_i x_j \ldots x_\omega}(t_i + \tau, t_j + \tau, \ldots, t_\omega + \tau) =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_i + \tau} \ldots \int_{-\infty}^{t_\omega + \tau} G_i^p(t_i + \tau - s_i) \ldots G_\omega^r(t_\omega + \tau - s_\omega) K_{pq\ldots r} ds_i \ldots ds_\omega.$$

Произведем замену переменных $s_i - \tau = u_i$, $s_j - \tau = u_j$ и т. д. Тогда

$$K_{x_i x_j \ldots x_\omega}(t_i + \tau, t_j + \tau, \ldots, t_\omega + \tau) =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_i + \tau} \ldots \int_{-\infty}^{t_\omega + \tau} G_i^p(t_i + \tau - s_i) \ldots G_\omega^r(t_\omega + \tau - s_\omega) K_{pq\ldots r} ds_i \ldots ds_\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_i \ldots t_\omega} \ldots \int G_i^p(t_i - u_i) G_j^q(t_j - u_j) \ldots G_\omega^r(t_\omega - u_\omega) K_{p\ldots r}(u_i + \tau, \ldots, u_\omega + \tau) du_i \ldots du_\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{t_i} \ldots \int^{t_\omega} G_i^p(t_i - u_i) G_j^q(t_j - u_j) \ldots G_\omega^r(t_\omega - u_\omega) K_{p\ldots r}(u_i, \ldots, u_\omega) du_i \ldots du_\omega =$$
$$= K_{x_i x_j \ldots x_\omega}(t_i, \ldots, t_\omega),$$

что и требовалось доказать. Совершенно аналогично можно показать, что вся совокупность функций $\{x_i, P_k\}$ образует в этом случае стационарный процесс.

Для доказательства теоремы[1] II рассмотрим систему (3), из которой определяются все к. ф. высоты 1. Для этой системы выполнены все условия леммы 1. В силу этого, мы можем утверждать, что среди решений системы (3) есть решения, образующие стационарный процесс.

Далее, легко видеть, что если некоторая система функций $f_k(t)$ образует стационарный случайный процесс, то произвольный полином относительно f_k с постоянными коэффициентами также будет стационарным случайным процессом.

Если теперь рассмотреть систему (4), из которой могут быть найдены к. ф. высоты 2, то мы заметим, что и эта система удовлетворяет условиям леммы 1.

Необходимо только подставлять в правые части данной системы к. ф., найденные при помощи системы (3). Поэтому можно заключить, что и x_{i2} также образуют стационарный процесс. Кроме того, x_{i2} образуют стационарый процесс в совокупности с x_{i1} и $x_k (k = n+1, \ldots, m)$.

Точно так же можно показать, что и вообще все $x_{i\sigma}$ образуют в совокупности стационарный случайный процесс. Отсюда следует, что

$$x_i = \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{i\sigma}$$

также образуют стационарный случайный процесс. Более того, x_i образуют стационарный процесс в совокупности с $x_k (k = n+1, \ldots, m)$.

Отметим, что самый факт существования стационарного процесса среди решений системы (28) может быть доказан при гораздо более широких предположениях.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову за ценные советы и указания, которые я использовал при написании настоящей работы.

Поступило
14. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.

[2] Колмогоров А. Н., Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром, Юбилейный сборник Акад. наук СССР, посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции, т. 1 (1947), 242—251.

[3] Малкин И. Г., Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях, Прикл. мат. и мех., т. 8 (1944), 241—249.

[4] Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи автоматического регулирования, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

[5] Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Автоматика и телемеханика, № 4 (1953), 375—391.

[6] Слуцкий Е. Е., О связанных случайных функциях одной независимой переменной, Труды первого Всесоюзного съезда математиков (1930), 347—357.

[7] Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных процессов, Успехи матем. наук, т. V (1938), 42—51.

[8] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, М.—Л., 1946.

[9] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Витт А., О статистическом рассмотрении динамических систем, Журнал экспер. и теорет. физики, № 3, вып. 3 (1933), 17—32.

[10] Моисеев Н. Д., Über Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr., 42 (1937), 513—537.

[11] Моисеев Н. Д., О вероятности устойчивости по Ляпунову, Доклады Ак. наук СССР, 1 (1936), 211—213.

[12] Степанов В. В., К определению вероятности устойчивости, Доклады Ак. наук СССР, 18 (1938), 151—154

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 33—52

Ф. Д. ГАХОВ и Ю. И. ЧЕРСКИЙ

ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

(*Представлено академиком* В. И. Смирновым)

Решаются два вида парных интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности аргументов. Предполагается, что ядра и искомые функции имеют определенного вида показательные оценки. Путем сведения к краевой задаче Римана для аналитических функций дается решение уравнений в замкнутой форме.

§ 1. Введение

Во многих вопросах математической физики (теория лучистого равновесия, автоматическое управление и т. п.) встречается интегральное уравнение с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$f(x)+\int_0^\infty k(x-t)\,f(t)\,dt=g(x),\quad x>0. \tag{1}$$

Это уравнение принадлежит к особым уравнениям типа свертки, которые изучаются при помощи преобразования Фурье. В противоположность более простым особым уравнениям, в которых интегрирование ведется в пределах $(-\infty, \infty)$ или $(0, x)$ и которые преобразованием Фурье сводятся к линейному алгебраическому уравнению, уравнение (1) тем же преобразованием приводится к задаче Римана теории аналитических функций, полное решение которой было дано в работе [1] в 1936 г., т. е. уже после первых шагов в решении уравнения (1). В 1931 г. Гопф и Винер [2] решили однородное уравнение (1). Исходя из потребностей практики, они предполагали, что ядро $k(x)$ имеет на бесконечности убывание показательного порядка, а искомая функция $f(x)$ — рост соответственного порядка.

Если в формулах преобразования Фурье считать переменную комплексной, то это означает, что преобразование $K(z)$ ядра имеет полосу голоморфности, а обобщенные преобразования Фурье $F^+(z)$ и $F^-(z)$ искомой функции имеют полуплоскости голоморфности, разделенные полосой, в которой $F^+(z)$ и $F^-(z)$ не голоморфны. Гопф и Винер получили линейное соотношение между этими двумя искомыми аналитическими функциями того же типа, что и краевая задача Римана, но с тем различием, что оно должно выполняться в некоторой полосе. Задачу такого рода, возникающую всякий раз, когда ядра и искомые функции имеют на бес-

конечности убывание или рост показательного порядка, мы назвали «площадной» [см. ([12])].

Решение неоднородного уравнения было дано схематически Рейснером ([3]) в 1941 г. и, независимо, В. А. Фоком ([4]) в 1942 г., однако их способы решения, не использующие теории задачи Римана, были громоздки.

Наконец, в 1948 г. И. М. Рапопорт ([5]) установил непосредственную связь уравнения (1) с задачей Римана. Решение уравнения приобрело предельную простоту и по сравнению с методом Гопфа и Винера имело то преимущество, что не требовало отыскания нулей некоторой аналитической функции.

При изучении уравнения (1), а также некоторых других особых уравнений, большое значение имеет предварительная «подготовка» уравнения к преобразованию Фурье. Для уравнения (1) эта «подготовка» заключается в доопределении функций некоторыми соотношениями для отрицательных значений аргумента. Эти соотношения, как нетрудно показать, не влияют на решение $f(x)$ при $x>0$ и вводятся для того, чтобы преобразуемые по Фурье функции были заданы на всей вещественной оси. «Подготовка» уравнения (1) велась по-разному. Гопф и Винер предполагали, что уравнение (1) имеет место для всех вещественных x и на $f(x)$ никаких дополнительных условий не накладывали. В. А. Фок также считал уравнение (1) справедливым для всех вещественных x, но, налагая на искомую функцию условие $f(x)\equiv 0$ при $x<0$, он несколько усложнил вопрос, так как тогда неизвестным становился свободный член. И. М. Рапопорт тоже принимал $f(x)\equiv 0$ для $x<0$, но не требовал выполнения условия (1) при отрицательных x. Это позволило ему не только упростить решение, но и рассмотреть общее «парное» уравнение

$$\left.\begin{aligned} f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt=g(x), \qquad 0<x<\infty,\\ f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)f(t)\,dt=g(x), \qquad -\infty<x<0, \end{aligned}\right\} \tag{Б}$$

решенное им [см. ([6])] в классе исчезающих на бесконечности функций. «Парные» уравнения давно встречались в практических вопросах. Один пример такого рода (отыскание потенциала наэлектризованного диска) был решен частными приемами Басбриджем ([7]).

Как указал И. М. Рапопорт, рассмотрение уравнения (1) в классе решений, имеющих на бесконечности рост показательного порядка, не вызывает дополнительных трудностей по сравнению с решением в классе исчезающих функций. Дело сводится к простому умножению уравнения (1) на $e^{-\lambda x}$. Однако легко видеть, что этот прием уже не пригоден при рассмотрении уравнения (Б) в классе функций с показательным порядком роста на бесконечности.

В настоящей работе рассматривается уравнение (Б), а также связанное с ним уравнение

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)f(t)\,dt=g(x)\ (-\infty<x<\infty) \tag{А}$$

при широких предположениях относительно классов решений. Трудность вопроса заключается в изучении поведения на бесконечности входящих в уравнения (А) и (Б) функций, а также в предварительной «подготовке» этих уравнений, которая будет заключаться во введении вспомогательных функций и изменении формы уравнений перед преобразованием Фурье. Последнее естественным образом приводит решение особых уравнений к решению «площадных» задач. Авторы использовали этот метод для решения простейших случаев (для однородных уравнений, для случая I) уравнения (А) и случая II) уравнения (Б)) [см. ([12])].

Однако при рассмотрении общих случаев встречаются непреодолимые затруднения в определении класса искомых функций, являющихся решением площадной задачи (характер и положение особенностей). В настоящей работе мы использовали новый метод, до сих пор еще не применявшийся, — приведение к краевой задаче Римана для сложного контура.

В зависимости от расположения полос аналитичности преобразованных функций возникает ряд случаев. Роль играют:

1) взаимное расположение полуплоскостей аналитичности обобщенных преобразований Фурье $F^+(z)$ и $F^-(z)$ искомых функций;

2) взаимное расположение полос аналитичности преобразований Фурье $K_1(z)$ и $K_2(z)$ ядер интегрального уравнения.

Исследование показывает, что для уравнения (А) существенное значение имеет расположение полуплоскостей голоморфности $F^+(z)$ и $F^-(z)$, в связи с чем приходится рассматривать два случая:

I) полуплоскости не имеют общей полосы ($b_1 > a_2$);

II) полуплоскости имеют общую полосу ($b_1 < a_2$) (см. § 3).

Для уравнения (Б) существенное значение имеет расположение полос голоморфности $K_1(z)$ и $K_2(z)$, и здесь приходится различать три случая:

I) полосы не имеют общей части, и полоса для K_1 лежит ниже полосы для K_2 ($b_1 < a_2$);

II) полосы имеют общую часть ($\min[b_1, b_2] > \max[a_1, a_2]$);

III) полосы не имеют общей части, и полоса для K_1 лежит выше полосы для K_2 ($a_1 > b_2$).

Для большей ясности читателю рекомендуется вычертить все эти случаи расположения.

Самыми простыми являются случаи I) для уравнений обоих типов. Преобразование Фурье приводит здесь к краевой задаче Римана для сложного контура, состоящего из двух параллельных прямых. Случай II) уравнения (Б) после ряда преобразований также последовательно сводится к двум задачам Римана для сложного контура. Все перечисленные случаи решаются в общем виде до конца. Случаи II) для уравнения (А) и III) для уравнения (Б) приводятся к решению краевых задач более сложного характера, способы решения которых неизвестны. Здесь мы накладываем на ядра дополнительные ограничения, позволяющие свести решение к нормальным случаям задачи Римана, и при этих предположениях решаем задачу до конца.

Для удобства дальнейшего изложения в § 2 приводится ряд простых вспомогательных предложений относительно свойств функций, обладаю-

щих на бесконечности показательными оценками, а также воспроизводится решение задачи Римана для сложного контура.

§ 2. Предварительные сведения

1. Если $f(x)$ такова, что

$$f(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta, \tag{2.1}$$

то ее преобразование Фурье

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt} dt .$$

будет аналитической функцией в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ и исчезающей на бесконечности [см. ([8]), стр. 173]. Это свойство функции $F(z)$ сохранится и в том случае, если в условии (2.1) L^2 заменить на L. Формула обратного преобразования имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} F(\zeta) e^{-ix\zeta} d\zeta, \quad \alpha \leqslant c \leqslant \beta.$$

2. Пусть

$$f(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta,$$
$$k(x)e^{-\gamma x} \in L\ (-\infty, \infty), \quad a \leqslant \gamma \leqslant b.$$

Если отрезки $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$ имеют общую точку c, то существует «свертка» функций $f(x)$ и $k(x)$, причем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t) f(t)\, dt \cdot e^{-cx} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Обозначим часто встречающуюся в операционном исчислении «единичную функцию» через

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Условимся другие функции, тождественно равные нулю при $x < 0\ (x > 0)$, обозначать при помощи индексов $+$ и $-$, проставленных внизу, например,

$$\eta_1(x) f(x) = f_+(x), \quad -\eta_1(-x) f(x) = f_-(x),$$
$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

3. Если

$$f_-(x) e^{-cx} \in L^2(-\infty, \infty),$$

то, очевидно,

$$f_+(x) e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty) \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant c.$$

Аналогично, из того, что

$$f(x) e^{-cx} \in L^2(-\infty, \infty),$$

следует:

$$f_-(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad y \leqslant c.$$

4. Пусть

$$f_1(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad a_1 \leqslant y \leqslant b_1,$$
$$f_2(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad a_2 \leqslant y \leqslant b_2.$$

Тогда если $a = \max(a_1,\ a_2) \leqslant b = \min(b_1,\ b_2)$, то

$$[f_1(x) + f_2(x)]\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

5. Если

$$f(x)\,e^{-ax} \in L^2(-\infty,\ \infty) \quad \text{и} \quad f(x)\,e^{-bx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad b > a,$$

то

$$f(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad a \leqslant y \leqslant b. \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$f_+(x) = \eta_1(x)\,f(x), \quad f_-(x) = -\eta(-x)\,f(x).$$

Так как

$$f_+(x)\,e^{-ax} \in L^2(-\infty,\ \infty) \quad \text{и} \quad f_-(x)\,e^{-bx} \in L^2(-\infty,\ \infty),$$

то, согласно п. 3,

$$f_+(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad y \geqslant a,$$
$$f_-(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad y \leqslant b.$$

Но $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, и утверждение (2.2) становится очевидным.

Это простое свойство заменит нам используемую ([8]) теорему (стр. 329).

6. Если $f(x)$ такова, что $(f = f_+ - f_-)$

$$f_+(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad y \geqslant b,$$
$$f_-(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad y \leqslant a,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} F^+(\zeta)\,e^{-ix\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} F^-(\zeta)\,e^{-ix\zeta}\,d\zeta,$$

где

$$F^+(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_+(t)\,e^{i\zeta t}dt, \quad F^-(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_-(t)\,e^{i\zeta t}dt$$

[см. ([8]), стр. 12]. Функции $F^+(\zeta)$ и $F^-(\zeta)$, согласно п. 1, аналитически продолжимы в полуплоскости $\operatorname{Im} z > a$ и $\operatorname{Im} z < a$ соответственно и исчезают на бесконечности.

Кроме вышеперечисленных свойств, нам часто придется ссылаться на краевую задачу Римана для контура, состоящего из двух параллельных прямых, решение которой, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям, мы ниже воспроизводим, опираясь на работу ([9]).

Формулируем задачу: определить кусочноголоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi^+(\zeta) = A(\zeta)\,\Phi^-(\zeta) + B(\zeta) \tag{2.3}$$

на контуре γ, состоящем из прямых $\operatorname{Im}\zeta = \beta$ и $\operatorname{Im}\zeta = \alpha\,(\beta > \alpha)$, и дополнительным условиям:

$$\left.\begin{gathered}\frac{d^j}{dz^j}\Phi(z)\Big|_{z=z_k} = C_{jk}\\ (j = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1,\ \alpha < \operatorname{Im} z_k < \beta,\ k = 1, \ldots, n),\\ \Phi(\infty) = 0.\end{gathered}\right\} \tag{2.4}$$

$A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — заданные функции точек линии γ. $B(\xi) \in L^2$. Относительно $A(\zeta)$ будем предполагать, что эта функция удовлетворяет условию Гёльдера и не обращается в нуль. Без ограничения общности можно считать, что $A(\infty) = 1$.

Обычно в задаче Римана исключительной точкой, в которой у канонической функции допустимы нули или полюсы, является бесконечно удаленная точка. Ввиду того что наш контур проходит через эту точку, мы будем считать исключительной точку $-i\lambda$, $\lambda > \max(\beta, -\alpha)$. Каноническая функция однородной задачи имеет вид [см. (9)]:

$$X(z) = \left(\frac{z - i\beta}{z + i\lambda}\right)^{-\varkappa_1}\left(\frac{z - i\alpha}{z + i\lambda}\right)^{-\varkappa_2}\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\ln A(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

$$\varkappa_1 = \operatorname{ind} A(x + i\beta), \quad \varkappa_2 = \operatorname{ind} A(x + i\alpha).$$

Под $\ln A(x - i\beta)$ и $\ln A(x + i\alpha)$ понимаются однозначные функции, исчезающие на бесконечности и имеющие при отличных от нуля $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ разрывы при $x = 0$.

Преобразуем, пользуясь канонической функцией, краевое условие (2.3):

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)} = \frac{\Phi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)} + \frac{B(\zeta)}{X^-(\zeta)}. \tag{2.5}$$

Полученный свободный член берем в качестве плотности интеграла типа Коши:

$$B_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{B(\zeta)}{X^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Для того чтобы построить функцию, аналогичную так называемой канонической функции неоднородной задачи [см. (10), стр. 71], введем многочлен $Q_{\nu-1}(z)$ степени не выше $\nu - 1$ и такой, что

$$\frac{d^j}{dz^j}\left\{X(z)\left[B_1(z) - \frac{Q_{\nu-1}(z)}{(z + i\lambda)^\nu}\right]\right\}_{z=z_k} = C_{jk}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1;\quad k = 1, \ldots, n;\quad \nu = \nu_1 + \ldots + \nu_n).$$

Как известно, такой многочлен всегда существует и единственен [см., например, (10), стр. 73. В этой работе дан явный вид этого многочлена].

Преобразуем краевое условие (2.5):

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)} - \left[B_1(\zeta) - \frac{Q_{\nu-1}(\zeta)}{(\zeta + i\lambda)^\nu}\right] = \frac{\Phi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)} - \left[B_1(\zeta) - \frac{Q_{\nu-1}(\zeta)}{(\zeta + i\lambda)^\nu}\right]. \tag{2.6}$$

Если $\varkappa - \nu > 0$ ($\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$), то, используя аналитическое продолжение и обобщенную теорему Лиувилля, из (2.6) получаем общее решение

$$\Phi(z) = X(z)\left[B_1(z) - \frac{Q_{\nu-1}(z)}{(z+i\lambda)^{\nu}}\right] + X(z)\frac{P_{\varkappa-\nu-1}(z)\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)^{\nu_k}}{(z+i\lambda)^{\varkappa}}, \quad (2.7)$$

где $P_{\varkappa-\nu-1}(z)$ — многочлен степени $\varkappa - \nu - 1$ с произвольными коэффициентами.

Если $\varkappa - \nu \leqslant 0$, то аналитическое продолжение и обобщенная теорема Лиувилля приводят к заключению, что левая и правая части (2.6) тождественно равны нулю, т. е.

$$\Phi(z) = X(z)\left[B_1(z) - \frac{Q_{\nu-1}(z)}{(z+i\lambda)^{\nu}}\right]. \quad (2.8)$$

При $\varkappa < \nu$ определяемая формулой (2.8) функция $\Phi(z)$ будет, вообще говоря, иметь в точке $-i\lambda$ полюс порядка $\nu - \varkappa$. Для того чтобы (2.8) было решением задачи, необходимо наложить на свободный член $B(\zeta)$ $\nu - \varkappa$ условий:

$$\frac{d^j}{dz^j}[B_1(z)(z+i\lambda)^{\nu} - Q_{\nu-1}(z)]_{z=-i\lambda} = 0 \quad (j = 0, \ldots, \nu - \varkappa - 1). \quad (2.9)$$

§ 3. Уравнение (A)

В этом параграфе будем рассматривать уравнение вида

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)f(t)dt = g(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (3.1)$$

Ядра $k_1(x)$ и $k_2(x)$ этого уравнения таковы, что

$$\begin{aligned} &k_1(x)e^{-\gamma x} \in L(-\infty, \infty), \quad a_1 \leqslant \gamma \leqslant b_1, \\ &k_2(x)e^{-\gamma x} \in L(-\infty, \infty), \quad a_2 \leqslant \gamma \leqslant b_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дополнительные ограничения на ядра будут наложены ниже. Решение

$$f(x) \equiv f_+(x) - f_-(x)$$

будем искать в наиболее широком классе функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &f_+(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \geqslant \beta, \\ &f_-(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \leqslant \alpha. \end{aligned}$$

Для определения этого класса нужно взять точную верхнюю (нижнюю) грань значений $\beta(\alpha)$, при которых интегралы в уравнении (3.1) существуют. Используя п. 2 § 2, находим:

$$\sup \beta = b_1, \quad \inf \alpha = a_2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} &f_+(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \geqslant b_1, \\ &f_-(x)e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \leqslant a_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Установим максимально широкий класс, которому может принадлежать свободный член. С этой целью рассмотрим операторы

$$T_1 f_+ \equiv f_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t) f_+(t)\,dt,$$

$$T_2 f_- \equiv f_-(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t) f_-(t)\,dt.$$

Исходя из (3.2) и (3.3) и учитывая п.п. 2 и 4 § 2, найдем:

$$T_1 f_+ \cdot e^{-b_1 x} \in L^2(-\infty,\ \infty), \quad T_2 f_- \cdot e^{-a_1 x} \in L^2(-\infty,\ \infty), \tag{3.4}$$

откуда, согласно п 3 § 2,

$$\left.\begin{aligned} \eta_l(x)\, T_1 f_+ \cdot e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \geqslant b_1, \\ \eta_l(x)\, T_2 f_- \cdot e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \geqslant a_2, \\ \eta_l(-x)\, T_1 f_+ \cdot e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \leqslant b_1, \\ \eta_l(-x)\, T_2 f_- \cdot e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \leqslant a_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Замечая, что уравнению (3.1) можно придать форму

$$T_1 f_+ - T_2 f_- = g(x) \equiv g_+(x) - g_-(x),$$

будем иметь:

$$g_+(x) = \eta_l(x)\, T_1 f_+ - \eta_l(x)\, T_2 f_-, \quad g_-(x) = -\eta_l(-x)\, T_1 f_+ + \eta_l(-x) T_2 f_-.$$

Отсюда, на основании (3.5) и п. 4 § 2, получаем:

$$\left.\begin{aligned} g_+(x)\, e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \geqslant b_1, \\ g_-(x)\, e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \geqslant a_2 \end{aligned}\right\} \text{ в случае } b_1 \geqslant a_2, \tag{3.6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} g_+(x)\, e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \geqslant a_2, \\ g_-(x)\, e^{-\gamma x} &\in L^2(-\infty,\ \infty), \quad \gamma \leqslant b_1 \end{aligned}\right\} \text{ в случае } b_1 < a_2. \tag{3.7}$$

Из вышеизложенного следует, что классы решений и свободных членов не зависят от постоянных b_2 и a_1, а зависят лишь от постоянных b_1 и a_2. Полученные выше два случая ($b_1 \geqslant a_2$ и $b_1 < a_2$), как будет видно, существенно различны.

Заметим, что при $b_1 = a_2$ вместо (3.3) и (3.6) мы имеем просто

$$f(x)\, e^{-b_1 x} \in L^2, \quad g(x)\, e^{-b_1 x} \in L^2.$$

В этом случае умножение уравнения (3.1) на $e^{-b_1 x}$ приводит к уравнению, уже рассмотренному в работе ([11]). Ввиду этого случай $b_1 = a_2$ мы из рассмотрения исключаем.

I) Случай $b_1 > a_2$. Как уже отмечалось во введении, важным этапом в решении уравнения является изменение его формы перед преоб-

разованием Фурье, его предварительная «подготовка» к преобразованию. В данном случае целесообразно представить уравнение (3.1) в виде

$$T_1 f_+ - g_+ = T_2 f_- - g_- = \omega(x), \tag{3.8}$$

удобном для использования свойства п. 5 § 2, согласно которому

$$\omega(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad a_2 \leqslant y \leqslant b_1. \tag{3.9}$$

Последнее вытекает из свойств

$$\omega(x)\, e^{-b_1 x} \in L^2(-\infty, \infty) \text{ и } \omega(x)\, e^{-a_2 x} \in L^2(-\infty, \infty),$$

которые легко вывести из (3.4), (3.6) и п. 4 § 2. Умножая первую и третью (вторую и третью) части равенства (3.8) на $e^{-b_1 x}$ ($e^{-a_2 x}$) и преобразуя по Фурье, получим:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x + ib_1)]\, F^+(x + ib_1) - G^+(x + ib_1) &= \Omega(x + ib_1), \\ [1 + K_2(x + ia_2)]\, F^-(x + ia_2) - G^-(x + ia_2) &= \Omega(x + ia_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Неизвестные функции $F^+(x + ib_1)$, $F^-(x + ia_2)$, $\Omega(x + ib_1)$ и $\Omega(x + ia_2)$ будут, согласно п. 1 § 2, предельными значениями исчезающих на бесконечности функций $F^+(z)$, $F^-(z)$ и $\Omega(z)$, причем, ввиду (3.3), функция $F^+(z)$ аналитична при $b_1 < \operatorname{Im} z$, функция $F^-(z)$ — при $\operatorname{Im} z < a_2$, а ввиду (3.9), функция $\Omega(z)$ аналитична при $a_2 < \operatorname{Im} z < b_1$.

Таким образом, задача (3.10) отыскания функций $F^+(z)$, $F^-(z)$ и $\Omega(z)$ есть краевая задача Римана (2.3), рассмотренная в § 2. При этом в задаче (2.3) следует считать:

$$\beta = b_1, \quad \alpha = a_2, \quad \nu = 0,$$

$$A(x + i\beta) = [1 + K_1(x + ib_1)]^{-1}, \quad A(x + i\alpha) = 1 + K_2(x + ia_2),$$

$$B(x + i\beta) = G^+(x + ib_1)\,[1 + K_1(x + ib_1)]^{-1}, \quad B(x + i\alpha) = -G^-(x + ia_2),$$

$$\Phi^+(x + i\beta) = F^+(x + ib_1), \quad \Phi^+(x + i\alpha) = \Omega(x + ia_2),$$

$$\Phi^-(x + i\beta) = \Omega(x + ib_1), \quad \Phi^-(x + i\alpha) = F^-(x + ia_2).$$

Из однозначной обратимости преобразований Фурье следует эквивалентность исходного уравнения (3.1) и задачи Римана (2.3) в том смысле, что их общие решения соответствуют друг другу.

В связи с наложенными в § 2 на $A(\zeta)$ условиями будем считать, что $1 + K_1(x + ib_1)$ и $1 + K_2(x + ia_2)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль *.

Формулируем результат: пусть

$$\varkappa = \operatorname{ind}[1 + K_2(x + ia_2)] - \operatorname{ind}[1 + K_1(x + ib_1)].$$

* Эти условия можно расширить на случай обращения в нуль или разрывов первого рода в конечном числе точек [см., например, (10)].

Тогда при $\varkappa > 0$ уравнение (3.1) имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений. При $\varkappa = 0$ уравнение имеет единственное решение, тривиальное при $g \equiv 0$. При $\varkappa < 0$ однородное уравнение (3.1) неразрешимо; неоднородное уравнение имеет единственное решение, если удовлетворяются $-\varkappa$ условий разрешимости (2.9). Во всех случаях, когда решение уравнения (3.1) существует, оно находится по формуле (см. п. 6 § 2):

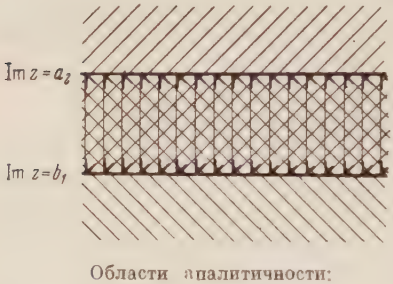
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty} \Phi^+(\zeta) e^{-ix\zeta}\, d\zeta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty} \Phi^-(\zeta) e^{-ix\zeta}\, d\zeta,$$

где $\Phi^+(\zeta)$ и $\Phi^-(\zeta)$ определяются из (2.7) или (2.8).

II) Случай $b_1 < a_2$. В этом случае уравнение (3.1) для «подготовки» к преобразованию Фурье следует представить в виде

$$T_1 f_+ + g_- = T_2 f_- + g_+ = \omega(x), \quad (3.11)$$

который отличается от (3.8) вследствие различия классов (3.6) и (3.7). Согласно п. 5 § 2,



$$\omega(x) e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad b_1 \leqslant \gamma \leqslant a_2. \quad (3.12)$$

Аналогично случаю I), умножая подходящие равенства (3.11) на e^{-bx}, или e^{-ax} и преобразуя по Фурье, получим:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x + ib_1)]\, F^+(x + ib_1) + G^-(x + ib_1) &= \Omega(x + ib_1), \\ [1 + K_2(x + ia_2)]\, F^-(x + ia_2) + G^+(x + ia_2) &= \Omega(x + ia_2). \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Неизвестные функции $F^+(x + ib_1)$, $F^-(x + ia_2)$, $\Omega(x + ib_1)$ и $\Omega(x + ia_2)$ будут, согласно п. 1 § 2, предельными значениями исчезающих на бесконечности функций $F^+(z)$, $F^-(z)$ и $\Omega(z)$, причем ввиду (3.3) функция $F^+(z)$ аналитична при $b_1 < \operatorname{Im} z$, $F^-(z)$ — при $\operatorname{Im} z < a_2$, а ввиду (3.12) функция $\Omega(z)$ аналитична при $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$.

Формулируем полученную краевую задачу: найти функции $F^+(z)$, $F^-(z)$ и $\Omega(z)$, аналитические в указанных выше областях, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре $\operatorname{Im} z = b_1$, $\operatorname{Im} z = a_2$ краевому условию (3.13). Эта задача, эквивалентная исходному уравнению (3.1), существенно отличается от задачи Римана тем, что здесь в краевом условии (3.13) фигурируют неизвестные функции, аналитические по одну сторону контура (см. рисунок).

Решение задачи (3.13) в общем случае нам неизвестно. В частном случае, когда функции $K_1(x + ib_1)$ и $K_2(x + ia_2)$ продолжимы внутрь полосы $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$, причем функции $K_1(z)$ и $K_2(z)$ имеют в полосе

лишь полярные особенности, задачу (3.13) можно решить прежним методом, сведя ее к задаче Римана. Мы ограничимся этим случаем.

Ниже будет видно, что важную роль играет взаимное расположение в полосе нулей функций $1 + K_1(z)$ и $1 + K_2(z)$. Эти нули будем обозначать через z_k, а их кратности — через ν_k, причем индексам $k = 1, \ldots, n_1$ отвечают все нули функции $1 + K_1(z)$, индексам $k = n_1 + 1, \ldots, n_2$ — все нули функции $1 + K_2(z)$, а индексами $k = n_2 + 1, \ldots, n_3$ мы дополнительно выделяем общие нули этих функций. Отметим необходимые условия разрешимости задачи, вытекающие из (3.13):

1) $G^+(x + ia_2)$ продолжимо на полосу $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$, причем $G^+(z)$ может иметь полюсы лишь в тех точках, где их имеет $K_2(z)$, и порядки полюсов $G^+(z)$ не должны превышать порядков соответствующих полюсов $K_2(z)$.

2) $G^-(x + ib_1)$ продолжимо на полосу $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$, причем $G^-(z)$ может иметь полюсы лишь в тех точках, где их имеет $K_1(z)$, и порядки полюсов $G^-(z)$ не должны превышать порядков соответствующих полюсов $K_1(z)$.

3) В точках, где $1 + K_1(z)$ и $1 + K_2(z)$ имеют общие нули,

$$\left.\frac{d^j}{dz^j} G^+(z)\right|_{z=z_k} = \left.\frac{d^j}{dz^j} G^-(z)\right|_{z=z_k} \qquad (3.14)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1, \ k = n_2 + 1, \ldots, n_3).$$

Будем считать условия 1)—3) выполненными. Путем аналитического продолжения из (3.13) получим:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x + ia_2)]\, F^+(x + ia_2) + G^-(x + ia_2) &= \Omega(x + ia_2), \\ [1 + K_2(x + ib_1)]\, F^-(x + ib_1) + G^+(x + ib_1) &= \Omega(x + ib_1). \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

Условие (3.15) есть уже краевое условие задачи Римана. На решение этой задачи следует наложить ряд условий. Дело в том, что, решая задачу Римана (3.15) без дополнительных условий, мы получим функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, которые, вообще говоря, не будут аналитическими в полосе $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$. Действительно, записывая краевые условия (3.15) в форме

$$F^+(x + ia_2) = \frac{\Omega(x + ia_2) - G^-(x + ia_2)}{1 + K_1(x + ia_2)},$$

$$F^-(x + ib_1) = \frac{\Omega(x + ib_1) - G^+(x + ib_1)}{1 + K_2(x + ib_1)},$$

мы видим, что $F^+(z)$ может иметь полюсы в точках z_k, где $k = 1, \ldots, n_1$, а $F^-(z)$ — в точках z_k, где $k = n_1 + 1, \ldots, n_2$. Для того чтобы получить решение задачи (3.13), необходимо эти полюсы устранить. Отсюда следуют условия:

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{d^j}{dz^j}\Omega(z)\right|_{z=z_k} &= \left.\frac{d^j}{dz^j} G^-(z)\right|_{z=z_k} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1 \\ k = 1, \ldots, n_1 \end{pmatrix}, \\ \left.\frac{d^j}{dz^j}\Omega(z)\right|_{z=z_k} &= \left.\frac{d^j}{dz^j} G^+(z)\right|_{z=z_k} \quad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1 \\ k = n_1 + 1, \ldots, n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

Таким образом, совокупность условий (3.15) и (3.16) есть задача Римана (2.3), где

$$\beta = a_2, \quad \alpha = b_1,$$

$$\left.\begin{array}{ll} A(x+i\beta) = [1+K_1(x+ia_2)]^{-1}, & A(x+i\alpha) = 1+K_2(x+ib_1), \\ B(x+i\beta) = -G^{-}(x+ia_2)[1+K_1(x+ia_2)]^{-1}, & B(x+i\alpha) = G^{-}(x+ib_1), \\ \Phi^{-}(x+i\alpha) = \Omega(x+ib_1), & \Phi^{-}(x+i\beta) = \Omega(x+ia_2), \\ \Phi^{+}(x+i\beta) = F^{+}(x+ia_2), & \Phi^{-}(x+i\alpha) = F^{-}(x+ib_1). \end{array}\right\} \quad (3.17)$$

Условия (3.14) и (3.16) дают $\nu_1 + \cdots + \nu_{n_2} - \nu_{n_1+1} - \cdots - \nu_{n_3}$ условий (2.4), где

$$C_{jk} = \begin{cases} \left.\dfrac{d^j}{dz^j} G^{-}(z)\right|_{z=z_k} & (j=0,\ldots,\nu_k-1, \quad k=1,\ldots,n_1), \\ \left.\dfrac{d^j}{dz^j} G^{+}(z)\right|_{z=z_k} & (j=0,\ldots,\nu_k-1, \quad k=n_1+1,\ldots,n_2). \end{cases}$$

В связи с наложенными в § 2 на $A(\zeta)$ ограничениями будем считать, что $1+K_1(x+ia_2)$ и $1+K_2(x+ib_1)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль.

Формулируем результат: пусть

$$\varkappa = \operatorname{ind}[1+K_2(x+ib_1)] - \operatorname{ind}[1+K_1(x+ia_2)],$$

ν — разность числа всех нулей функций $1+K_1(z)$ и $1+K_2(z)$ в полосе $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$ и числа общих нулей этих функций в полосе. Тогда при $\varkappa > \nu$ уравнение (3.1) имеет $\varkappa - \nu$ линейно независимых решений. При $\varkappa = \nu$ уравнение имеет единственное решение, тривиальное при $g \equiv 0$. При $\varkappa < \nu$ однородное уравнение (3.1) неразрешимо; неоднородное уравнение имеет единственное решение, если удовлетворяются $\nu - \varkappa$ условий разрешимости (2.9). Во всех случаях, когда решение уравнения (3.1) существует, оно находится по формуле (см. п. 1 § 2):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} [F^{+}(\zeta) - F^{-}(\zeta)]\, e^{-ix\zeta} d\zeta, \quad b_1 \leqslant c \leqslant a_2,$$

где $F^{+}(\zeta)$ и $F^{-}(\zeta)$, в соответствии с (3.17), определяются из (2.7) или (2.8).

§ 4. Уравнение (Б)

Рассмотрим «парное» уравнение класса (Б):

$$\left.\begin{array}{l} T_1 f \equiv f(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t) f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x < \infty, \\ T_2 f \equiv f(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t) f(t)\, dt = g(x), \quad -\infty < x < 0. \end{array}\right\} \quad (4.1)$$

Здесь ядра $k_1(x)$ и $k_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k_j(x)e^{-yx} \in L(-\infty, \infty), \quad a_j \leqslant y \leqslant b_j, \quad j = 1, 2. \tag{4.2}$$

Дополнительные ограничения на классы ядер будут наложены ниже. Решение $f \equiv f_+ - f_-$ будем искать в наиболее широком классе функций, удовлетворяющих условиям

$$f_+(x)^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant \beta; \quad f_-(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant \alpha.$$

Для определения этого класса нужно среди чисел β, при которых одновременно существуют интегралы

$$\int_0^\infty k_1(x-t)f(t)\,dt, \quad \int_0^\infty k_2(x-t)f(t)\,dt,$$

найти максимальное. Используя п. 2 § 2, нетрудно установить, что таким числом будет $\min(b_1, b_2)$. Аналогично рассуждая, находим среди чисел α наименьшее: $\max(a_1, a_2)$. Итак,

$$\begin{aligned} &f_+(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant b = \min(b_1, b_2), \\ &f_-(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant a = \max(a_1, a_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

В противоположность классу (3.3) решений уравнения (3.1), где этот класс характеризовался только постоянными b_1 и a_2, в характеристике класса (4.3) уравнения (4.1) могут участвовать постоянные a_1, a_2, b_1, b_2. В связи с этим число подлежащих рассмотрению случаев увеличивается. Существенно отличными оказываются три случая: $b_1 < a_2$, $b \geqslant a$, $b_2 < a_1$.

I) Случай $b_1 < a_2$. Установим прежде всего наиболее широкий класс, которому может принадлежать свободный член. Отправляясь от (4.2) и (4.3), ввиду пп. 2 и 4 § 2, получаем:

$$T_1 f \cdot e^{-b_1 x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad T_2 f \cdot e^{-a_2 x} \in L^2(-\infty, \infty). \tag{4.4}$$

Из (4.1) и (4.4) следует:

$$\begin{aligned} &\eta(x)\,g(x)e^{-yx} = \eta(x)\,T_1 f \cdot e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant b_1, \\ &\eta(-x)\,g(x)\,e^{-yx} = \eta(-x)\,T_2 f \cdot e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant a_2, \end{aligned}$$

откуда (п. 4 § 2) выводим:

$$g(x)\,e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad b_1 \leqslant y \leqslant a_2. \tag{4.5}$$

Запишем уравнение (4.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} T_1 f - g &= \psi_+, \quad -\infty < x < \infty, \\ T_2 f - g &= \psi_-, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

и покажем, что неизвестные функции ψ_+ и ψ_- обладают свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_+(x)\, e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \geqslant a_2; \\ &\psi_-(x)\, e^{-\gamma x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad \gamma \leqslant b_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Действительно, из (4.4), (4.5) и (4.6) следует:

$$[T_1 f - g]\, e^{-b_1 x} = \psi_-(x)\, e^{-b_1 x} \in L^2(-\infty, \infty),$$

$$[T_2 f - g]\, e^{-a_2 x} = \psi_+(x)\, e^{-a_2 x} \in L^2(-\infty, \infty),$$

откуда, на основании п. 3 § 2, вытекает (4.7).

Умножим верхнюю строку (4.6) на $e^{-b_1 x}$, а нижнюю — на $e^{-a_2 x}$ и преобразуем по Фурье:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x + ib_1)]\, F(x + ib_1) - G(x + ib_1) &= \Psi^-(x + ib_1), \\ [1 + K_2(x + ia_2)]\, F(x + ia_2) - G(x + ia_2) &= \Psi^+(x + ia_2). \end{aligned}\right\}$$

Неизвестные функции $F(x + ib_1)$, $F(x + ia_2)$, $\Psi^-(x + ib_1)$ и $\Psi^+(x + ia_2)$ будут, согласно п. 1 § 2, предельными значениями исчезающих на бесконечности функций $F(z)$, $\Psi^-(z)$ и $\Psi^+(z)$, причем вследствие (4.3) функция $F(z)$ аналитична при $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$, вследствие (4.7) функция $\Psi^-(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z < b_1$, а $\Psi^+(z)$ — при $a_2 < \operatorname{Im} z$.

Таким образом, мы снова получаем задачу Римана (2.3), где

$$\beta = a_2, \quad \alpha = b_1, \quad \nu = 0,$$

$$A(x + i\beta) = 1 + K_2(x + ia_2), \quad A(x + i\alpha) = [1 + K_1(x + ib_1)]^{-1},$$

$$B(x + i\beta) = -G(x + ia_2), \quad B(x + i\alpha) = G(x + ib_1)\,[1 + K_1(x + ib_1)]^{-1},$$

$$\Phi^+(x + i\beta) = \Psi^+(x + ia_2), \quad \Phi^+(x + i\alpha) = F(x + ib_1),$$

$$\Phi^-(x + i\beta) = F(x + ia_2), \quad \Phi^-(x + i\alpha) = \Psi^-(x + ib_1).$$

Полученная задача, очевидно, эквивалентна исходному уравнению (4.1). В связи с наложенными в § 2 на коэффициент $A(\zeta)$ условиями будем считать, что $1 + K_1(x + ib_1)$ и $1 + K_2(x + ia_2)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль.

Формулируем результат: пусть

$$\varkappa = \operatorname{ind}[1 + K_2(x + ia_2)] - \operatorname{ind}[1 + K_1(x + ib_1)].$$

Тогда при $\varkappa > 0$ уравнение (4.1) имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений. При $\varkappa = 0$ уравнение имеет единственное решение, тривиальное при $g \equiv 0$. При $\varkappa < 0$ однородное уравнение (4.1) неразрешимо: неоднородное имеет единственное решение, если удовлетворяются $-\varkappa$ условий разрешимости (2.9). Решение дается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}\Phi(\zeta)\,e^{-ix\zeta}d\zeta,\quad b_1\leqslant c\leqslant a_2,$$

где $\Phi(\zeta)$ определяется из (2.7) или (2.8).

II) Случай $b\geqslant a$. Установим класс, из которого следует брать $g(x)$. Из (4.2) и (4.3) имеем:

$$T_jf_+\cdot e^{-bx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\quad T_jf_-\cdot e^{-ax}\in L^2(-\infty,\ \infty)\quad (j=1,\ 2).\tag{4.8}$$

Учитывая (4.8), из уравнения (4.1) найдем (пп. 3 и 4 § 2):

$$\begin{aligned}\eta(x)\,g(x)\,e^{-yx}&=\eta(x)\,[T_1f_+-T_1f_-]\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\qquad y\geqslant b,\\ \eta(-x)\,g(x)\,e^{-yx}&=\eta(-x)\,[T_2f_+-T_2f_-]\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\qquad y\leqslant a.\end{aligned}$$

Следовательно, свободный член $g\equiv g_+-g_-$ лежит в том же классе, что и решение:

$$g_+(x)\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\quad y\geqslant b;\qquad g_-(x)\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\quad y\leqslant a.\tag{4.9}$$

Заметим, что при $b=a$ вместо (4.3) и (4.9) мы имеем просто

$$f(x)\,e^{-bx}\in L^2,\qquad g(x)\,e^{-bx}\in L^2.$$

В этом случае уравнение (4.1) приводится (путем умножения на e^{-bx}) к «парному» уравнению, рассмотренному И. М. Рапопортом ([6]). Ввиду этого ограничимся случаем $b>a$.

Для того чтобы иметь возможность свести уравнение (4.1) к краевой задаче, требуется рассмотреть некоторые вспомогательные функции и выяснить их свойства. Запишем уравнение (4.1) в виде

$$\left.\begin{aligned}T_1f-g&=\psi_-,\quad -\infty<x<\infty,\\ T_2f-g&=\psi_+,\quad -\infty<x<\infty.\end{aligned}\right\}\tag{4.10}$$

Из (4.8), (4.9), (4.10) и пп. 3 и 4 § 2 следует:

$$\begin{aligned}\psi_-(x)\,e^{-yx}&=\eta(-x)\,[T_1f-g]\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\qquad y\leqslant a,\\ \psi_+(x)\,e^{-yx}&=\eta(x)\,[T_2f-g]\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\qquad y\geqslant b.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Преобразуем уравнение (4.10) так, чтобы использовать п. 5 § 2:

$$\left.\begin{aligned}T_1f_+-g_+&=T_1f_--g_-+\psi_-=\omega_1,\\ -\psi_++T_2f_+-g_+&=T_2f_--g_-=\omega_2.\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

Согласно п. 5 § 2,

$$\omega_j(x)\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\ \infty),\quad a\leqslant y\leqslant b,\quad j=1,\ 2.\tag{4.13}$$

Умножим подходящие равенства в (4.12) на e^{-ax} или e^{-bx} и преобразуем по Фурье:

$$\left.\begin{aligned}&[1+K_1(x+ib)]\,F^+(x+ib)-G^+(x+ib)=\Omega_1(x+ib),\\ &[1+K_1(x+ia)]\,F^-(x+ia)-G^-(x+ia)+\Psi^-(x+ia)=\Omega_1(x+ia),\\ &[1+K_2(x+ib)]\,F^+(x+ib)-G^+(x+ib)-\Psi^+(x+ib)=\Omega_2(x+ib),\\ &[1+K_2(x+ia)]\,F^-(x+ia)-G^-(x+ia)=\Omega_2(x+ia).\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

Неизвестные функции $F^+(x+ib)$, $F^-(x+ia)$, $\Psi^+(x+ib)$, $\Psi^-(x+ia)$, $\Omega_1(x+ib)$, $\Omega_1(x+ia)$, $\Omega_2(x+ib)$, $\Omega_2(x+ia)$ будут, согласно п. 1 § 2, предельными значениями исчезающих на бесконечности функций $F^+(z)$, $F^-(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi^-(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, причем, ввиду (4.3), функция $F^+(z)$ аналитична при $b<\operatorname{Im} z$, а $F^-(z)$ — при $\operatorname{Im} z<a$; ввиду (4.11) функция $\Psi^+(z)$ аналитична при $b<\operatorname{Im} z$, а $\Psi^-(z)$ — при $\operatorname{Im} z<a$; ввиду (4.13) функция $\Omega_1(z)$ аналитична при $a<\operatorname{Im} z<b$, и $\Omega_2(z)$ — при $a<\operatorname{Im} z<b$.

Итак, уравнение (4.1) сведено к эквивалентной задаче нахождения функций $F^+(z)$, $F^-(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi^-(z)$, $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$, аналитических в указанных выше областях и исчезающих на бесконечности, для предельных значений которых имеют место условия (4.14).

Метод решения этой задачи заключается в упрощении краевого условия (4.14) путем исключения трех неизвестных функций, в результате чего будет получена краевая задача Римана для одной кусочноголоморфной функции. Исключим из условий (4.14) $F^-(x+ib)$ и $F^+(x+ia)$:

$$\left.\begin{aligned} F^+(x+ib)&=\frac{\Omega_1(x+ib)+G^+(x+ib)}{1+K_1(x+ib)}=\frac{\Omega_2(x+ib)+G^+(x+ib)+\Psi^+(x+ib)}{1+K_2(x+ib)},\\ F^-(x+ia)&=\frac{\Omega_2(x+ia)+G^-(x+ia)}{1+K_2(x+ia)}=\frac{\Omega_1(x+ia)+G^-(x+ia)-\Psi^-(x+ia)}{1+K_1(x+ia)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Для дальнейшего упрощения целесообразно ввести новую неизвестную функцию

$$\Omega(z)=\Omega_1(z)[1+K_2(z)]-\Omega_2(z)[1+K_1(z)]. \tag{4.16}$$

Вследствие аналитичности в полосе функций $K_1(z)$ и $K_2(z)$ [см. (4.2) и п. 1 § 2], функция $\Omega(z)$ также аналитична при $a<\operatorname{Im} z<b$ и должна иметь нули в точках z_k порядков ν_k, $k=1,\ldots,n$, являющиеся общими нулями функций $1+K_1(z)$ и $1+K_2(z)$.

Вводя $\Omega(z)$ в условия (4.15), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Omega(x+ib)+G^+(x+ib)[K_2(x+ib)-K_1(x+ib)]&=\\ =[1+K_1(x+ib)]\Psi^+(x+ib),&\\ \Omega(x+ia)+G^-(x+ia)[K_2(x+ia)-K_1(x+ia)]&=\\ =[1+K_2(x+ia)]\Psi^-(x+ia).& \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Таким образом, мы снова получаем задачу Римана (2.3), где

$$\alpha=a,\quad \beta=b,$$
$$A(x+i\beta)=[1+K_1(x+ib)]^{-1},\quad A(x+i\alpha)=1+K_2(x+ia),$$
$$B(x+i\beta)=G^+(x+ib)[K_2(x+ib)-K_1(x+ib)]\cdot[1+K_1(x+ib)]^{-1},$$
$$B(x+i\alpha)=-G^-(x+ia)[K_2(x+ia)-K_1(x+ia)],$$
$$\Phi^+(x+i\beta)=\Psi^+(x+ib),\quad \Phi^+(x+i\alpha)=\Omega(x+ia),$$
$$\Phi^-(x+i\beta)=\Omega(x+ib),\quad \Phi^-(x+i\alpha)=\Psi^-(x+ia),$$
$$C_{jk}=0,\quad j=0,1,\ldots,\nu_k-1;\quad k=1,\ldots,n.$$

В зависимости от индекса

$$\varkappa=\operatorname{ind}[1+K_2(x+ia)]-\operatorname{ind}[1+K_1(x+ib)]$$

и числа общих нулей $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, мы будем иметь следующие случаи:

1) $\varkappa - \nu \geqslant 0$. Задача (4.17) имеет $\varkappa - \nu$ линейно независимых решений (2.7).

2) $\varkappa - \nu < 0$. Задача имеет единственное решение (2.8), если выполнены условия разрешимости (2.9).

Если задача (4.17) неразрешима, то неразрешимо и исходное уравнение (4.1). (Однородную задачу здесь можно считать разрешимой всегда, так как для нашей цели пригодно и тривиальное решение.) Предполагая задачу (4.17) разрешимой, подставляем найденную функцию $\Psi^+(x+ib)$ в краевое условие (4.15):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^+(x+ib) &= \Phi_1^-(x+ib) + \frac{G^+(x+ib) + \Psi^+(x+ib)}{1+K_2(x+ib)}, \\ \Phi_1^+(x+ia) &= \Phi_1^-(x+ia) - \frac{G^-(x+ia)}{1+K_2(x+ia)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Phi_1^+(x+ib) = F^+(x+ib), \qquad \Phi_1^+(x+ia) = \frac{\Omega_2(x+ia)}{1+K_2(x+ia)},$$
$$\Phi_1^-(x+ib) = \frac{\Omega_2(x+ib)}{1+K_2(x+ib)}, \qquad \Phi_1^-(x+ia) = F^-(x+ia).$$

Условие (4.18) следует понимать как краевое условие еще одной задачи Римана, причем функция $\Psi^+(x+ib)$, входящая в свободный член, содержит $\max(0, \varkappa - \nu)$ произвольных постоянных. Пусть $1 + K_2(z)$ имеет в точках z_k нули порядков ν_k, $k = n+1, \ldots, n_1$. Тогда у решения задачи допустимы полюсы в этих точках и тех же порядков. Это решение имеет вид:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{-G^-(\zeta)}{1+K_2(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \frac{G^+(\zeta)+\Psi^+(\zeta)}{1+K_2(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{P_{\mu-1}(z)}{\prod\limits_{k=n+1}^{n_1}(z-z_k)^{\nu_k}}, \qquad \mu = \sum_{n+1}^{n_1}\nu_k. \tag{4.19}$$

В многочлене $P_{\mu-1}(z)$ не все постоянные останутся произвольными; $\mu - \nu$ постоянных будут определены тем, что функция (см. (4.16))

$$\Omega_1(z) = \frac{\Omega(z) + \Omega_2(z)\,[1+K_1(z)]}{1+K_2(z)}$$

должна быть аналитической в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$. Отсюда получаем условия:

$$\frac{d^j}{dz^j}\{\Omega(z) + \Omega_2(z)\,[1+K_1(z)]\}_{z=z_k} = 0$$
$$(j = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1;\ k = n+1, \ldots, n_1),$$

среди которых ν условий, соответствующих общим нулям, удовлетворяются автоматически. Удовлетворив этим условиям, мы получим решение задачи (4.14), содержащее в общей сложности $\max(\nu, \varkappa)$ произвольных постоянных.

Формулируем результат: пусть

$$\varkappa = \operatorname{ind}[1 + K_2(x + ia)] - \operatorname{ind}[1 + K_1(x + ib)],$$

ν — число общих нулей функций $1 + K_1(z)$ и $1 + K_2(z)$ в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$. Тогда при $\varkappa \geqslant \nu$ уравнение (4.1) имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений. При $\varkappa < \nu$ уравнение (4.1) разрешимо лишь при выполнении $\nu - \varkappa$ условий (2.9) и имеет ν линейно-независимых решений. Во всех случаях, когда решение уравнения (4.1) существует, оно находится по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} F^+(\zeta)\, e^{-ix\zeta}\, d\zeta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} F^-(\zeta)\, e^{-ix\zeta}\, d\zeta,$$

где $F^+(\zeta)$ и $F^-(\zeta)$ определяются из (4.19).

III) Случай $b_2 < a_1$. В этом случае свободный член $g \equiv g_+ - g_-$ может лежать в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$g_+(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant a_1, \qquad g_-(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant b_2. \tag{4.20}$$

Действительно, исходя из (4.2) и (4.3) и используя пп. 2 и 4 § 2, получим:

$$T_1 f \cdot e^{-a_1 x} \in L^2(-\infty, \infty), \quad T_2 f \cdot e^{-b_2 x} \in L^2(-\infty, \infty). \tag{4.21}$$

Но

$$g_+(x) = \eta(x)\, T_1 f, \quad g_-(x) = -\eta(-x)\, T_2 f,$$

откуда и следует (4.20), если учесть (4.21) и п. 3 § 2. Уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} T_1 f - g &= \psi_-, \quad -\infty < x < \infty, \\ T_2 f - g &= \psi_+, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Из (4.20) и (4.21) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_-(x)\, e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant b_2, \\ \psi_+(x)\, e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant a_1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Преобразуем (4.22) так, чтобы использовать п. 5 § 2:

$$\left.\begin{aligned} T_1 f - g_+ &= \psi_- - g_- = \omega_-, \\ T_2 f + g_- &= \psi_+ + g_+ = \omega_+. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Согласно пп. 3 и 5 § 2,

$$\begin{aligned} \omega_-(x)\, e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leqslant a_1, \\ \omega_+(x)\, e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geqslant b_2. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Умножим верхнюю строку (4.24) на $e^{-a_1 x}$, а нижнюю — на $e^{-b_2 x}$ и преобразуем по Фурье:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x + ia_1)]\, F(x + ia_1) - G^+(x + ia_1) &= \Omega^-(x + ia_1), \\ [1 + K_2(x + ib_2)]\, F(x + ib_2) + G^-(x + ib_2) &= \Omega^+(x + ib_2). \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Неизвестные функции $F(x + ia_1)$, $F(x + ib_2)$, $\Omega^-(x + ia_1)$ и $\Omega^+(x + ib_2)$ будут предельными значениями исчезающих на бесконечности функций

$F(z)$, $\Omega^-(z)$ и $\Omega^+(z)$, причем, ввиду (4.3), $F(z)$ аналитична при $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$, а ввиду (4.25), $\Omega^-(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z < a_1$ и $\Omega^+(z)$ — при $b_2 < \operatorname{Im} z$.

Формулируем полученную краевую задачу, эквивалентную уравнению (4.1): найти функции $F(z)$, $\Omega^-(z)$ и $\Omega^+(z)$, аналитические в указанных выше областях, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре $\operatorname{Im} z = b_2$, $\operatorname{Im} z = a_1$ краевому условию (4.26). Эта задача существенно отличается от задачи Римана и имеет тот же характер, что и задача (3.13). Решение задачи (4.26) в общем случае нам неизвестно. Ввиду этого ограничимся рассмотрением случая, когда функции $K_1(x+ia_1)$ и $K_2(x+ib_2)$ продолжимы на полосу $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$ так, что $K_1(z)$ и $K_2(z)$ имеют в этой полосе характер мероморфных функций. Полюсы этих функций будем обозначать через z_k, а их кратности — через ν_k, причем индексам $k = 1, \ldots, n_1$ отвечают все полюсы функции $K_1(z)$, индексам $k = n_1 + 1, \ldots, n_2$ — все полюсы функции $K_2(z)$, а индексами $k = n_2 + 1, \ldots, n_3$ мы дополнительно выделяем общие полюсы этих функций.

Отметим необходимые условия разрешимости задачи, легко выводимые из (4.26):

1) $G^+(x+ia_1)$ продолжимо на полосу $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$, причем $G^+(z)$ может иметь полюсы лишь в точках z_k, $k = 1, \ldots, n_1$, и порядки полюсов не должны превышать ν_k.

2) $G^-(x+ib_2)$ продолжимо на полосу $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$, причем $G^-(z)$ может иметь полюсы лишь в точках z_k, $k = n_1 + 1, \ldots, n_2$, и порядки полюсов не должны превышать ν_k.

$$3) \qquad \frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{G^+(z)}{1+K_1(z)} + \frac{G^-(z)}{1+K_2(z)}\right]_{z=z_k} = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 0, \ldots, \nu_k - 1, \\ k = n_2 + 1, \ldots, n_3. \end{pmatrix} \qquad (4.27)$$

Будем считать эти условия выполненными. Путем аналитического продолжения из (4.26) получим краевое условие задачи Римана:

$$\left.\begin{aligned} [1 + K_1(x+ib_2)]\,F(x+ib_2) - G^+(x+ib_2) &= \Omega^-(x+ib_2), \\ [1 + K_2(x+ia_1)]\,F(x+ia_1) + G^-(x+ia_1) &= \Omega^+(x+ia_1). \end{aligned}\right\} \qquad (4.28)$$

Аналогично задаче Римана (3.15) [случай II § 3] задача (4.28) должна иметь ряд дополнительных условий, накладываемых на ее решение, для того, чтобы последнее было решением исходной задачи (4.26). В данном случае условия таковы:

$$\frac{d^j}{dz^j} F\Big|_{z=z_k} = C_{jk} = \begin{cases} \dfrac{d^j}{dz^j}\left[\dfrac{G^+(z)}{1+K_1(z)}\right]_{z=z_k}, & \begin{pmatrix} j = 0, \ldots, \nu_k - 1, \\ k = 1, \ldots, n_1, \end{pmatrix} \\ \dfrac{d^j}{dz^j}\left[\dfrac{-G^-(z)}{1+K_2(z)}\right]_{z=z_k}, & \begin{pmatrix} j = 0, \ldots, \nu_k - 1, \\ k = n_1 + 1, \ldots, n_2. \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (4.29)$$

Среди условий (4.29), ввиду (4.27), есть $\nu_{n_1+1} + \cdots + \nu_{n_2}$ совпадающих. Таким образом, число ν условий (4.29) равно разности числа $\nu_1 + \cdots + \nu_{n_2}$ всех полюсов и числа $\nu_{n_1+1} + \cdots + \nu_{n_2}$ общих полюсов функций $K_1(z)$ и $K_2(z)$ в полосе $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$.

Итак, (4.28) есть задача Римана (2.3), где

$$\beta = a_1, \quad \alpha = b_2,$$

$$A(x+i\beta) = 1 + K_2(x+ia_1), \quad A(x+i\alpha) = [1 + K_1(x+ib_2)]^{-1},$$

$$B(x+i\beta) = G^-(x+ia_1), \quad B(x+i\alpha) = G^+(x+ib_2)\,[1 + K_1(x+ib_2)]^{-1},$$

$$\Phi^+(x+i\beta) = \Omega^+(x+ia_1), \quad \Phi^+(x+i\alpha) = F(x+ib_2),$$

$$\Phi^-(x+i\beta) = F(x+ia_1), \quad \Phi^-(x+i\alpha) = \Omega^-(x+ib_2).$$

Роль условий (2.4) будут играть условия (4.29). В связи с наложенными в § 2 на $A(\zeta)$ ограничениями будем считать, что $1 + K_1(x+ib_2)$ и $1 + K_2(x+ia_1)$ удовлетворяют условию Гёльдера и не обращаются в нуль.

Формулируем результат: пусть

$$\varkappa = \operatorname{ind}[1 + K_2(x+ia_1)] - \operatorname{ind}[1 + K_1(x+ib_2)],$$

ν — разность числа всех полюсов функций $1 + K_1(z)$ и $1 + K_2(z)$ в полосе $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$ и числа общих полюсов этих функций в полосе. Тогда при $\varkappa > \nu$ уравнение (4.1) имеет $\varkappa - \nu$ линейно независимых решений. При $\varkappa = \nu$ уравнение имеет единственное решение, тривиальное при $g \equiv 0$. При $\varkappa < \nu$ однородное уравнение (4.1) неразрешимо; неоднородное имеет единственное решение, если удовлетворяются $\nu - \varkappa$ условий разрешимости (2.9). Во всех случаях, когда решение уравнения (4.1) существует, оно находится по формуле (см. п. 1 § 2):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \Phi(\zeta)\, e^{-ix\zeta}\, d\zeta, \quad b_2 \leqslant c \leqslant a_1,$$

где $\Phi(\zeta)$ определено формулой (2.7) или (2.8).

Поступило
10. VII. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., О краевой задаче Римана, Математ. сборник, т. 2(44), № 4 (1937), 673—683.

[2] Wiener N. und Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitz. Akad. Wiss., Berlin (1931), 696—706.

[3] Reissner E., On a class of singular integral equations, J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn., 20 (1941), 219—223.

[4] Фок В. А., О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сборник, т. 14 (56), № 1—2 (1944), 3—50.

[5] Рапопорт И. М., Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, т. 59, № 8 (1948), 1403—1406.

[6] Рапопорт И. М., О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях, Сб. тр. Инст. матем. АН УССР, № 12, (1949), 102—118.

[7] Busbridge I. W., Dual integral equations, Proc. London Math. Soc., 44(2) (1938), 115—129.

[8] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.

[9] Гахов Ф. Д. и Чибрикова Л. И., О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров, Учен. записки Казанск. гос. ун-та, т. 113 (1953), 107—110.

[10] Чикин Л. А., Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Учен. записки Казанск. гос. ун-та, т. 113 (1953), 57—106.

[11] Черский Ю. И., О некоторых особых интегральных уравнениях, Учен. записки Каз. гос. ун-та, т. 113 (1953), 43—56.

[12] Гахов Ф. Д. и Черский Ю. И., Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана, Учен. записки Каз. гос. ун-та, т. 114, кн. 8 (1954), 21—33.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 53 — 98

И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

СИНГУЛЯРНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе дается обобщение введенных Зигелем модулярных абелевых функций.

Введение

Теория автоморфных функций от одного переменного была создана в конце прошлого и начале настоящего века Пуанкаре, Клейном и др. Тогда же начала развиваться теория автоморфных функций от многих комплексных переменных. Одним из наиболее важных классов автоморфных функций от многих комплексных переменных являются периодические (абелевы) функции, найденные при решении проблемы обращения абелевых интегралов. В конце прошлого века Риманом и Фробениусом были найдены условия, которым должны удовлетворять периоды абелевых функций. Дальнейшие важные результаты в теории абелевых функций были получены Лефшецем, изучавшим топологическую природу алгебраических подмногообразий абелева многообразия. Лефшецу также принадлежат важные результаты в так называемой проблеме комплексного умножения. В тридцатых годах проблема комплексного умножения была полностью решена А. А. Албертом ([12]).

Одним из первых классов автоморфных функций от многих комплексных переменных, отличным от абелевых функций, был класс модулярных функций, введенных Гильбертом. Ученик Гильберта Блюменталь ([7]) доказал существование таких функций и установил, что поле, образованное ими, изоморфно полю алгебраических функций. Однако следует отметить, что рассуждения Блюменталя содержали ошибки. Сравнительно недавно Мас ([8]) при помощи методов, найденных Зигелем, вновь доказал существование модулярных функций Гильберта и установил, что поле, образованное ими, изоморфно полю алгебраических функций.

В связи со своими исследованиями по арифметической теории квадратичных форм Зигель ввел другой класс модулярных функций. Оказалось, что введенные Зигелем модулярные функции стоят в таком же отношении к общим абелевым функциям, как эллиптические модулярные функции к эллиптическим функциям.

В настоящей работе дается общая схема построения абелевых модулярных функций. Прежде чем излагать эту схему, сформулируем условия Римана — Фробениуса для периодов абелевых функций от p переменных. Обозначим через ω матрицу, составленную из $2p$ вещественно неза-

висимых векторов — периодов. Как известно, эти условия заключаются в следующем. Существует рациональная кососимметрическая матрица R порядка $2p$, для которой

$$\omega R\omega' = 0, \quad i\bar{\omega}R\omega' > 0. \tag{1}$$

Такая матрица R называется главной матрицей для матрицы ω. Обозначим совокупность всех главных матриц для фиксированной матрицы ω через $N\omega$. Очевидно, если $R_1 \in N\omega$ и $R_2 \in N\omega$, то

$$r_1R_1 + r_2R_2 \in N\omega$$

(r_1 и r_2 — любые рациональные положительные числа). Совокупность N рациональных кососимметрических матриц R порядка $2p$, для которых из $R_1 \in N$ и $R_2 \in N$ следует

$$r_1R_1 + r_2R_2 \in N,$$

где r_1 и r_2 — любые рациональные положительные числа, будем называть конусом. Если конус N является совокупностью всех главных матриц для некоторой матрицы ω, то условимся называть его допустимым. Перечисление всех допустимых конусов N фактически содержится в работе А. А. Алберта ([12]).

Рассмотрим совокупность Ω_N всех матриц ω, для которых

$$N \subseteq N\omega, \tag{2}$$

где N — некоторый допустимый конус. Будем называть матрицы ω и $\omega_1 = \alpha\omega$, где α — невырожденная квадратная комплексная матрица порядка p, эквивалентными. Ясно, что поля абелевых функций с эквивалентными матрицами периодов изоморфны.

Очевидно, что если $\omega \in \Omega_N$, то любая матрица ω_1, ей эквивалентная, также содержится в Ω_N. Таким образом, множество матриц $\omega \in \Omega_N$ распадается на классы эквивалентных между собой матриц. Обозначим множество этих классов через H_N. Пусть, далее, L_N — группа всех целочисленных унимодулярных матриц U порядка $2p$ со следующим свойством:

$$\text{если } \omega \in \Omega_N, \text{ то } \omega U' \in \Omega_N. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что $U \in L_N$ тогда и только тогда, когда

$$U'NU = N. \tag{4}$$

Ясно, что из эквивалентности ω_1 и ω_2 следует эквивалентность ω_1U' и ω_2U'. Следовательно, преобразование

$$\omega \to \omega U' \tag{5}$$

можно рассматривать как преобразование в H_N. Некоторым матрицам $U \in L_N$ соответствует тождественное преобразование в H_N. Такие матрицы образуют некоторый нормальный делитель L_N^0 группы L_N. Как правило, порядок L_N^0 бесконечен.

Условимся называть модулярной группой Γ_N фактор-группу L_N / L_N^0. Функции на H_N, автоморфные относительно этой группы, назовем модулярными функциями.

В настоящей работе дано доказательство теоремы существования и

теоремы об алгебраических соотношениях для одного, повидимому, наиболее важного класса функций, описанных в указанной выше схеме. Среди рассмотренных нами функций содержатся как модулярные функции, введенные Зигелем, так и модулярные функции, введенные Гильбертом. Конусы, соответствующие рассмотренным модулярным функциям, можно описать следующим образом.

Пусть k — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n, R_0 — некоторая вырожденная рациональная кососимметрическая матрица порядка $2p$, $p = np_0$, и $\alpha \to A(\alpha)$ — представление поля k рациональными матрицами порядка $2p$, причем $AR_0 = R_0 A'$ для любой матрицы A из представления.

Рассмотрим совокупность $N(k)$ кососимметрических матриц R вида AR_0, где A пробегает все матрицы из нашего представления с положительными собственными значениями. Можно показать, что $N(k)$ является допустимым конусом. Далее, можно доказать (см. гл. I, § 1), что H_N есть произведение n верхних полуплоскостей степени p_0. * В этом случае модулярная группа оказывается соизмеримой ** с группой, описываемой следующим образом (см. гл. II, § 3). Пусть $H^n_{p_0}$ — произведение n верхних полуплоскостей степени p_0. Рассмотрим группу всех матриц U порядка $2p_0$ с элементами, являющимися целыми алгебраическими числами из поля k, для которых

$$U'IU = I, \quad U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Сопоставим каждой матрице U, удовлетворяющей (6), преобразование в $H^n_{p_0}$:

$$\begin{gathered} Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}) \to \tilde{Z} = (\tilde{Z}^{(1)}, \ldots, \tilde{Z}^{(n)}), \\ \tilde{Z}^{(s)} = (A^{(s)}Z^{(s)} + B^{(s)})(C^{(s)}Z^{(s)} + D^{(s)})^{-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Группу этих преобразований $\Gamma_{p_0}(k)$ мы называем группой Гильберта — Зигеля, поскольку она была указана Гильбертом для $p_0 = 1$ и любого k и Зигелем для любого p_0 и $n = 1$. Рассмотрение этой группы для любого p_0 и любого поля k, повидимому, впервые проведено в настоящей работе. Основной результат, полученный для этой группы и для всех групп Г, с ней соизмеримых, формулируется следующим образом.

1) Для любой точки $z_0 \in H^n_{p_0}$, не являющейся неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы Г, за исключением тождественного, существуют

$$m = \frac{np_0(p_0+1)}{2}$$

регулярных в этой точке, автоморфных относительно Г функций с отличным от нуля в z_0 якобианом.

2) Для любых двух точек z_1 и z_2, не эквивалентных относительно группы Г, существует автоморфная функция, регулярная в этих точках и принимающая в них различные значения.

3) Поле автоморфных относительно Г функций изоморфно полю алгебраических функций от m неизвестных.

* Определение верхней полуплоскости степени p см. в ([1]), стр. 139.

** Две группы Γ_1 и Γ_2 называются соизмеримыми, если их пересечение Γ_0 имеет в каждой из них конечный индекс.

Отметим, что в работах Зигеля [см. ([6])] и Маса [см. ([8])] утверждение 3) было доказано для зигелевской группы (p_0 — любое, $n = 1$) и для группы Гильберта ($p_0 = 1$).

Утверждения 1) и 2) были установлены для группы Гильберта [см. ([11])] и для зигелевской группы [см. ([6])] в менее точной форме, чем в настоящей работе. Таким образом, даже для этих групп утверждения 1) и 2) являются новыми.

Методы, примененные в настоящей работе для доказательства утверждений 1) — 3), являются развитием соответствующих методов Зигеля, в которые нами внесены значительные упрощения. Перечислим основные из них.

Для доказательства существования модулярных функций Зигель ([6]) и Мас ([8]) употребляли так называемые обобщенные ряды Пуанкаре в верхней полуплоскости. Мы для этой цели используем обычные ряды Пуанкаре в ограниченной области. Употребление таких рядов позволяет весьма просто доказать утверждения 1) и 2). С другой стороны, доказательство этих утверждений при помощи обобщенных рядов Пуанкаре, повидимому, если и возможно, то чрезвычайно громоздко. Доказательство утверждения 3) нами также упрощено по сравнению с доказательством Зигеля. У Зигеля утверждение 3) было доказано при помощи индукции, но проведение ее в тех предположениях, при которых ниже доказано утверждение 3), повидимому, невозможно. Изменения, внесенные нами в метод Зигеля, позволили избежать применения индукции. При этом самое доказательство получилось гораздо проще и прозрачней. Далее, значительные упрощения позволило внести систематическое использование мажорантных функций (см. гл. I, § 2 и 3), которые у Зигеля употреблялись лишь эпизодически.

В настоящей работе мы будем употреблять следующие обозначения:

1) $\sigma(A)$ — след матрицы A.

2) $S[L] = L'SL$, где S — симметрическая матрица, а L — матрица с тем же числом строк, что и S.

3) $\| A \|$ — абсолютная величина определителя матрицы A.

4) $T_1 > T_2$ (T_1 и T_2 — эрмитовы матрицы) означает, что все собственные значения матрицы $T_1 - T_2$ являются положительными числами.

5) «A — строгая подобласть B» означает, что A содержится в B вместе с замыканием.

ГЛАВА I. ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

§ 1. Общие свойства дискретных групп и ряды Пуанкаре

В настоящем параграфе будет установлен критерий дискретности группы автоморфизмов ограниченной области. Далее будет описано построение фундаментальной области для любой дискретной группы. В конце параграфа будут рассмотрены ряды Пуанкаре.

Пусть Ω — группа всех аналитических автоморфизмов ограниченной области D. Будем говорить, что группа $\Gamma \in \Omega$ дискретна в групповом пространстве группы Ω, если любая последовательность различных элементов Γ не имеет предельного элемента в Ω.

Далее, будем говорить, что Г дискретна в области D, если для любой точки $z \in D$ и любой последовательности различных элементов $\gamma_k \in \Gamma$ последовательность точек $\gamma_k z$ не имеет предельных точек в области D [см. (1), стр. 101].

Пуанкаре установил, что если D есть круг в плоскости одного комплексного переменного, то из дискретности Г в групповом пространстве следует дискретность Г в области. В книге Зигеля (1) (стр. 143) аналогичная теорема доказана для так называемого обобщенного круга. Ниже, пользуясь одной теоремой А. Картана, мы докажем, что такое же положение имеет место для любой ограниченной области.

Начнем с установления критерия компактности семейства автоморфизмов * области D.

ЛЕММА 1. *Пусть Λ — некомпактное семейство автоморфизмов ограниченной области D. Предположим, что существует область D_1, содержащаяся строго внутри D, со следующим свойством: для любого автоморфизма $\gamma \in \Lambda$ найдется $z \in D_1$, для которого $\gamma z \in D_1$. Тогда Λ — компактное семейство. Обратно, если Λ — компактное семейство автоморфизмов, то существует область D_1 с указанными выше свойствами.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что из любой последовательности автоморфизмов ограниченной области всегда можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому аналитическому отображению области D. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — некоторая последовательность автоморфизмов из семейства Λ. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_k z = \gamma_0 z \text{ для всех } z \in D, \tag{1}$$

где γ_0 — некоторое аналитическое отображение D, причем сходимость в (1) является равномерной в любой замкнутой подобласти. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots$ последовательность точек D_1 со свойством: $\gamma_k z_k \in D_1$. Выбирая в случае необходимости подпоследовательность, можно считать, что последовательности точек z_k и $\gamma_k z_k$ сходятся соответственно к z_0 и z_1. Очевидно, $z_1 = \gamma_0 z_0$. Применяя теорему А. Картана [см. (2), стр. 40], получаем, что γ_0 — автоморфизм области D.

Пусть z_0 — любая точка D. Обозначим через D_1 множество точек вида γz_0, $\gamma \in \Lambda$. Очевидно, что D_1 содержится строго внутри D.

Теперь нам уже нетрудно показать, что из дискретности в групповом пространстве вытекает дискретность в области D. Пусть z_0 — любая точка D. Если $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — различные элементы группы Г, то последовательность $\gamma_k z_0$ не может сходиться ни к какой точке D, так как в противном случае, ввиду леммы 1, из последовательности γ_k можно было бы выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому автоморфизму в области D, что противоречит предположению о дискретности Г в групповом пространстве группы Ω.

Перейдем к построению фундаментальной области для группы Г. Под фундаментальной областью мы будем понимать замкнутое множе-

---

* В дальнейшем мы для краткости будем говорить автоморфизм вместо аналитический автоморфизм.

ство, почти все точки которого являются внутренними, причем для каждой точки области D существует хотя бы одна точка фундаментальной области, ей эквивалентная, и любые две внутренние точки фундаментальной области не эквивалентны друг другу.

Обозначим через F совокупность точек D, для которых $|j_\gamma(z)| \leqslant 1$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Мы покажем, что F является фундаментальной областью в указанном выше смысле. Действительно, очевидно, что F замкнуто. Далее, если обозначить через F_0 совокупность точек $z \in F$, для которых $|j_\gamma(z)| < 1$ при всех γ, за исключением элементов конечного порядка, то F_0 окажется открытым множеством. Точки, принадлежащие F, но не принадлежащие F_0, очевидно, содержатся в какой-нибудь из счетного числа гиперповерхностей $|j_\gamma(z)| = 1$, и, следовательно, мера их множества равна нулю. Далее, для каждой точки $z \in D$ существует ей эквивалентная точка $z' \in \Gamma$. Действительно, если

$$|j_{\gamma_0}(z)| \geqslant |j_\gamma(z)|$$

для всех $\gamma \in \Gamma$, то можно положить $z' = \gamma_0 z$. Тогда

$$|j_\gamma(z')| = |j_\gamma(\gamma_0 z)| = \left|\frac{j_{\gamma\gamma_0}(z)}{j_{\gamma_0}(z)}\right| \leqslant 1, \tag{2}$$

и, значит, $z' \in F$. Пусть z_1 и $z_2 = \gamma z_1 \in F_0$; тогда

$$j_{\gamma^{-1}}(z_2)\, j_\gamma(z_1) = j_{\gamma^{-1}}(\gamma z_1)\, j_\gamma(z_1) = j_\varepsilon(z_1) = 1, \tag{3}$$

и, следовательно, мы получаем противоречие.

Установим одно полезное для дальнейшего свойство построенной нами фундаментальной области. Покажем, что любое замкнутое множество $D_0 \subset D$ можно покрыть конечным числом образов F.

Действительно, если $z \in D_0$ и $z_1 = \gamma_0 z_0 \in F_0$, то

$$|j_{\gamma_0}(z_0)| = |j_{\gamma_0}(\gamma_0^{-1} z_1)| = \frac{1}{|j_{\gamma_0^{-1}}(z_1)|} \geqslant 1. \tag{4}$$

Очевидно таких γ_0 может быть лишь конечное число различных, ввиду равномерной сходимости ряда $\sum_\gamma |j_\gamma(z)|^2$ в области D_0 [см. (1), стр. 102].

Перейдем к изучению рядов Пуанкаре, построенных для произвольной дискретной группы автоморфизмов D.

Как известно, ряд

$$\sum_\gamma h(\gamma z)\, j_\gamma^m(z), \quad m \geqslant 2,$$

где $h(z)$ — ограниченная аналитическая функция, представляет собою функцию, регулярную в D. Такие ряды принято называть рядами Пуанкаре веса m. Иногда рядами Пуанкаре называют такие ряды, в которых $h(z)$ не является ограниченной функцией. Мы в дальнейшем, за исключением специально оговариваемых случаев, под рядом Пуанкаре будем понимать ряд, построенный при помощи ограниченной функции $h(z)$.

Следующая лемма устанавливает возможность разделения при помощи ряда Пуанкаре точек D, не эквивалентных относительно группы Г.

ЛЕММА 2. *Для любых двух точек* z_1 *и* z_2, *не эквивалентных относительно* Г, *существуют такие ряды Пуанкаре* $\varphi_1(z)$ *и* $\varphi_2(z)$ *одного веса, что*

$$\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2) - \varphi_1(z_2)\varphi_2(z_1) \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что z_1 и $z_2 \in F$. Заметим, что при $m \to \infty$

$$\varphi_i(z_j) = \sum_{|j_\gamma(z_j)|=1} h_i(\gamma z_j) j_\gamma^m(z_j) + o(1). \tag{6}$$

Выберем $h_i(z)$, $i = 1, 2$, так, чтобы

$$h_1(z_1)h_2(z_2) - h_1(z_2)h_2(z_1) \neq 0, \tag{7}$$

$$h_i(\gamma z_j) = 0, \text{ если } |j_\gamma(z_j)| = 1, \quad \text{а } \gamma z_j \neq z_j. \tag{8}$$

Условия (7) и (8) совместны, поскольку точки z_1 и z_2 не эквивалентны. Обозначим через s_i число таких γ, для которых $\gamma z_i = z_i$. Очевидно, что γ, имеющие общую неподвижную точку, образуют группу. Следовательно, согласно теореме Лагранжа, из $\gamma z_i = z_i$ вытекает, что $\gamma^{s_i} = \gamma$ и, значит,

$$(j_\gamma(z_i))^{s_i} = j_\gamma s_i(z) = 1.$$

Пусть $m = m_0 s_1 s_2$, $m_0 \to \infty$; тогда

$$\varphi_i(z_j) = s_j h_i(z_j) + o(1). \tag{9}$$

Из (9) и (7) утверждение леммы вытекает тривиально.

Заметим, что аналогичным способом можно доказать несколько более общее предложение, а именно: пусть $z_1, \ldots, z_p$ — некоторая система попарно не эквивалентных точек. Тогда существуют такие ряды Пуанкаре $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ одного веса, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) \ldots \varphi_p(z_1) \\ \varphi_1(z_2) \ldots \varphi_p(z_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1(z_p) \ldots \varphi_p(z_p) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10}$$

Очевидно из (10) вытекает существование ряда Пуанкаре достаточно большого веса, принимающего в точках $z_1, \ldots, z_p$ любые наперед заданные значения.

Предположим, что $z_0 \in F$ не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы Г, за исключением тождественного. Мы покажем, что существуют ряды Пуанкаре $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, для которых

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(z_0) \ldots \varphi_n(z_0) \\ \frac{\partial\varphi_0(z_0)}{\partial z_1} \ldots \frac{\partial\varphi_n(z_0)}{\partial z_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi_0(z_0)}{\partial z_n} \ldots \frac{\partial\varphi_n(z_0)}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Будем, как и выше, искать их в виде

$$\varphi_i(z) = \sum h_i(\gamma z)\, j_\gamma^m(z). \tag{12}$$

При достаточно больших m поведение функций $\varphi_i(z)$ зависит только от тех членов ряда (12), для которых $|j_\gamma(z_0)| = 1$. Положим

$$\Phi_i(z) = \sum_{|j_\gamma(z_0)|=1} h_i(\gamma z)\, j_\gamma^m(z).$$

Очевидно нам достаточно выбрать $h_i(z)$ так, чтобы

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(z_0) & \dots & \Phi_n(z_0) \\ \dfrac{\partial \Phi_0(z_0)}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_n(z_0)}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \Phi_0(z_0)}{\partial z_n} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_n(z_0)}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Последнее нетрудно сделать, пользуясь тем, что точки γz_0 различны при различных γ. Отметим, что без предположения о том, что z_0 не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований γ, наше утверждение неверно. Действительно, пусть точка z_0 является неподвижной точкой для некоторых преобразований из Г. Очевидно эти преобразования образуют конечную группу K. Разложим ряд Пуанкаре $\varphi(z)$ в степенной ряд с центром в точке z_0. Для простоты выкладки будем считать, что z_0 — начало координат. Согласно известной теореме А. Картана [см. ([3]), стр. 31], можно считать, что $\gamma \in K$ являются линейными и даже унитарными преобразованиями. Таким образом,

$$\varphi(\gamma z) = \varepsilon \varphi(z),$$

где ε — корень из 1, а $\gamma \in K$. Следовательно, либо φ, либо какая-нибудь из ее частных производных равна 0.

При помощи рассуждений, аналогичных изложенным выше, легко получается следующая

ЛЕММА 3. *Пусть z_0 не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы* Г, *кроме тождественного. Тогда для всех достаточно больших m и для некоторого $\alpha > 0$ существует такой ряд Пуанкаре $\varphi(z)$, что*

$$\left| \frac{\partial^s \varphi}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \right|_{z=z_0} = a_{k_1 \dots k_n}, \quad s \leqslant \alpha m, \tag{14}$$

где a — любые комплексные числа.

В теории автоморфных функций наиболее интересным классом дискретных групп являются такие группы, для которых поле автоморфных функций (при разумном определении понятия автоморфной функции относительно такой группы) является полем алгебраических функций. Мы введем сейчас понятие нормальной дискретной группы и покажем, как для таких групп ввести понятие автоморфной формы и автоморфной функции так, чтобы было справедливо указанное выше утверждение о строении поля автоморфных функций.

Обозначим через $k(z)$ некоторую положительную функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$k(\gamma z) = |j_\gamma(z)|^{-2} k(z) \text{ для всех } \gamma \in \Gamma. \tag{15}$$

Предположим дополнительно, что отношение

$$\frac{\Sigma |j_\gamma(z)|^2}{k(z)}, \quad z \in D, \tag{16}$$

ограничено сверху.

Определение. Аналитическая в D функция $f(z)$ называется обобщенной автоморфной формой веса m с мажорантой k, если:

1) она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z)\varphi(z),$$

2) $$\left| \frac{\varphi(z)}{\overline{k^2(z)}} \right| \leqslant c, \quad z \in D.$$

Очевидно, что ряды Пуанкаре принадлежат к числу обобщенных автоморфных форм и что совокупность автоморфных форм одного веса есть линейное пространство над полем комплексных чисел.

Мы будем называть группу нормальной, если это линейное пространство имеет для любого m конечную размерность N_m, причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} N_m / m^n < \infty.$$

Функцию $f(z)$ будем называть автоморфной, если она представима в виде отношения двух автоморфных форм одного веса. Используя лемму 3, легко доказать существование n аналитически независимых автоморфных функций [ср. ([1]), стр. 107].

Из оценки для числа линейно независимых автоморфных форм легко следует, что поле автоморфных функций изоморфно полю алгебраических функций от n неизвестных [см. ([1]), стр. 79].

§ 2. Некоторые леммы

В настоящем параграфе мы докажем две леммы, которые являются основным вспомогательным средством для оценки числа линейно независимых автоморфных форм.

ЛЕММА 4.* *Пусть A — некоторая область в комплексном n-мерном пространстве, B — область, содержащаяся строго внутри A, E — линейное пространство N-мерных аналитических вектор-функций $f(z)$. Если существует такая константа M, что*

$$\max_{z\in A} |f(z)| \leqslant M \max_{z\in B} |f(z)| \text{ для любой } f(z) \in E, \tag{17}$$

то размерность E конечна и не превосходит $\gamma N (\ln M)^n$, причем γ зависит только от A и B.

---

* В менее полном виде, чем в настоящей работе, а именно, для $N = 1$ и без оценки для размерности E эта лемма содержится в статье Бохнера [см. ([14]), стр. 3].

Доказательство. Обозначим через 2ρ расстояние от B до границы A. Выберем в B конечную систему P точек $z_1, \ldots, z_q$, обладающую следующим свойством: для всякой точки $z \in B$ существует точка $z_k \in P$, для которой $|z - z_k| < \rho$.

Очевидно для того чтобы вектор-функция $f(z)$ имела в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка, не меньшего m, достаточно наложить на $f(z)$ qNm^n линейных однородных соотношений. Таким образом, если бы размерность E была больше, чем qNm^n, то в E содержалась бы вектор-функция, имеющая в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка, не меньшего m. Покажем, используя условия леммы, что в E не может существовать вектор-функция $f(z)$, имеющая в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка, большего, чем $\ln M / \ln 2$. Действительно, пусть $f(z) \in E$ имеет в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка, не меньшего, чем m. Обозначим через z_0 точку, в которой $|f(z)|$ достигает максимума в $\bar{B}$. Тогда существует точка $z_k \in P$, для которой $|z_0 - z_k| < \rho$. Очевидно точка $z_k + \lambda(z_0 - z_k)$ при любом комплексном λ, $|\lambda| \leqslant 2$, содержится в A. Допустим, что

$$|f(z_0)| = |f_s(z_0)|.$$

Функция

$$\psi(\lambda) = f_s(z_k + \lambda(z_0 - z_k))\lambda^{-m}$$

регулярна в круге $|\lambda| \leqslant 2$ и, следовательно, достигает своего максимума на границе этого круга. Значит, существует в A такая точка z', что

$$|f(z')| \geqslant |f_s(z')| \geqslant 2^m |f_s(z_0)| = 2^m \max_{z \in B} |f(z)|,$$

следовательно, тем более

$$\max_{z \in A} |f(z)| \geqslant 2^m \max_{z \in B} |f(z)|, \tag{18}$$

откуда мы и получаем нужную оценку для m:

$$m \leqslant \frac{\ln M}{\ln 2}. \tag{19}$$

Хорошо известно [см. (1), стр. 100—118], что группа, имеющая компактную фундаментальную область, нормальна. Существуют интересные типы нормальных групп, не имеющих компактной фундаментальной области. Важнейшим примером таких групп являются модулярные группы, к которым приводит теория абелевых функций. В случае групп, не допускающих компактной фундаментальной области, установление их нормальности гораздо более сложно, чем в случае групп с компактной фундаментальной областью.

Лемма 5, доказываемая ниже, позволяет в ряде случаев (см. следующий параграф и гл. III) установить нормальность дискретных групп. Введем следующие определения:

Определение 1. Область F называется обобщенной фундаментальной областью для группы Γ, если для любой точки $z \in D$ существует эквивалентная ей точка $z_1 \in F$.

Определение 2. Множество точек евклидова пространства назы-

вается полуконусом, если оно вместе с любой точкой y содержит точку λy для любого $\lambda \geqslant 1$.

Пусть V — некоторый полуконус евклидова пространства. Рассмотрим совокупность точек t евклидова пространства, для которых $(t, y) \geqslant 0$ * при всех $y \in V$; очевидно, указанная совокупность является конусом. Мы будем называть этот конус взаимным к полуконусу V.

Определение 3. Полуконус V называется нормальным, если существует такая константа $c > 0$, что $(t, y) \geqslant c\,(t, t)^{\frac{1}{2}}$ для всех $y \in V$ и $t \in V'$, где V' — конус, взаимный к полуконусу V.

Например, множество точек $y = (y_1, \ldots, y_n)$, для которых $y_1 > a, \ldots, y_n > a$, где a — некоторая положительная константа, является нормальным полуконусом. Другой пример, играющий важную роль в следующем параграфе, строится так. Рассмотрим пространство, точками которого являются вещественные симметрические матрицы Y порядка n. Скалярное произведение определим при помощи формулы

$$(Y_1, Y_2) = \sigma(Y_1 Y_2). \tag{20}$$

Множество $V_\lambda\,(\lambda > 0)$ матриц Y, все собственные значения которых больше λ, является нормальным полуконусом. Действительно, если $\sigma(YT) \geqslant 0$ для всех $Y \in V_\lambda$, то $T \geqslant 0$. Обратно, $\sigma(T_1 T_2) \geqslant 0$ для любых $T_1 \geqslant 0$ и $T_2 \geqslant 0$. Далее,

$$\sigma(YT) = \lambda\sigma(T) + \sigma((Y - \lambda E)\,T) \geqslant \lambda\sigma(T) \geqslant \lambda\sqrt{\sigma(T)^2}.$$

Определение 4. Пусть S — некоторая область в n-мерном евклидовом пространстве. Множество точек

$$z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — любые числа, а $y_1, \ldots, y_n \in S$, называется цилиндрической областью с основанием S. Если основанием является нормальный полуконус, то это множество называется нормальной цилиндрической областью.

Перейдем к формулировке ограничений, которые мы наложим на группу Γ. Эти ограничения, к сожалению, формулируются не в виде ограничений на алгебраическое строение группы Γ, а в виде требования существования обобщенной фундаментальной области с некоторыми свойствами.

Определение 5. Область F называется допустимой обобщенной фундаментальной областью для группы Γ, если:

1) существует конечное число областей $S_1, S_2, \ldots, S_p \in D$ таких, что $F - \sum_{k=1}^{p} F_k$ содержится строго внутри D, где $F_k = F \cap S_k$;

2) в Γ существуют подгруппы $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$, каждая из которых изоморфна свободной абелевой группе с n образующими (где n — комплексная размерность области D), и $\delta S_k \subseteq S_k$ для всех $\delta \in \Delta_k$;

3) для каждой из областей S_k существует гомеоморфное аналитическое отображение φ_k на некоторую нормальную цилиндрическую область Σ_k с основанием V_k;

---

* (t, y) означает скалярное произведение.

4) существует такое $\lambda > 1$, что $\varphi_k^{-1}(\varphi_k F_k - \Sigma_k')$ содержится строго внутри $D(\Sigma_k'$ — цилиндрическая область с основанием $\lambda V_k)$;

5) любое преобразование $\delta' \in \varphi_k \Delta_k \varphi_k^{-1}$ имеет вид $z \to z + x_0$, где x_0 — вектор с вещественными компонентами.

Перейдем к определению мажорантной функции.

Даваемое нами здесь определение, к сожалению, не носит инвариантного характера в том смысле, что оно зависит не только от свойства самой группы Γ, но также от свойств обобщенной фундаментальной области F. В следующем параграфе для специального класса областей мы дадим инвариантное определение мажорантной функции.

Определение 6. Непрерывная положительная функция $\alpha(z)$ называется мажорантной функцией, если выполняются следующие условия:

1) $\alpha(\gamma z) = |j_\gamma(z)|^{-2}\alpha(z)$ для всех $z \in D$ и $\gamma \in \Gamma$.

2) Положим $\zeta = \xi + i\eta = \varphi_k z$, $h(\zeta) = \alpha(z)\,|j_{\varphi_k}(z)|^{-2}$. Тогда $h(\zeta)$ ограничена в Σ_k и существует такая константа $b_0 > 0$, что

$$\max_{\xi} \frac{h(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)}{h(\zeta_0)} \leqslant e^{b_0} \text{ для } \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Sigma_k'.$$

Отметим, что если $h(\zeta)$ ограничена в Σ_k снизу положительной константой, то последнее неравенство будет автоматически выполняться.

Определение 7. Аналитическая в области D функция $f(z)$ называется автоморфной формой веса m (m не предполагается обязательно целым числом) с мажорантой $\alpha(z)$, если имеет место функциональное уравнение

$$f(\gamma z) = j_\gamma^m(z) f(z) \text{ для всех } z \in D \text{ и } \gamma \in \Gamma$$

и существует такая положительная константа c, что

$$|f(z)\alpha^{\frac{m}{2}}(z)| \leqslant c \text{ для всех } z \in D.$$

ЛЕММА 5. *Если группа* Γ *имеет допустимую обобщенную фундаментальную область* F, *то размерность* N_m *пространства автоморфных форм с мажорантой* α *веса* m *конечна и, более того, справедливо неравенство*

$$N_m \leqslant cm^n \tag{21}$$

(n — *комплексная размерность области* D), *причем* c *зависит только от* α, F, Γ *и* D.

Доказательство. Мы будем проводить доказательство по следующему плану. Вначале мы установим возможность разложения автоморфных форм $f(z)$ в областях S_k в некоторые ряды. Затем мы покажем, что если достаточное число первых членов этих рядов равно нулю, то отношение $f(z)/\alpha^{\frac{m}{2}}(z)$ заведомо достигает максимума в некоторой строгой подобласти D_0 области D, причем окажется, что для того чтобы считать D_0 не зависящей от m, достаточно потребовать равенства нулю $O(m^n)$ коэффициентов указанных выше рядов. Таким образом, из линейного пространства всех автоморфных форм веса m мы выделим подпространство форм, для которых отношение $f(z)/\alpha^{\frac{m}{2}}(z)$ достигает максимума в D_0.

Оценка размерности этого подпространства производится при помощи леммы 4.

Обозначим какую-нибудь из областей S_k через S. Пусть φ — отображение этой области на нормальную цилиндрическую область Σ с основанием V, а Δ — подгруппа Γ со свойствами 2) и 5).

Рассмотрим функцию

$$\psi(\zeta) = \frac{f(z)}{j_\zeta^m(z)}, \quad \text{где } \zeta = \xi + i\eta = \varphi z. \tag{22}$$

Положим $\tilde{\delta} = \varphi\delta\varphi^{-1}$, где $\delta \in \Delta$. Мы будем иметь:

$$\psi(\tilde{\delta}\zeta) = \frac{f(\delta z)}{j_\varphi^m(\delta z)} = \frac{f(z)}{j_\varphi^m(\delta z) j_\delta^m(z)} = \frac{f(z)}{j_{\varphi\delta}^m(z)} = \frac{f(z)}{j_{\tilde{\delta}\varphi}^m(z)} = \frac{f(z)}{j_{\tilde{\delta}}^m(\varphi z) j_\varphi^m(z)} = \psi(\zeta), \tag{23}$$

так как $j_{\tilde{\delta}}(\zeta) = 1$, поскольку $\tilde{\delta}$ является преобразованием вида $z \to z + c$. Не ограничивая общности, можно считать, что группа $\tilde{\Delta} = \varphi\Delta\varphi^{-1}$ состоит из всех преобразований вида

$$z \to z + r, \tag{24}$$

где r — целочисленный вектор. Следовательно, $\psi(\zeta)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\sum_r A_r e^{2\pi i (r, \zeta)}, \tag{25}$$

где $(r, \zeta) = \Sigma r_k \zeta_k$ означает скалярное произведение r и ζ.

Заметим, что $\psi(z)$ ограничена в области Σ. Действительно,

$$|\psi(\zeta)| = |f(z) j_\varphi^{-m}(z)| = |f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z)|\, h^{\frac{m}{2}}(\zeta) = O(1). \tag{26}$$

Следовательно, $A_r = 0$ для $r \overline{\in} V'$, где V' — конус, взаимный к полуконусу V.

Введем в рассмотрение функцию

$$D(\xi, \eta; \tau) = \sum_{|r|>\tau} e^{2\pi i [(r, \xi) + \mu i (r, \eta)]}, \tag{27}$$

где τ — некоторое положительное число, $\xi + i\eta \in \Sigma$, $\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, а λ — константа, фигурирующая в пункте 4) определения допустимой обобщенной фундаментальной области.

Оценим $D(\xi, \eta; \tau)$:

$$|D(\xi, \eta; \tau)| \leqslant \sum_{\substack{|r|>\tau \\ r \in V'}} e^{-2\pi\mu (r, \eta)} \leqslant \sum_{k=\tau}^{\infty} k^n e^{-2\pi\mu c k} \tag{28}$$

(c в последней сумме означает константу, фигурирующую в определении нормального полуконуса).

Из последней формулы тривиально вытекает существование таких положительных констант a и b, что

$$|D(\xi, \eta; \tau)| \leqslant a e^{-b\tau} \tag{29}$$

для всех $\xi + i\eta \in \Sigma$.

Предположим, что в ряду (25) $A_r = 0$ для всех $|r| \leqslant \tau$. Тогда мы будем иметь:

$$\psi(\zeta_0) = \int_K \psi(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)\, D(\xi_0 - \xi_1, \eta_0; \tau)\, d\xi, \tag{30}$$

где $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ — любая точка из Σ', а K — параллелепипед

$$|\xi_1| \leqslant \frac{1}{2}, \ldots, |\xi_n| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Следовательно, для $\zeta_0 \in \Sigma'$ имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &|\psi(\zeta_0)| \leqslant a e^{-b\tau} \max_{\xi} |\psi(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)|, \\ &|\psi(\zeta_0) h^{-\frac{m}{2}}(\zeta_0)| \leqslant a e^{-b\tau} \max_{\xi} \left(\frac{h(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)}{h(\zeta_0)}\right)^{\frac{m}{2}}, \\ &\max_{\xi} \left(\frac{\psi(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)}{h^{\frac{m}{2}}(\xi + i\lambda^{-1}\eta_0)}\right) \leqslant a e^{-b\tau + b_* m} \sup_{\zeta \in \Sigma} \left|\frac{\psi(\zeta)}{h^{\frac{m}{2}}(\zeta)}\right|, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где b_0 — константа из пункта 2) определения мажорантной функции.

Из последнего неравенства вытекает возможность такого выбора константы b_1, что при $\tau = b_1 m$ будет иметь место неравенство

$$\sup_{\zeta \in \Sigma'} |\psi(\zeta) h^{-\frac{m}{2}}(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\zeta \in \Sigma} |\psi(\zeta) h^{-\frac{m}{2}}(\zeta)|. \tag{32}$$

Поскольку

$$f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z) = \psi(\zeta) h^{-\frac{m}{2}}(\zeta),$$

из (32) следует, что если $f(z)$ — автоморфная форма веса m, для которой коэффициенты A_r рядов (25) для всех Σ_k равны 0 при $|r| \leqslant b_2 m$, где b_2 — соответствующим образом выбранная константа, то имеет место неравенство:

$$\sup_{\substack{z \in \varphi_k^{-1}\Sigma_k' \\ k=1,\ldots,p}} \left|\frac{f(z)}{\alpha^{\frac{m}{2}}(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2} M, \tag{33}$$

где

$$M = \sup_{z \in D} |f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z)|.$$

Обозначим

$$D_0 = F - \sum_k F \cap \varphi_k^{-1} \Sigma_k'.$$

Из пунктов 1) и 4) определения допустимой обобщенной фундаментальной области ясно, что D_0 содержится строго внутри D. Ввиду того что отношение $|f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z)|$ инвариантно при преобразованиях из группы Γ, должна существовать последовательность точек $z_1, \ldots, z_l, \ldots \in F$, для которых

$$\lim_{l \to \infty} |f(z_l)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z_l)| = M. \tag{34}$$

Из (33) вытекает, что все члены этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа, принадлежат D_0. Таким образом, каждая автоморфная форма веса m, у которой для всех Σ_k коэффициенты рядов (25) равны нулю при $|r| \leqslant b_2 m$, достигает максимума в замыкании D_0.

Обозначим через L совокупность автоморфных форм веса m, у которых для всех Σ_k $A_r = 0$ при $|r| \leqslant b_2 m$. Очевидно, что L — линейное подпространство пространства всех автоморфных форм веса m индекса, не превосходящего $O(m^n)$. Таким образом, остается показать, что размерность L не превосходит $O(m^n)$. Обозначим через D_1 какую-нибудь область, содержащуюся строго внутри области D и содержащую в качестве строгой подобласти D_0. Очевидно, что для любой функции $f \in L$ имеют место неравенства:

$$\sup_{z \in D_1} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in D_0} |f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z)| \sup_{z \in D_1} \alpha^{\frac{m}{2}}(z) \leqslant \alpha_1^m \alpha_2^m \sup_{z \in D_0} |f(z)|, \qquad (35)$$

где

$$\alpha_1 = \sup_{z \in D_1} \alpha^{\frac{1}{2}}(z), \quad \alpha_2 = \sup_{z \in D_0} \alpha^{-\frac{1}{2}}(z).$$

Следовательно, согласно лемме 4, размерность L не превосходит $O(m^n)$.

§ 3. Дискретные группы в областях, являющихся произведениями кругов Зигеля

Кругом Зигеля степени p [см. (1), стр. 139] называется область, состоящая из комплексных симметрических матриц Z порядка p таких, что $Z\bar{Z} < E$. В дальнейшем круг Зигеля степени p мы будем обозначать через K_p. Очевидно, что K_p — область в $\frac{p(p+1)}{2}$-мерном комплексном пространстве.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать дискретные группы в областях, являющихся произведением кругов Зигеля, и укажем некоторые ограничения на дискретную группу Γ, достаточные для ее нормальности. Предварительно рассмотрим некоторые геометрические понятия, связанные с кругом Зигеля. Очевидно, что граница круга Зигеля K_p состоит из всех комплексных симметрических матриц Z, для которых хотя бы одно из собственных значений матрицы $Z\bar{Z}$ равно 1, а остальные не превосходят 1. Для нас особенно важна будет часть границы, состоящая из комплексных симметрических матриц Z, для которых имеет место равенство

$$Z\bar{Z} = E. \qquad (36)$$

Эту часть границы мы будем называть остовом и обозначать через $\tilde{K}_p$. Остовом области

$$D = K_{p_1} \times \cdots \times K_{p_n}$$

назовем соответственно

$$\tilde{D} = \tilde{K}_{p_1} \times \cdots \times \tilde{K}_{p_n}.$$

Если Z_0 — некоторая точка остова круга Зигеля K_p, то формула

$$T = iU(Z_0 + Z)(Z_0 - Z)^{-1}U^{-1}, \quad UZ_0U' = U\bar{U}' = E \tag{37}$$

определяет отображение круга Зигеля на так называемую обобщенную верхнюю полуплоскость H_p:

$$\operatorname{Im} T > 0, \quad T = T'. \tag{38}$$

Это отображение переводит Z_0 в бесконечно удаленную точку. Нетрудно показать, что якобиан отображения (37) равен

$$2^{\frac{p(p+1)}{2}} \| Z - Z_0 \|^{-p-1}.$$

Под окрестностью точки Z_0 мы будем понимать прообраз множества точек верхней полуплоскости, определяемого неравенством

$$Y > Y_0. \tag{39}$$

В частности, для случая одного переменного окрестность точки z_0 есть внутренность круга, касающегося единичного круга в точке z_0.

Если область D есть произведение кругов Зигеля, то окрестностью точки остова мы назовем произведение окрестностей, взятых в каждом сомножителе.

Перейдем к рассмотрению дискретных групп.

Основным для нас будет служить понятие рациональной точки остова относительно дискретной группы Γ. Это понятие является обобщением понятия параболической точки для фуксовой группы [см. (4), стр. 72].

Определение 1. Точка Z_0 остова границы D называется рациональной точкой для группы Γ, если при отображении D на произведение обобщенных верхних полуплоскостей, переводящем точку Z_0 в бесконечность, группа Γ перейдет в группу $\tilde{\Gamma}$, содержащую подгруппу параллельных переносов той же размерности, что и комплексная размерность D.

Отметим, что множество рациональных точек инвариантно относительно преобразований из группы Γ.

При помощи введенных нами понятий можно гораздо проще сформулировать ограничения, наложенные на группу Γ в предыдущем параграфе. Именно, легко видеть, что обобщенная фундаментальная область будет допустимой (в смысле предыдущего параграфа), если существует конечное число рациональных точек остова $Z_1, \ldots, Z_h$ таких, что

$$F \subseteq \sum_{k=1}^{h} Q_k, \tag{40}$$

где $Q_1, \ldots, Q_h$ — некоторые окрестности точек $Z_1, \ldots, Z_h$. Начиная с этого момента мы будем говорить, что обобщенная фундаментальная область является допустимой, если для нее выполняется сформулированное выше условие. Далее, мы соответственно видоизменим определение мажорантной функции, введя понятие нормальной мажорантной функции.

Определение 2. Непрерывная положительная функция $\alpha(z)$ назы-

вается нормальной мажорантной функцией для группы Γ, если выполняются следующие условия:

1) $\alpha(\gamma z) = |j_\gamma(z)|^{-2}\alpha(z)$ для всех $z \in D = K_{p_1} \times \cdots \times K_{p_n}$ и $\gamma \in \Gamma$.

2) Пусть $Z_1, \ldots, Z_h$ имеют тот же смысл, что и в определении допустимой обобщенной фундаментальной области, φ_k — отображение D на $H_{p_1} \times \cdots \times H_{p_n}$, при котором Z_k переходит в бесконечность. Тогда отношение

$$\frac{\alpha(z)}{|j_{\varphi_k}(z)|^2}, \quad z \in Q \quad (Q \text{ — любая окрестность } Z_k),$$

заключено между двумя положительными константами.

Отметим, что если Γ имеет допустимую обобщенную фундаментальную область, то все нормальные мажорантные функции между собой эквивалентны, т. е. отношение любых двух ограничено сверху и снизу положительными константами. Указанное обстоятельство позволяет нам определения автоморфной формы и автоморфной функции сформулировать в инвариантном виде.

Определение 3. Аналитическая в области D функция $f(z)$ называется автоморфной формой веса m (m — не обязательно целое число), если имеет место функциональное уравнение:

$$f(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) f(z) \quad \text{для всех } z \in D \text{ и } \gamma \in \Gamma \tag{41}$$

и существует такая положительная константа c, что

$$|f(z)\alpha^{-\frac{m}{2}}(z)| \leqslant c, \tag{42}$$

где $\alpha(z)$ — нормальная мажорантная функция.

Определение 4. Если мероморфная функция $f(z)$ может быть представлена в виде отношения автоморфных форм одинакового веса, то $f(z)$ называется автоморфной функцией.

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с дискретными группами, обладающими допустимой обобщенной фундаментальной областью, так что сформулированные выше определения 3 и 4 будут применяться на протяжении всей работы.

ТЕОРЕМА I. *Пусть* Γ — *дискретная группа автоморфизмов области* $D = K_{p_1} \times \cdots \times K_{p_n}$, *обладающая допустимой обобщенной фундаментальной областью, и* $\alpha(z)$ — *нормальная мажорантная функция. Если отношение*

$$\frac{\sum |j_\gamma(z)|^2}{\alpha(z)} \tag{43}$$

ограничено сверху, то

1) *для любых двух не эквивалентных относительно* Γ *точек существует регулярная в этих точках автоморфная функция, принимающая в них различные значения;*

2) *для любой точки* $z \in D$, *не являющейся неподвижной точкой ни для одного из преобразований* $\gamma \in \Gamma$, *за исключением тождественного преобразования, существует* $m = \frac{1}{2}\sum p_k(p_k + 1)$ *автоморфных функций, регулярных в* z *и имеющих в* z *отличный от нуля якобиан;*

3) *поле автоморфных функций изоморфно полю алгебраических функций от* m *неизвестных.*

Доказательство. Из (43) вытекает, что ряды Пуанкаре являются автоморфными формами. Поэтому утверждения 1) и 2) нашей теоремы являются следствием лемм 2 и 3 § 1.

Утверждение 3) выводится из леммы 5 § 2 так же, как теорема об алгебраических соотношениях для абелевых функций выводится из оценки для числа линейно независимых якобиевых функций [см. (1), стр. 79].

Сделаем теперь некоторые замечания, облегчающие проверку условия (43).

ЛЕММА 6. *Пусть F — допустимая обобщенная фундаментальная область, $Z_1, \ldots, Z_h$ — рациональные точки основа, $Q_1, \ldots, Q_h$ — их окрестности, φ_k — отображение D на $H_{p_1} \times \cdots \times H_{p_n}$, переводящее Z_k в бесконечность, $F \subset \Sigma Q_k$, $F_k = F \cap Q_k$, $\alpha(z)$ — нормальная мажорантная функция. Если существуют такие положительные константы ρ и ν, что в любом полицилиндре*

$$|\zeta - \zeta_0| < \rho, \tag{44}$$

где $\zeta = \varphi_k z$, ζ_0 — любая точка из $\varphi_k F_k$, содержится не более ν эквивалентных точек, то

$$\frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} |j_\gamma(z)|^2}{\alpha(z)} \leqslant c < \infty \text{ для всех } z \in D. \tag{45}$$

Доказательство. Очевидно формулу (45) достаточно доказать для z, принадлежащих одному фиксированному F_k. Положим $\zeta = \varphi_k z$,

$$k(\zeta) = \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} |j_\gamma(z)|^2}{|j_{\varphi_k}(z)|^2}. \tag{46}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} k(\zeta) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} |j_\gamma(\varphi_k^{-1}\zeta)|^2 |j_{\varphi_k^{-1}}(\zeta)|^2 = \sum |j_{\gamma_k^{-1}}(\zeta)|^2 = \\ &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} |j_{\varphi_k^{-1}\tilde{\gamma}}(\zeta)|^2 = \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} |j_{\varphi_k^{-1}}(\tilde{\gamma}\zeta)|^2 |j_{\tilde{\gamma}}(\zeta)|^2, \end{aligned} \tag{47}$$

где $\tilde{\Gamma} = \varphi_k \Gamma \varphi_k^{-1}$ — группа преобразований верхней полуплоскости, соответствующая группе Γ. Обозначим через $N(\zeta_0)$ полицилиндр $|\zeta - \zeta_0| < \rho$. В силу известного свойства аналитических функций,

$$\begin{aligned} |j_{\varphi_k^{-1}}(\tilde{\gamma}\zeta) j_{\tilde{\gamma}}(\zeta)|^2 &\leqslant \frac{1}{(V\overline{\pi}\rho)^{p(p+1)}} \int_{N(\zeta_0)} \varphi_k^{-1}(\tilde{\gamma}\zeta) j_{\tilde{\gamma}}(\zeta)|^2 \, d\sigma = \\ &= \frac{1}{c(\rho)} \int_{\tilde{\gamma} N(\zeta_0)} |j_{\varphi_k^{-1}}(\zeta)|^2 \, d\sigma. \end{aligned} \tag{48}$$

Следовательно,

$$k(\zeta) \leqslant \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \frac{1}{c(\rho)} \int_{\tilde{\gamma} N(\zeta_0)} |j_{\varphi_k^{-1}}(\zeta)|^2 \, d\sigma \leqslant \frac{\nu}{c(\rho)} \int_{Hp} |j_{\varphi_k^{-1}}(\zeta)|^2 \, d\sigma. \tag{49}$$

Последний интеграл конечен, поскольку D — ограниченная область. Таким образом доказательство леммы закончено.

Заметим, что если для дискретной группы Γ существуют

1) допустимая обобщенная фундаментальная область,

2) нормальная мажорантная функция и

3) выполнено условие (44) леммы 6, то для любой группы Γ_1, соизмеримой с Γ, также имеют место условия 1), 2) и 3). Для доказательства этого предложения достаточно рассмотреть случаи, когда $\Gamma \subset \Gamma_1$ и $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

Пусть F — допустимая обобщенная фундаментальная область для Γ. Положим $F_1 = F$ в первом случае и $F_1 = \Sigma \delta_k F$ в случае, если $\Gamma = \Sigma \Gamma_1 \delta_k$. Нетрудно видеть, что F_1 будет допустимой обобщенной фундаментальной областью для группы Γ_1. Далее, если $\alpha(z)$ — нормальная мажорантная функция для группы Γ, то полагаем

$$\alpha_1(z) = \sum \alpha(\delta_k z) \, | j_{\delta_k}(z) |^2,$$

если $\Gamma_1 = \Sigma \Gamma \delta_k$, и

$$\alpha_1(z) = \alpha(z)$$

в случае, когда $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Во втором случае очевидно, что $\alpha_1(z)$ — нормальная мажорантная функция. Остается лишь проверить, что и в первом случае $\alpha_1(z)$ является нормальной мажорантной функцией.

Пусть z_0 — некоторая рациональная точка для группы Γ, Q — ее окрестность, φ — отображение D на произведение верхних полуплоскостей, переводящее z_0 в бесконечность. Мы должны доказать, что

$$0 < a \leqslant \frac{\alpha_1(z)}{| j_\varphi(z) |^2} \leqslant b < D \text{ для всех } z \in Q.$$

Левое неравенство имеет место, поскольку $\alpha(z) \leqslant \alpha_1(z)$. Для доказательства правого достаточно установить, что

$$\frac{\alpha(\delta z) \, | j_\delta(z) |^2}{| j_\varphi(z) |^2} \leqslant b_0 < \infty \text{ для всех } z \in Q. \tag{50}$$

Сделаем замену $u = \delta z$; тогда формула (50) перепишется в виде:

$$\frac{\alpha(u) \, | j_\delta(\delta^{-1} u) |^2}{| j_\varphi(\delta^{-1} u) |^2} = \frac{\alpha(u)}{| j_{\varphi\delta^{-1}}(u) |^2} \leqslant b_0, \quad u \in \delta Q.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку δQ — окрестность рациональной точки δz_0, а $\varphi\delta^{-1}$ — отображение D на произведение верхних полуплоскостей, переводящее δz_0 в бесконечность.

Для дальнейшего нам будет полезна одна простая лемма о группах матриц, позволяющая во многих случаях устанавливать соизмеримость их.

ЛЕММА 7. *Пусть G — некоторая группа матриц, V_1 и V_2 — рациональные матрицы, вообще говоря, не принадлежащие G, G_{V_1} (G_{V_2}) — подгруппа G, состоящая из матриц $U \in G$, для которых матрица $V_1^{-1} U V_1$ (соответственно $V_2^{-1} U V_2$) целочисленна. Группы G_{V_1} и G_{V_2} всегда соизмеримы.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $V_1 = E$, поскольку в случае необходимости мы можем заменить G на $V_1^{-1} G V_1$. Положим $V = v_0 V_2$, где v_0 выбрано так, чтобы матрица V оказалась целочисленной. Ясно, что $G_V = G_{V_2}$. Обозначим через v определитель V. Рассмотрим подгруппу группы G_E, состоящую из всех матриц

$U \in G_E$, для которых имеет место сравнение

$$U \equiv E \pmod{v}. \tag{51}$$

Очевидно, что эта подгруппа является нормальным делителем конечного индекса группы G_E. Подгруппа (51) содержится в G_V. Действительно, любую матрицу, удовлетворяющую сравнению (51), можно записать в виде

$$U = E + vW,$$

где W — целочисленная матрица. Значит, матрица

$$V^{-1}UV = E + vV^{-1}WV$$

целочисленна. Таким образом, мы показали, что пересечение $G_{V_1} \cap G_{V_2}$ имеет в G_{V_1} конечный индекс. Аналогично устанавливается, что индекс $G_{V_1} \cap G_{V_2}$ в G_{V_2} конечен. Доказательство леммы 7 закончено.

Перейдем к рассмотрению некоторых дискретных групп в верхней полуплоскости.

Как известно [см. ([1]), стр. 120], группа аналитических автоморфизмов верхней полуплоскости степени p описывается следующим образом. Рассмотрим группу всех вещественных матриц U порядка $2p$, для которых

$$U'IU = I, \quad U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Каждой матрице U, удовлетворяющей (52), сопоставим преобразование верхней полуплоскости

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{53}$$

и условимся такое преобразование обозначать через $U(Z)$.

Пусть V — некоторая целочисленная матрица порядка $2p$, вообще говоря, не удовлетворяющая (52). Рассмотрим группу Γ_V преобразований верхней полуплоскости, соответствующих матрицам U, для которых матрица $V^{-1}UV$ целочисленна. Из леммы 7 следует соизмеримость между собой всех групп Γ_V. Группа Γ_E введена Зигелем и в литературе часто называется модулярной группой Зигеля. В работах Зигеля ([5]) и ([6]) дано построение фундаментальной области для нее. Подробное исследование различных вопросов, связанных с построением фундаментальной области для групп Γ_V, имеется в опубликованной на итальянском языке книге Конфорто ([16]).

Покажем, что любая из групп Γ_V сопряжена с такой Γ_V, для которой V имеет следующий специальный вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{pmatrix}, \quad d_1 | d_2 | \ldots | d_p.$$

Положим $R = V'IV$; тогда $W'RW = R$ для всех W вида $V^{-1}UV$, $U \in \Gamma_V$. Обратно, если W — целочисленная матрица, $W'RW = R$, то $VWV^{-1} \in \Gamma_V$. Как известно [см. ([1]), стр. 55], всякую кососимметрическую целочисленную матрицу R при помощи преобразований $R \to N'RN$, где N — цело-

численная унимодулярная матрица, можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Заметим, что если $R_1 = N'R_2N$, где N — целочисленная унимодулярная матрица, то группа унимодулярных целочисленных матриц W, для которых $W'R_1W = R_2$, сопряжена с группой унимодулярных целочисленных матриц W, для которых $W'R_2W = R_2$. Таким образом, мы показали, что Γ_V сопряжена с группой матриц W, для которых $W'RW = R$, где R имеет вид (54). Для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Мы должны показать, что для групп Γ_V выполнены условия теоремы I. Поскольку эти группы соизмеримы между собой, достаточно установить выполнение условий теоремы I для одной из них. Мы сделали это для модулярной группы Зигеля. Отметим, что бесконечно удаленная точка является рациональной точкой, поскольку Γ_E содержит все преобразования вида $Z \to Z + S$, где S — целочисленная симметрическая матрица.

В работах Зигеля ([5]) и ([6]) дано описание фундаментальной области F для Γ_E. Мы не будем подробно излагать все полученные Зигелем результаты относительно строения фундаментальной области, ограничимся лишь формулировкой некоторых из них. Так, Зигель показал [см. ([6])], что фундаментальная область F для группы Γ_E целиком содержится в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и, следовательно, является допустимой.

Перейдем к построению нормальной мажорантной функции. Отметим, что, поскольку мы рассматриваем сейчас дискретные группы на верхней полуплоскости, определение мажорантной функции несколько видоизменяется. Если $\alpha(z)$ — мажорантная функция в круге Зигеля K_p, φ — отображение K_p на H_p, то под мажорантной функцией мы понимаем функцию

$$h(z) = \alpha(\varphi^{-1}z)\,|\,j_{\varphi^{-1}}(z)\,|^2.$$

Условимся матрицы W_1 и W_2 из p строк и $2p$ столбцов называть эквивалентными, если существует такая квадратная матрица A, что $W_2 = AW_1$.

Рассмотрим ряд

$$h(Z) = \sum \| CZ + D \|^{-2p-2}, \tag{56}$$

где $W = (CD)$ пробегает все не эквивалентные между собой матрицы, составленные из последних p строк матриц $U \in \Gamma$. Х. Браун [см. ([9]), стр. 387] доказала, что ряд (56) сходится равномерно в любой окрестности бесконечно удаленной точки остова. Далее, $h(Z) \geqslant 1$, поскольку среди членов ряда (56) есть член, тождественно равный 1. Легко проверить, что для $h(Z)$ справедливо функциональное уравнение мажорантной функции. Мы показали, что $h(Z)$ является нормальной мажорантной

функцией. Докажем, что в данном случае имеют место условия леммы 6. Предварительно введем некоторые понятия. Рассмотрим пространство всех положительных симметрических матриц Y порядка m. Каждая симметрическая матрица однозначно представляется в виде

$$R[Q], \tag{57}$$

где $R = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_m \end{pmatrix}$ — диагональная матрица, $Q = (q_{kl})$ — треугольная, $q_{kl} = 0$ для $k > l$, $q_{kk} = 1$, $k = 1, \ldots, m$. Через $V(t)$, $t > 1$, обозначим множество матриц вида (57), для которых справедливы неравенства:

$$r_k \leqslant t r_{k+1}, \quad 1 \leqslant k < m, \quad |q_{kl}| \leqslant t. \tag{58}$$

В работе Зигеля ([6]) описано отображение верхней полуплоскости H_p на пространство симметрических положительных симплектических матриц порядка $2p$. При этом отображении автоморфизм верхней полуплоскости

$$Z \to U(Z)$$

переходит в преобразование

$$M \to M[U^{-1}], \tag{59}$$

где M — симплектическая положительная симметрическая матрица порядка $2p$. Зигель показал, что существует t со следующим свойством: фундаментальная область F при описанном выше отображении переходит в часть $V(t)$. Из формул, приведенных в работе Зигеля [см. ([6]), стр. 628—633], вытекает существование положительного ρ со свойством: область F_1, состоящая из $Z = (z_{kl}) \in H_p$, для которых существует такая точка $Z^0 = (z^0_{kl}) \in F$, что $|z_{kl} - z^0_{kl}| < \rho$, целиком содержится в прообразе $V(2t)$. Достаточно показать, что существует лишь конечное число $U \in \Gamma_E$, для которых существует такая точка Z, что

$$Z \in F_1, \quad U(Z) \in F_1. \tag{60}$$

Последнее утверждение, ввиду (59), является тривиальным следствием одной леммы Зигеля [см. ([6]), стр. 628—633].

В недавно появившейся работе Кехера ([13]) доказано, что любая регулярная в H_p функция, удовлетворяющая функциональному уравнению модулярной формы для группы Зигеля, является модулярной формой. Отметим, что если бы мы воспользовались этой теоремой Кехера, то отпала бы необходимость в проверке условий леммы 6. Сформулируем полученный нами результат.

ТЕОРЕМА II. *Если* Γ *— группа, соизмеримая с модулярной группой Зигеля, то*

1) *для любых двух не эквивалентных относительно* Γ *точек существует регулярная в этих точках автоморфная функция, принимающая в них различные значения;*

2) *для любой точки* $Z \in H_p$, *не являющейся неподвижной точкой ни для одного из преобразований* $\gamma \in \Gamma$, *за исключением тождественного преобразования, существует* $m = \frac{p(p+1)}{2}$ *автоморфных функций, регулярных в* Z *и имеющих в* Z *отличный от нуля якобиан;*

3) *поле автоморфных функций изоморфно полю алгебраических функций от m неизвестных.*

Мы установим сейчас лемму, позволяющую определять для групп, соизмеримых с модулярной группой Зигеля, минимальное число точек выхода фундаментальной области на остов границы.

Рассмотрим рациональные матрицы w из $2p$ строк и p столбцов, для которых

$$w'Iw = 0, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Пусть Γ — некоторая группа симплектических рациональных матриц. Условимся называть матрицы w_1 и w_2 эквивалентными относительно Γ, если существует такая матрица $U \in \Gamma$, что

$$Uw_1 = w_2\alpha,$$

где α — невырожденная квадратная матрица порядка p.

Обозначим символом ∞ бесконечно удаленную точку остова H_p. Легко проверить, что $U_1(\infty) = U_2(\infty)$ (U_1 и U_2 — преобразования вида (53)) тогда и только тогда, когда существует такая невырожденная квадратная матрица α порядка p, что

$$w_1 = w_2\alpha,$$

где w_1 и w_2 — матрицы, состоящие из первых p столбцов матриц U_1 и U_2.

ЛЕММА 8. *Пусть* Γ — *группа, соизмеримая с модулярной группой Зигеля. Минимальное число точек выхода фундаментальной области для* Γ *равно числу классов* $\psi(\Gamma)$, *не эквивалентных относительно* Γ *матриц* w.

Доказательство. Пусть Q — окрестность бесконечно удаленной точки остова, являющаяся обобщенной фундаментальной областью для модулярной группы Зигеля. Из соизмеримости Γ и Γ_E вытекает существование такого конечного множества преобразований $U_1, \ldots, U_N \in \Gamma_E$, что $F_1 = \sum_{k=1}^{N} U_k(Q)$ является обобщенной фундаментальной областью для Γ.

Точками выхода F_1 на остов границы являются следующие точки: $U_1(\infty), \ldots, U_N(\infty)$. Если, например, матрицы w_1 и w_2, состоящие из первых p столбцов U_1 и U_2, эквивалентны относительно группы Γ ($w_2 = Uw_1\alpha$, $U \in \Gamma$), то

$$F_2 = \sum_{k=2}^{N} U_k(Q) + UU_1(Q)$$

является обобщенной фундаментальной областью. При помощи такого процесса легко доказать существование обобщенной фундаментальной области с числом точек выхода на остов границы не большим, чем $\psi(\Gamma)$.

Чтобы доказать, что число точек выхода на остов границы для любой обобщенной фундаментальной области F не меньше $\psi(\Gamma)$, достаточно установить следующее предложение:

Пусть $U_1(\infty)$ и $U_2(\infty)$ (U_1 и $U_2 \in \Gamma_E$) — две не эквивалентные относительно Γ точки остова. Тогда для всякой окрестности Q_1 точки $U_1(\infty)$ существует окрестность Q_2 точки $U_2(\infty)$, любая точка которой не эквивалентна никакой точке Q_1.

Докажем это утверждение от противного. Пусть Q — некоторая окрестность, $U_2(\infty)$, $Z \in Q$, $V(Z) \in Q_1$, $V \in \Gamma$. При помощи теории приведения, аналогично тому, как это сделано при проверке условий леммы 6, легко показать, что V может иметь лишь конечное число существенно различных значений. Из этого факта при помощи предельного перехода следует эквивалентность точек $U_1(\infty)$ и $U_2(\infty)$. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

ГЛАВА II. СИНГУЛЯРНЫЕ АБЕЛЕВЫ МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Общая схема построения абелевых модулярных функций была описана нами во введении. В настоящей главе мы подробнее рассмотрим модулярные функции, связанные с абелевыми функциями, алгебра умножений которых изоморфна абсолютно вещественному полю алгебраических чисел. Мы докажем существование таких модулярных функций и установим, что поле, образованное ими, изоморфно полю алгебраических функций.

§ 1. Некоторые леммы

Как известно [см. (1)], необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица ω из p строк и $2p$ столбцов служила матрицей периодов некоторой невырожденной мероморфной функции заключаются в следующем.

Существует рациональная кососимметрическая матрица R порядка $2p$ такая, что

$$\begin{aligned} &1)\ \omega R \omega' = 0, \\ &2)\ i\omega \bar{R} \omega' > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Такая матрица R называется главной матрицей для ω. Может оказаться, что для матрицы ω существует несколько главных матриц. В этом случае ω называется сингулярной матрицей периодов. Рациональная квадратная матрица A порядка $2p$ называется умножением матрицы ω, если существует такая невырожденная квадратная матрица α с комплексными элементами, что

$$\alpha\omega = \omega A. \tag{2}$$

Известно, что если R_1 и R_2 — главные матрицы, то матрица $R_1 R_2^{-1}$ является умножением [см. (15)]. Совокупность умножений образует, очевидно, некоторую алгебру над полем рациональных чисел.

Все алгебры, которые могут служить алгебрами умножений для матриц, удовлетворяющих (1), были перечислены А. А. Албертом [см. (12)]. В дальнейшем мы ограничимся лишь случаем, когда алгебра умножений изоморфна абсолютно вещественному полю алгебраических чисел.

Мы будем употреблять следующие обозначения:

1) k — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n.

2) $\mathfrak{A}$ — некоторое представление поля k рациональными матрицами порядка $2p$. Нас будут интересовать лишь такие представления, для которых существует невырожденная рациональная кососимметрическая матрица R порядка $2p$ такая, что

$$AR = RA' \text{ для всех } A \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Можно показать, что в этом случае $n \geqslant p$.

3) $\Omega_{\mathfrak{A}, R}$ — совокупность всех матриц ω, для которых $\mathfrak{A}$ служит алгеброй умножений и имеет место условие (1) с матрицей R.

4) $L_{\mathfrak{A}, R}$ — группа всех целочисленных унимодулярных матриц U со следующим свойством: из $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}, R}$ следует, что $\omega U' \in \Omega_{\mathfrak{A}, R}$.

5) $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}, R}$ называется матрицей общего положения, если ее алгебра умножений совпадает с $\mathfrak{A}$.

Условимся, далее, $\varkappa \in k$ называть абсолютно положительным числом, если все его сопряженные положительны. Очевидно $\varkappa$ будет тогда и только тогда абсолютно положительным, когда соответствующая ему в алгебре $\mathfrak{A}$ матрица A будет иметь только положительные собственные значения. Такую матрицу A мы также будем называть абсолютно положительной.

ЛЕММА 1. *Совокупность главных матриц R для любой фиксированной матрицы $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ общего положения совпадает с совокупностью матриц вида AR_0, где $A \in \mathfrak{A}$ — абсолютно положительная матрица.*

Доказательство. Обозначим RR_0^{-1} через A. Поскольку A — умножение, существует такая матрица α, что

$$\alpha\omega = \omega A. \tag{4}$$

Мы имеем:

$$i\overline{\alpha\omega}R\omega' = i\bar{\omega}AR\omega' = i\omega RA'\omega' = i\omega R\omega'\alpha'. \tag{5}$$

Так как $i\bar{\omega}R\omega' = h$ — эрмитова положительно определенная матрица, то все собственные значения α вещественны. Заменяя в случае необходимости ω на $\beta\omega$, можно добиться того, чтобы h оказалась единичной матрицей. Тогда

$$\alpha = i\bar{\omega}AR\omega' > 0 \tag{6}$$

и, следовательно, все собственные значения α положительны. В этом случае все собственные значения матрицы A будут положительными, поскольку [см. ([15])]

$$|A - \lambda E| = |\alpha - \lambda e|\,|\bar{\alpha} - \bar{\lambda} e|. \tag{7}$$

Обратно, пусть A — абсолютно положительный элемент алгебры $\mathfrak{A}$. В силу (3), $R = AR_0$ — кососимметрическая матрица. Следовательно,

$$\alpha = i\bar{\omega}AR\omega' \tag{8}$$

— положительная эрмитова матрица.

Из доказанной леммы вытекает, что совокупность главных матриц одна и та же для всех матриц ω общего положения. Эту совокупность мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{R}$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}, R}$ — некоторая матрица общего положения, B — рациональная квадратная матрица порядка $2p$; если $\omega_1 = \omega B \in \Omega_{\mathfrak{A}, R}$, то $B\mathfrak{R}B' = \mathfrak{R}$. Обратно, если $B\mathfrak{R}B' = \mathfrak{R}$, то*

$$\Omega_{\mathfrak{A}, R}B = \Omega_{\mathfrak{A}, R}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $R_1 \in \mathfrak{R}$, тогда

$$0 < i\omega_1 R_1 \bar{\omega}_1' = i\bar{\omega}BRB'\omega' \tag{10}$$

и, следовательно, согласно лемме 1,

$$BR_1B' \subseteq \mathfrak{N}, \tag{11}$$

значит,

$$B\mathfrak{N}B' \subseteq \mathfrak{N}. \tag{12}$$

Так как все матрицы $R \in \mathfrak{N}$ — невырожденные, то из (12) вытекает, что B — невырожденная матрица. Если бы матрица ω_1 была матрицей общего положения, то мы могли бы сразу написать, что

$$B^{-1}\mathfrak{N}B'^{-1} \in \mathfrak{N}. \tag{13}$$

Для обоснования справедливости (13) в случае, если ω_1 не является матрицей общего положения, достаточно заметить, что пересечение совокупности $\mathfrak{N}_\omega$, главных матриц для ω_1 с совокупностью матриц вида AR_0, $A \in \mathfrak{A}$, всегда равно $\mathfrak{N}$ (это утверждение легко доказывается методом леммы 1). Обратно, если $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A},R}$ и $B\mathfrak{N}B' = \mathfrak{N}$, то для любой матрицы R

$$i(\bar{\omega}B)R_1(\omega B)' = i\omega BR_1B'\omega' > 0. \tag{14}$$

Следовательно, алгебра умножений матрицы $\omega_1 = \omega B$ содержит все абсолютно положительные элементы из $\mathfrak{A}$, а значит, все вообще элементы $\mathfrak{A}$. Таким образом, лемма полностью доказана. Из доказанной леммы вытекает, что группа $L_{\mathfrak{A},R}$ может быть охарактеризована как группа всех унимодулярных матриц U таких, что

$$U'\mathfrak{N}U = \mathfrak{N}. \tag{15}$$

Рассмотрим следующие подгруппы этой группы:

1) $L^0_{\mathfrak{A},R} = L_{\mathfrak{A},R} \cap \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ — алгебра, состоящая из матриц, транспонированных к матрицам, входящим в $\mathfrak{A}$,

2) $L^1_{\mathfrak{A},R}$ — совокупность матриц U, для которых $U'RU = R$ при всех $R \in \mathfrak{N}$.

Легко проверить, что обе подгруппы являются нормальными делителями.

Определение 1. Модулярной группой $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ называется фактор-группа группы $L_{\mathfrak{A},R}$ по $L^1_{\mathfrak{A},R}$.

Для нас наиболее важна будет подгруппа модулярной группы $\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$, являющаяся фактор-группой $L^1_{\mathfrak{A},R}$ по $L^0_{\mathfrak{A},R}$. Нетрудно видеть, что $\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$ — нормальный делитель в $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$.

Мы покажем сейчас, что модулярная группа по существу совпадает с $\Gamma_{,R}$.

ЛЕММА 3. *Фактор-группа* $\Gamma_{\mathfrak{A},R}/\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$ *конечна.*

Доказательство. Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{A}$ как линейное пространство над полем рациональных чисел. Сопоставим каждой матрице $U \in L_{\mathfrak{A},R}$ линейное преобразование

$$A \to U'ARUR^{-1} \tag{16}$$

и посмотрим, каким линейным преобразованиям соответствуют матрицы

$$U = A_0' \in L^0_{\mathfrak{A},R}, \qquad A_0 \in \mathfrak{A}.$$

Ясно, что $A_0R = RA_0'$ и, значит,

$$A_0ARA'R^{-1} = A_0AA_0 = A_0^2A. \tag{17}$$

Очевидно линейные преобразования (16) являются унимодулярными преобразованиями, переводящими в себя конус P абсолютно положительных элементов $A \in \mathfrak{A}$. Такие преобразования являются либо умножениями всех элементов A на некоторый абсолютно положительный элемент, либо автоморфизмами поля k, либо композицией первых и вторых. Действительно, пусть φ — унимодулярное преобразование, переводящее в себя конус P абсолютно положительных элементов $A \in \mathfrak{A}$. Обозначим через A_0 элемент, в который φ переводит E. Так как φ — унимодулярное преобразование, то A_0 есть единица поля k.

Пусть ψ означает преобразование

$$A \to A_0A.$$

Очевидно, что $\psi^{-1}\varphi(E) = E$. Поскольку преобразование $\psi^{-1}\varphi$ переводит в себя конус P, оно есть осеподстановка, и, следовательно, некоторый автоморфизм поля k. Рассмотрим фактор-группу группы унимодулярных преобразований, переводящих в себя P, по подгруппе, состоящей из преобразований (17). Очевидно, что эта фактор-группа конечна (можно показать, что ее порядок — делитель $n!\ 2^n$) и что интересующая нас фактор-группа есть ее подгруппа.

Введем для $\Omega_{\mathfrak{A},R}$ многообразие, играющее роль верхней полуплоскости. Если $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A},R}$, то

$$\omega_1 = \alpha\omega \in \Omega_{\mathfrak{A},R},$$

где α — любая невырожденная квадратная матрица порядка n. Условимся говорить, что ω и ω_1 эквивалентны, если существует такая невырожденная матрица α, что $\omega_1 = \alpha\omega$. Очевидно, введенное так понятие эквивалентности транзитивно, симметрично и рефлексивно. Следовательно, мы можем разбить $\Omega_{\mathfrak{A},R}$ на классы, состоящие из эквивалентных матриц ω. Множество этих классов обозначим через $H_{\mathfrak{A},R}$. В дальнейшем $H_{\mathfrak{A},R}$ будет играть роль верхней полуплоскости. Если $\mathfrak{A}$ — поле рациональных чисел, то $H_{\mathfrak{A},R}$ есть так называемая обобщенная верхняя полуплоскость степени p.

ЛЕММА 4. *Если $\mathfrak{A}$ — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n, то $H_{\mathfrak{A},R}$ — произведение n обобщенных верхних полуплоскостей степени $p_0 = p/n$.*

Обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}$ совокупность всех матриц вида $\lambda_1A_1 + \cdots + \lambda_sA_s$, где $A_1, \ldots, A_s \in \mathfrak{A}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — любые вещественные числа. Поскольку первоначальная алгебра $\mathfrak{A}$ была изоморфна абсолютно вещественному полю алгебраических чисел степени n, то алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ является прямой суммой n полей вещественных чисел. Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}$ совокупность матриц вида AR_0, где $A \in \mathfrak{A}$ — матрица с положительными собственными значениями. Очевидно, что если $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A},R}$, а $R_1 \in \overline{\mathfrak{N}}$, то $R_1' = -R_1$ и

$$\omega R_1\omega' = 0, \quad i\bar{\omega}R_1\omega' > 0\ . \tag{18}$$

Покажем, что существует такая вещественная матрица V, что

$$VAV^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_{2p_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n e_{2p_0} \end{pmatrix}, \quad p_0 = p/n, \quad A \in \overline{\mathfrak{A}} \tag{19}$$

(e_s — единичная матрица порядка s, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественные числа) и

$$VR_0V' = \begin{pmatrix} \lambda_1 j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n j \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & e_{p_0} \\ -e_{p_0} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Действительно, в силу того что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна прямой сумме n полей вещественных чисел, существует такая вещественная матрица W, что WAW^{-1} имеет вид (19) для всех $A \in \overline{\mathfrak{A}}$. Легко проверить, что для всех $A \in W\overline{\mathfrak{A}}W^{-1}$

$$AR_1 = R_1A', \text{ где } R_1 = WRW' \tag{21}$$

и, следовательно, R_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \end{pmatrix}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — квадратные кососимметрические матрицы порядка $2p_0$, а на остальных местах стоят нули. Ясно, что существуют такие вещественные квадратные матрицы $w_1, \ldots, w_n$ порядка $2p$, что $w_k\rho_k w_k' = j$, $k = 1, \ldots, n$.

Введем обозначение:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $V = \tilde{W}W$ удовлетворяет (20).

Заменим ω на ωV^{-1}; тогда из (18) получим, что

$$\omega R\omega' = 0 \quad i\bar{\omega}R\omega' > 0 \text{ для всех } R \text{ вида} \begin{pmatrix} \lambda_1 j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n j \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Покажем, что каждая ω, удовлетворяющая (22), может быть умножением слева на невырожденную комплексную матрицу β приведена к виду

$$\begin{pmatrix} z_1 e_{p_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n e_{p_0} \end{pmatrix}, \quad z_k' = z_k, \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \tag{23}$$

Прежде всего заметим, что каждая матрица ω эквивалентна такой, для

которой имеет место равенство

$$\bar{i}\bar{\omega}R_1\omega' = e_p, \text{ где } R_1 = \begin{pmatrix} j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & j \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Действительно, $h = i\omega R_1\omega'$ — эрмитова положительно определенная матрица, и, значит, существует такая матрица β, что $\bar{\beta}h\beta' = e_p$. Если A — матрица вида (19) и $\alpha\omega = \omega A$, то

$$\bar{\alpha} = \bar{i}\bar{\alpha}\bar{\omega}R_1\omega' = i\bar{\omega}AR_1\omega' = i\bar{\omega}R_1A'\omega' = \alpha'. \tag{25}$$

Поскольку совокупность матриц α, соответствующих всем матрицам A вида (19), образует коммутативную алгебру, изоморфную прямой сумме n полей вещественных чисел, их можно одновременно привести к диагональному виду. Ввиду (25), это можно сделать при помощи унитарной матрицы. Будем рассматривать ω как матрицу, составленную из клеток размером p_0 на $2p_0$:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} \ldots \omega_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega_{n1} \ldots \omega_{nn} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Из (22) получаем, что

$$\omega_{kk}j\omega_{kt}' = 0 \text{ для всех } k \text{ и } t,$$
$$i\bar{\omega}_{kk}j\omega_{kt}' = 0, \quad k \neq t,$$
$$i\bar{\omega}_{kk}j\omega_{kk}' = e_{p_0}.$$

Следовательно [см. ([15])], ω в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}, \quad \omega_k j\omega_k' = 0, \quad i\bar{\omega}_k j\omega_k' > 0. \tag{27}$$

Для завершения доказательства остается лишь заметить, что существуют такие матрицы $\beta_1, \ldots, \beta_n$, что

$$\beta_k \omega_k = (z_k e_{p_0}).$$

Таким образом, мы показали, что каждая ω, удовлетворяющая (22), эквивалентна ω вида (23). Очевидно, что в каждом классе эквивалентных ω может быть только одна вида (23). Доказательство леммы 4 закончено.

Отметим в заключение, что если бы мы провели конструкцию модулярной группы, считая элементы всех рассматриваемых в этой конструкции матриц любыми вещественными числами, а не только целыми, то мы получили бы группу всех аналитических автоморфизмов $H_{\mathfrak{A},R}$.

§ 2. Симплектическое пространство над полем рациональных чисел

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопросы, связанные с подсчетом минимального числа точек, в которых фундаментальная область выходит на остов границы. Для групп Γ_U, введенных в § 3 главы I,

мы сведем (см. лемму 5) подсчет минимального числа $\psi(\Gamma_U)$ точек выхода фундаментальной области на остов границы к некоторой арифметической задаче. При помощи этой редукции мы вычислим $\psi(\Gamma_U)$ в ряде случаев, выясним, когда $\psi(\Gamma_U) = 1$ и укажем некоторые свойства $\psi(\Gamma_U)$ (лемма 6), облегчающие ее вычисление в общем случае. В конце параграфа мы установим одно предложение, которое будет использовано в дальнейшем при доказательстве того, что модулярная группа Гильберта — Зигеля обладает допустимой фундаментальной областью.

Обозначим через L_{2p} $2p$-мерное векторное пространство над полем рациональных чисел, в котором задано невырожденное кососимметрическое скалярное произведение (x, y). Такое пространство часто называют симплектическим пространством, а группу аффинных преобразований, сохраняющих скалярное произведение, — симплектической группой.

Нуль-пространством условимся называть p-мерное подпространство, скалярное произведение любых двух векторов которого равно нулю. Два нуль-пространства мы назовем рационально эквивалентными, если существует симплектическое преобразование, переводящее одно в другое. Если же это преобразование задается матрицей с целыми элементами, то такие нуль-пространства назовем эквивалентными. Рассмотрим в L_{2p} решетку G_{2p} всех целочисленных векторов. Пусть скалярное произведение любых векторов L_{2p} является целым числом.

Хорошо известно [см. ([1]), стр. 55], что в G_{2p} существует базис, в котором матрица кососимметрической формы, задающей скалярное произведение, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{pmatrix}, \quad d_1 | d_2 | \ldots | d_p. \tag{28}$$

Числа $d_1, \ldots, d_p$ мы в дальнейшем будем называть инвариантами симплектической метрики. Отметим, что элементарные делители кососимметрической матрицы R с инвариантами $d_1, \ldots, d_p$ имеют вид

$$d_1, d_1, d_2, d_2, \ldots, d_p, d_p.$$

Из этого вытекает, что две кососимметрические матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда у них совпадают их элементарные делители.

Пусть Q — некоторое нуль-пространство. Обозначим через $x_1, \ldots, x_p$ какой-нибудь базис подрешетки решетки G_{2p}, составленной из всех векторов G_{2p}, содержащихся в Q. Покажем, что этот базис можно дополнить до базиса всей решетки. Очевидно, достаточно доказать следующее.

Пусть G — решетка, состоящая из всех векторов с целыми координатами в n-мерном пространстве, V — $(n-1)$-мерное линейное подпространство, G_1 — подрешетка решетки G, состоящая из всех векторов G, принадлежащих V. Любой базис G_1 может быть дополнен до базиса G.

Пусть, далее,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1,1} & \ldots & x_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{29}$$

— матрица некоторого базиса G_1. Поскольку G_1 содержит все векторы G,

принадлежащие V, общий наибольший делитель миноров $(n-1)$-го порядка матрицы (29) равен 1. Следовательно, существуют такие целые числа $x_{n1},\dots,x_{nn}$, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,1} & \dots & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

равен 1.

Обозначим через $x_{p+1},\dots,x_{2p}$ векторы, дополняющие выбранный нами базис Q до базиса G_{2p}.

Рассмотрим матрицу, составленную из скалярных произведений векторов $x_1,\dots,x_{2p}$:

$$R=((x_k,x_l))=\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D' & S \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Очевидно, что эта матрица эквивалентна матрице, задающей симплектическую метрику в нашем пространстве.

Матрица R неоднозначно связана с выбранным нами нуль-пространством, поскольку она зависит от случайного выбора $x_1,\dots,x_{2p}$. Мы дадим сейчас способ, позволяющий связать с каждым классом эквивалентных нуль-пространств одну и только одну матрицу вида (30).

Обозначим через $\psi(d_1,\dots,d_p)$ число классов нуль-пространств симплектического пространства с метрикой, имеющей инварианты $d_1,\dots,d_p$.

ЛЕММА 5. *$\psi(d_1,d_2,\dots,d_p)$ равно числу кососимметрических матриц R вида*

$$R=\begin{pmatrix} & & & & \delta_1 & & 0 \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & \delta_p \\ -\delta_1 & & & 0 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ & \ddots & 0 & -s_{12} & 0 & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\delta_p & -s_{1p} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$(\delta_1\,|\,\delta_2\,|\dots|\,\delta_p,\quad 0\leqslant s_{kl}<\delta_k \text{ для } k<l)$$

с элементарными делителями d_1, d_1, d_2, d_2,..., d_p, d_p.

Доказательство. Пусть Q — некоторое нуль-пространство. Покажем, что существует базис $y_1,\dots,y_p,y_{p+1},\dots,y_{2p}$ $(y_1,\dots,y_p\in Q)$ решетки G_{2p} такой, что матрица, составленная из скалярных произведений векторов $x_1,x_2,\dots,x_{2p}$, имеет вид (31).

Рассмотрим произвольный базис $x_1,\dots,x_{2p}$ $(x_1,\dots,x_p\in Q)$ решетки G_{2p}. Обозначим через

$$R=\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D' & S \end{pmatrix}$$

матрицу, составленную из скалярных произведений векторов $x_1,\dots,x_{2p}$. Унимодулярные преобразования отдельно над $x_1,\dots,x_p$ и $x_{p+1},,\dots,x_{2p}$ означают элементарные преобразования матрицы D. При помощи этих пре-

образований матрицу D можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_p \end{pmatrix}, \quad \delta_1 \mid \delta_2 \mid \ldots \mid \delta_p. \tag{32}$$

Далее, мы можем добавить к $x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$ любые линейные комбинации векторов $x_1, \ldots, x_p$. При помощи этих преобразований нетрудно добиться, чтобы $0 \leqslant s_{kl} < \delta_k$, $k < l$. Очевидно, что приведение к виду (31) однозначно.

Таким образом, мы показали, что каждому нуль-пространству однозначно соответствует матрица R вида (31). Покажем, что если двум нуль-пространствам Q_1 и Q_2 соответствует одна матрица R, то они эквивалентны.

Пусть $x_1, \ldots, x_{2p}$ и $y_1, \ldots, y_{2p}$ — такие базисы решетки G_{2p}, что

$$(x_k, x_l) = (y_k, y_l), \quad 1 \leqslant k, l \leqslant 2p. \tag{33}$$

Обозначим через U линейное преобразование

$$x_k \to y_k, \quad k = 1, \ldots, 2p.$$

Очевидно, что U — целочисленное симплектическое преобразование, переводящее Q_1 в Q_2. Значит, Q_1 и Q_2 эквивалентны. Остается показать, что каждой матрице R вида (31) соответствует нуль-пространство. Пусть R — некоторая матрица вида (31). Так как R эквивалентна матрице

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{pmatrix},$$

то существует такая унимодулярная целочисленная матрица U, что $R = U' R_0 U$. Обозначим через Q линейное пространство, порожденное векторами, являющимися первыми p столбцами матрицы U. Нетрудно видеть, что Q — нуль-пространство. Лемма 5 полностью доказана.

Основным свойством функции $\psi(d_1, \ldots, d_p)$, упрощающим ее вычисление, является мультипликативность.

ЛЕММА 6.

$$\psi(d_1^{(1)}, \ldots, d_p^{(1)})\, \psi(d_1^{(2)}, \ldots, d_p^{(2)}) = \psi(d_1, \ldots, d_p), \quad d_k = d_k^{(1)} d_k^{(2)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant p,$$

если $(d_p^{(1)}, d_p^{(2)}) = 1$.

Доказательство. Пусть $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ — матрицы вида (31) соответственно с инвариантами $d_1^{(1)}, \ldots, d_p^{(1)}$ и $d_1^{(2)}, \ldots, d_p^{(2)}$. Сопоставим им матрицу R вида (31), элементы которой определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_k^{(1)} \delta_{kl}^{(2)}, \quad & s_{kl} &\equiv s_{kl}^{(1)} \pmod{\delta_k^{(1)}}, \quad k < l, \\ & & s_{kl} &\equiv s_{kl}^{(2)} \pmod{\delta_k^{(2)}}, \quad k < l. \end{aligned} \tag{34}$$

Мы должны показать, что инварианты матрицы R равны $d_1, \ldots, d_p$. Для этого достаточно установить, что

$$\Delta_k = \Delta_k^{(1)}\, \Delta_k^{(2)} \tag{35}$$

(Δ_k, $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$, соответственно, — k-детерминантные делители матриц R,

$R^{(1)}$ и $R^{(2)}$). Нетрудно видеть, что детерминантные делители матриц

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} & & \delta_1^{(1)} & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & \delta_p^{(1)} \\ -\delta_1^{(1)} & 0 & & & \\ & \ddots & & S^{(1)} & \\ 0 & & -\delta_p^{(1)} & & \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} & & \delta_1^{(1)} & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & \delta_p^{(1)} \\ -\delta_1^{(1)} & 0 & & & \\ & \ddots & & S & \\ 0 & & -\delta_p^{(1)} & & \end{pmatrix}$$

совпадают. Рассмотрим какой-нибудь минор M_k k-го порядка матрицы R.

Пусть $M_k^{(1)}$ — таким же образом устроенный минор матрицы $R^{(1)}$. Очевидно, что $M_k = cM_k^{(1)}$, где $c \mid d^2$, $d^i = \prod_{k=1}^{p} d_k'^{i)}$ и, следовательно,

$$\Delta_k^{(1)} \mid \Delta_k \mid d^{(2)} \Delta_k^{(1)}. \tag{36}$$

Аналогично,

$$\Delta_k^{(2)} \mid \Delta_k \mid d^1 \Delta_k^{(2)}. \tag{37}$$

Из (36) и (37) следует, что

$$\Delta_k = \Delta_k^{(1)} \Delta_k^{(2)}.$$

Легко видеть, что и, обратно, каждой матрице R с инвариантами $d_1, d_2, \ldots, d_p$ однозначно соответствует пара матриц $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ соответственно с инвариантами $d_1^{(1)}, \ldots, d_p^{(1)}$ и $d_1^{(2)}, \ldots, d_p^{(2)}$. Таким образом, доказательство леммы полностью закончено.

Для проверки того, что матрица R вида (31) действительно имеет нужные элементарные делители, часто бывает полезна следующая

ЛЕММА 7. *Пусть* $\delta_1, \ldots, \delta_p$, s_{kl} *и* $d_1, \ldots, d_p$ *имеют те же значения, что и в лемме* 5. *Тогда имеют место следующие сравнения*:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \delta_1 \ldots \delta_k \equiv 0 \,(d_1 \ldots d_k), && k = 1, \ldots, p, \\ &2)\ \delta_1 \ldots \delta_{k-1} s_{\mu\nu} \equiv 0 \,(d_1 \ldots d_k), && 1 < k \leqslant \mu < \nu, \\ &3)\ d_1 \ldots d_k \equiv 0 \,(\delta_1 \ldots \delta_{2k-p}), && \tfrac{p}{2} < k \leqslant p. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Доказательство 1) и 2) вытекает из того, что миноры

$$\begin{pmatrix} & & \delta_1 & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & \delta_k \\ -\delta_1 & 0 & \cdots & & \\ & \ddots & & \cdots & \\ 0 & & -\delta_k & \cdots & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & \delta_1 & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \delta_{k-1} \\ & & 0 & & s_{\mu\nu} \\ -\delta_1 & & 0 & \cdots & \\ & \ddots & & \cdots & \\ & & -\delta_{k-1} & \cdots & \\ 0 & & -s_{\mu\nu} & \cdots & \end{pmatrix} \tag{39}$$

должны делиться на $(d_1 \ldots d_p)^2$.

Для доказательства 3) достаточно заметить, что любой минор порядка $2k$ матрицы R должен содержать по крайней мере $2k - p$ строк с номерами, меньшими p, и по крайней мере $2k - p$ столбцов с номерами, меньшими p.

При помощи доказанных выше лемм легко выяснить, когда функция $\psi(1, d_2, \ldots, d_p)$ равна 1.

ЛЕММА 8. $\psi(1, d_2, \ldots, d_p) = 1$ *тогда и только тогда, когда* d_p *не делится на квадрат целого числа.*

Доказательство. В силу мультипликативности ψ, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $d_k = q^{\alpha_k}$, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_p$, а q — простое число. Покажем, что если $\alpha_p = 1$, то $\psi = 1$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что число матриц вида (31) с такими инвариантами равно 1. Положим $\delta_k = q^{\beta_k}$. Пусть, для определенности, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_t = 0$, $\alpha_{t+1} = 1$. Ввиду равенства

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$$

и неравенств $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_p$, мы получаем, что

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_t = 0.$$

Далее, согласно лемме 7,

$$\beta_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} \beta_k \geqslant \sum_{k}^{t+1} \alpha_k = \alpha_{t+1} = 1.$$

Из неравенства

$$(p-t)\,\beta_{t+1} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \beta_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = p - t$$

очевидно, что $\beta_{t+1} = 1$. Аналогично устанавливаем, что

$$\beta_{t+2} = \ldots = \beta_p = 1.$$

Далее, из второго сравнения леммы 7 получаем, что $s_{kl} \equiv 0\,(d_k)$, $k < l$ и, следовательно,

$$s_{kl} = 0.$$

Покажем, что если $\alpha_p > 1$, то $\psi > 1$. В этом случае существуют такие t и τ, что

$$\alpha_t - \alpha_\tau \geqslant 2, \quad \alpha_t - \alpha_{\tau+1} < 2.$$

Определим числа β_k следующим образом:

$$\beta_\tau = \alpha_\tau + 1, \quad \beta_t = \alpha_t - 1, \quad \beta_k = \alpha_k \text{ для } k \neq t, \quad k \neq \tau. \tag{40}$$

Тогда очевидно, что $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_p$. Положим

$$\delta_k = q^{\beta_k}, \quad s_{\tau,t} = sq^{\alpha_\tau}, \quad (s, q) = 1, \quad s_{kl} = 0 \text{ для } (k, l) \neq (\tau, t). \tag{41}$$

Нетрудно видеть, что матрица R с такими элементами имеет нужные инварианты.

Для некоторых простейших случаев функцию $\psi(d_1, \ldots, d_p)$ можно вычислить. Один из этих случаев содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 9. $\psi(1, \ldots, 1, d) = v$, *где* $d = v^2 u$, *а* u *не делится на квадрат целого числа.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $d = q^\alpha$. В этом случае легко показать при помощи сравнения 3) лем-

мы 2, что матрица R должна иметь следующие элементы:

$$\begin{gathered}\delta_1 = \ldots = \delta_{p-2} = 1, \quad \delta_{p-1} = q^{\alpha}, \quad \delta_p = q^{\beta}, \quad \alpha \leqslant \beta, \\ s_{kl} = 0 \text{ для } (k, l) \neq (p-1, p), \quad k < l \quad (s_{p-1,p,q}) = 1.\end{gathered} \tag{42}$$

Легко проверить, что и, обратно, любая матрица R с элементами (42) имеет нужные инварианты. Следовательно,

$$\psi(1, \ldots, 1, q^{\alpha}) = \sum_{2\alpha \leqslant a} \varphi(q^{\alpha}) = q^{\left[\frac{a}{2}\right]}. \tag{43}$$

Перейдем к рассмотрению аналогичных вопросов для групп, введенных в предыдущем параграфе.

Определение. Линейное преобразование $x \to Ax$ симплектического пространства L_{2p} называется симплектически самосопряженным, если для всех x и y

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{44}$$

Пусть $\alpha \to A(\alpha)$ — некоторое представление поля k алгебраических чисел степени n при помощи симплектически самосопряженных линейных преобразований.

В следующем параграфе будет установлено, что подсчет минимального числа точек выхода фундаментальной области для группы $\Gamma^0_{\mathfrak{A}, R}$ на остов границы сводится к следующей задаче. Пусть в некотором базисе $x_1, \ldots, x_{2p}$ матрица кососимметрической формы, задающей скалярное произведение, равна R. Сопоставим каждой матрице $A \in \mathfrak{A}$ линейное преобразование, матрица которого в базисе $x_1, \ldots, x_{2p}$ равна A'. Нетрудно проверить, что полученные таким образом линейные преобразования являются симплектически самосопряженными. Обозначим их совокупность через $\mathfrak{A}'$. В дальнейшем нас будут интересовать лишь инвариантные относительно $\mathfrak{A}$ нуль-пространства. Рассмотрим группу $S_{\mathfrak{A}, R}$ целочисленных симплектических преобразований U, коммутирующих со всеми преобразованиями $B \in \mathfrak{A}'$. Инвариантные нуль-пространства Q_1 и Q_2 называются эквивалентными, если существует преобразование $U \in S_{\mathfrak{A}, R}$, переводящее Q_1 в Q_2. При помощи введенного понятия эквивалентности все инвариантные нуль-пространства распадаются на классы. Число классов $\psi(\mathfrak{A}, R)$, как будет установлено в § 3 настоящей главы, равно минимальному числу точек выхода фундаментальной области для группы $\Gamma^0_{\mathfrak{A}, R}$. В настоящем параграфе мы докажем конечность $\psi(\mathfrak{A}, R)$. Установим прежде всего следующую лемму.

ЛЕММА 10. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, состоящая из линейных симплектических самосопряженных преобразований, изоморфная полю алгебраических чисел k степени n. Всегда существует базис, в котором*

1) *матрица кососимметрической формы, задающей скалярное произведение, имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

2) *матрицы линейных преобразований* $A \in \mathfrak{A}$ *имеют вид*

$$\begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & A_0 & \\ & & & A_0' \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_0' \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где A_0 *— матрица порядка* n.

Пусть Q_0 — некоторое минимальное инвариантное подпространство L_{2p}. Нетрудно проверить, что $(x, y) = 0$ для всех x и $y \in Q$. Следовательно, размерность Q_0 не превосходит p. Если она меньше p, то существует такой вектор $x_1 \in L_{2p}$, что $(x_1, x) = 0$ для всех $x \in Q_0$. Обозначим через Q_1 минимальное инвариантное подпространство, содержащее Q_0 и x_1. Легко проверить, что

$$(x, y) = 0 \text{ для всех } x \text{ и } y \in Q_1.$$

Следовательно, размерность Q_1 не превосходит p. Если она меньше p, то повторяется указанный выше процесс. После конечного числа шагов мы придем к инвариантному нуль-пространству Q размерности p. Пусть $x_1, \ldots, x_p$ — базис Q со следующим свойством: линейное пространство, порожденное векторами

$$x_{kn+1}, \ldots, x_{kn+n} \quad \left(1 \leqslant k < \frac{p}{n}\right),$$

инвариантно. Следовательно, матрицы преобразований из $\mathfrak{A}$ в базисе $x_1, \ldots, x_p$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}, \quad s = \frac{p}{n}.$$

Очевидно, всегда можно изменить векторы $x_{kn+1}, \ldots, x_{kn+n}$ так, чтобы линейные преобразования $A \in \mathfrak{A}$ приняли вид

$$\begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Далее, выберем вектор x_{p+1} из условия:

$$(x_l, x_{p+1}) = \begin{cases} 0 \text{ при } l \neq 1, \\ 1 \text{ при } l = 1. \end{cases} \tag{48}$$

Так как линейное пространство, порожденное векторами $x_1, \ldots, x_n$, является минимальным инвариантным пространством, то существуют та-

кие линейные преобразования $A_1 = E, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, что

$$x_k = A_k x_1. \tag{49}$$

Положим

$$x_{p+k} = A_k^{-1} x_1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и определим x_{p+n+1} так, чтобы

$$(x_{p+n+1}, x_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant p+n, \quad k \neq n+1, \\ 1, & \text{если } k = n+1. \end{cases} \tag{50}$$

Аналогично (49) положим

$$x_{p+n+k} = A_k^{-1} x_{p+n+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{51}$$

Продолжая этот процесс, мы последовательно определим весь базис $x_1, \ldots, x_{2p}$. В силу формул (47)—(51), полученный базис будет обладать требуемыми в лемме свойствами.

Замечание. При помощи рассуждений, аналогичных примененным при доказательстве леммы 10, легко доказать, что если Q_1 и Q_2 — два инвариантных нуль-пространства, то всегда существует преобразование U, $(Ux, Uy) = (x, y)$, коммутирующее со всеми преобразованиями из $\mathfrak{A}$, переводящее Q_1 в Q_2.

Конечно, вообще говоря, матричные элементы матрицы U не являются целыми числами.

Условимся некоторое представление $\alpha \to A(\alpha)$ поля алгебраических чисел k называть нормальным, если для каждого целого алгебраического α все элементы матрицы $A(\alpha)$ — целые рациональные числа. Для дальнейшего нам будет нужна следующая

ЛЕММА 11. *Пусть $\alpha \to A(\alpha)$ — нормальное представление степени $p = ns$ поля k степени n. Тогда существует такая унимодулярная матрица V, что*

$$VA(\alpha)V^{-1} = \begin{pmatrix} A_1(\alpha) & & \\ & \ddots & 0 \\ & & \\ 0 & & A_s(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

где $A_1(\alpha), \ldots, A_s(\alpha)$ — нормальные представления степени n.

Доказательство. Рассмотрим s-мерное векторное пространство над полем k. Совокупность N векторов с целыми компонентами a мы будем называть модулем, если

1) из $a \in N$ следует $\alpha a \in N$ для любого целого алгебраического $\alpha \in k$;

2) N содержит s линейно независимых векторов.

Каждый модуль можно рассматривать как решетку в $p = ns$-мерном пространстве, инвариантную относительно линейных преобразований, соответствующих умножению на целые алгебраические числа α. Таким образом, если нам задан модуль, то нетрудно построить нормальное представление поля k. Легко видеть, что все представления, которые можно получить при помощи одного модуля, эквивалентны. Далее, так

же как доказывается, что каждому нормальному представлению степени n поля k соответствует некоторый идеал, легко показать, что каждому нормальному представлению степени n поля k соответствует некоторый s-мерный модуль.

Пусть $\alpha \to A(\alpha)$ — заданное в формулировке леммы представление поля k и N — соответствующий модуль.

В каждом модуле [см. ([11])] существует базис из $s+1$ векторов. Дополним этот базис нулевыми векторами так, чтобы общее число векторов в базисе стало равно ns. Рассмотрим матрицу, столбцами которой служат векторы базиса N. Обозначим через $e_1, \ldots, e_s$ ее элементарные делители.

Пусть $\omega_{k1}, \ldots, \omega_{kn}$ — базис идеала e_k. Тогда элементарными делителями матрицы

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} \ldots \omega_{1n} & 0 \ldots 0 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & \omega_{21} \ldots \omega_{2n} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & \omega_{s1} \ldots \omega_{sn} \end{pmatrix} \tag{53}$$

будут $e_1, \ldots, e_s$. Следовательно, рассмотренная выше матрица при помощи элементарных преобразований может быть приведена к виду (53), что и доказывает утверждение леммы.

Из леммы 11 вытекает, что число неэквивалентных нормальных представлений поля k степени $p = ns$ не превосходит h^s (h — число классов поля k) и, значит, конечно. Используя этот факт, мы установим сейчас, что число неэквивалентных нуль-пространств конечно. Вначале мы докажем это для некоторого специального, наиболее простого выбора алгебры $\mathfrak{A}$. Затем, воспользовавшись тем, что изоморфные алгебры $\mathfrak{A}$ рационально эквивалентны, установим конечность числа неэквивалентных инвариантных нуль-пространств в общем случае.

Рассмотрим следующее представление поля k:

$$\alpha \to A(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0(\alpha) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & A_0(\alpha) & & \\ & & & A_0'(\alpha) & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & A_0'(\alpha) \end{pmatrix} \tag{54}$$

Очевидно, что линейные преобразования, определяемые матрицами вида (54), являются симплектически самосопряженными в пространстве с симплектической метрикой, задаваемой матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть Q — инвариантное нуль-пространство. Поскольку все нуль-пространства в данном случае между собой эквивалентны, должен существо-

вать такой симплектический ортогональный базис решетки целочисленных векторов

$$x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots x_{2p},$$

что $x_1, \ldots, x_p \in Q$.

Пусть $\tilde{Q}$ — некоторое инвариантное нуль-пространство и $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{2p}$ — симплектически ортогональный базис решетки целочисленных векторов такой, что $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_p \in \tilde{Q}$. Запишем преобразования из алгебры $\mathfrak{A}$ в каждом из этих базисов. Если матрицы, соответствующие одному преобразованию, совпадают, то, очевидно, Q и $\tilde{Q}$ эквивалентны. Поэтому наша задача заключается в том, чтобы показать, что при помощи разумного выбора базиса $x_1, \ldots, x_{2p}$ ($x_1, \ldots, x_p \in Q$) всегда можно привести преобразования из $\mathfrak{A}$ к одному из конечного числа видов. Заметим, что в любом симплектически ортогональном базисе $x_1, \ldots, x_{2p}$ ($x_1, \ldots, x_p \in Q$ матрицы преобразований из $\mathfrak{A}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1' \end{pmatrix}, \quad A_2' = -A_2. \tag{55}$$

Очевидно, $\alpha \to A_1(\alpha)$ является нормальным представлением k. Согласно лемме 11, существует лишь конечное число неэквивалентных нормальных представлений степени p поля k. Пусть $M_1(\alpha), M_2(\alpha), \ldots, M_N(\alpha)$ — полная система не эквивалентных между собой нормальных представлений степени $p = ns$ поля k. При помощи замены базиса по формуле

$$\tilde{x}_k = Ux_k, \text{ где } U = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}, \quad V \text{ — унимодулярная матрица,} \tag{56}$$

мы можем добиться того, чтобы представление $A_1(\alpha)$ совпадало с некоторым $M_k(\alpha)$. В новом базисе матрицы $A(\alpha)$ будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} M_k(\alpha) & 0 \\ A_2(\alpha) & M_k'(\alpha) \end{pmatrix}, \quad A_2'(\alpha) = -A_2(\alpha). \tag{57}$$

Так как все инвариантные нуль-пространства рационально эквивалентны (см. замечание после леммы 10), то существует рациональное симплектическое преобразование U вида

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ T & E \end{pmatrix}, \quad T = T', \tag{58}$$

такое, что

$$UA(\alpha)U^{-1} = \begin{pmatrix} M_k(\alpha) & 0 \\ 0 & M_k'(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Из (59) получаем:

$$TM(\alpha) - M'(\alpha)T + A_2(\alpha) = 0. \tag{60}$$

Обозначим через T_0 матрицу, элементы которой — целые части от соответствующих элементов T, и заменим базис по формуле

$$\tilde{x}_k = Ux_k, \quad U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_0 & E \end{pmatrix}. \tag{61}$$

После выполнения замены (61) можно считать, что элементы матрицы T из соотношения (60) — рациональные числа, по модулю меньшие, чем 1. Используя то, что $A_2(\alpha)$ — целочисленная матрица, можно оценить знаменатели элементов матрицы T.

Для установления конечности числа неэквивалентных инвариантных нуль-пространств в общем случае заметим следующее.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра симплектически самосопряженных линейных преобразований, изоморфная полю k. Обозначим матрицу симплектического скалярного произведения через R_0. Согласно лемме 10, существует такая рациональная матрица V, что $V'R_0V = I$ и любая матрица из алгебры $V\mathfrak{A}V^{-1} = \mathfrak{A}_1$ имеет вид (54). Выполним линейное преобразование $x_1 = Vx$. Тогда $S_{\mathfrak{A},R}$ перейдет в группу всех рациональных симплектических матриц U_1, коммутирующих с каждым элементом из $\mathfrak{A}_1$ и таких, что $V^{-1}U_1V$ целочисленно. Очевидно (см. лемму 7 главы I), эта группа соизмерима с группой $S_{\mathfrak{A}_1,I}$. Таким образом, конечность числа классов инвариантных нуль-пространств полностью доказана.

§ 3. Основная теорема

В настоящем параграфе мы докажем существование функций, автоморфных относительно групп $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$, введенных в § 1 настоящей главы, и установим, что поле таких функций изоморфно полю алгебраических функций. Для доказательства этих утверждений достаточно показать, что для группы $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ выполняются условия теоремы I. Мы начнем с описания групп $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ при помощи симплектических групп над полями алгебраических чисел.

Пусть k — некоторое абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n и $k^{(1)} = k, \ldots, k^{(n)}$ — поля, с ним сопряженные. Пусть V — некоторая матрица с элементами из k. Условимся через $V^{(s)}$ обозначать матрицу, элементами которой являются s-е сопряженные к элементам матрицы V. Обозначим через $H^n_{p_0}$ произведение n обобщенных верхних полуплоскостей степени p_0, а через $\Gamma^{(\kappa)}_{p_0}$ — группу всех целочисленных матриц U порядка $2p_0$ с элементами из k, для которых

$$U'IU = I, \quad I = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Сопоставим каждой матрице $U \in \Gamma_{p_0}(k)$ преобразование

$$\begin{aligned} &Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \to \tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n), \\ &\tilde{Z}_s = (A^{(s)}Z_s + B^{(s)})(C^{(s)}Z_s + D^{(s)})^{-1}. \end{aligned} \tag{63}$$

Очевидно, такие преобразования образуют группу, которую в дальнейшем мы будем называть группой Гильберта — Зигеля, поскольку она была

указана Гильбертом для случая, когда $p_0 = 1$, k — любое поле, и Зигелем — для случая $n = 1$, p_0 — любое целое число. Мы покажем сейчас, что эта группа содержится среди рассмотренных нами в § 1 групп и что любая группа $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ соизмерима с некоторой группой Гильберта — Зигеля.

ЛЕММА 12. *Среди групп* $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ *содержится группа Гильберта — Зигеля. Любая группа* $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ *соизмерима с группой Гильберта — Зигеля* $\Gamma_{p_0}(k)$.

Доказательство. Рассмотрим $2p_0$-мерное векторное пространство над полем алгебраических чисел k. Введем в него симплектическое скалярное произведение при помощи формулы:

$$(\alpha, \beta) = S(\alpha' I \beta), \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2p_0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2p_0} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

где $S(a) = \sum_{k=1}^{n} a^{(k)}$ означает след a. Будем рассматривать это пространство над полем рациональных чисел.

Пусть $x_1, \ldots, x_{2p}$ $(p = np_0)$ — базис решетки, состоящей из всех векторов, компоненты которых — целые алгебраические числа. Обозначим через R_0 матрицу

$$((x_k, x_l)). \tag{65}$$

Линейные преобразования

$$\alpha \to \varkappa d, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2p_0} \end{pmatrix}, \quad \varkappa \in k, \tag{66}$$

очевидно, являются симплектически самосопряженными. Запишем преобразования (66) в базисе $x_1, \ldots, x_{2p}$. Обозначим полученную алгебру матриц через $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}'$ — алгебра, составленная из матриц A, для которых $A' \in \mathfrak{A}$. Покажем, что $\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$ изоморфна группе Гильберта — Зигеля. Каждое преобразование (62), очевидно, является целочисленным симплектическим преобразованием, коммутирующим с преобразованиями вида (66).

Обратно, пусть задано целочисленное симплектическое преобразование A, коммутирующее со всеми преобразованиями (66). Из того, что A коммутирует с преобразованиями (66), вытекает, что A является линейным преобразованием векторного пространства над полем k. Из целочисленности и симплектичности A следует, что A содержится в группе $\Gamma_{p_0}(k)$.

Второе утверждение леммы было доказано в конце § 2 настоящей главы.

Перейдем к проверке выполнения условий теоремы I (см. § 3 главы 1) для групп $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$. Достаточно провести проверку для группы Гильберта — Зигеля. Мы начнем с установления того, что $\Gamma_{p_0}(k)$ обладает допустимой обобщенной фундаментальной областью. Условимся каждой матрице U

порядка $2p_0$ ($UIU = I$) с элементами из поля k сопоставлять преобразование

$$Z \to U(Z) = \tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n), \quad U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{67}$$
$$\tilde{Z}_s = (A^{(s)}Z_s + B^{(s)})(C^{(s)}Z_s + D^{(s)})^{-1}.$$

ЛЕММА 13. *Существует конечное множество матриц $U_1, \ldots, U_N$ и положительное λ со следующим свойством: для любой точки $Z \in H_{p_0}$ существует преобразование U вида $U_s U_0$, $U_0 \in \Gamma_{p_0}(k)$ такое, что*

$$\operatorname{Im} U(Z) > \lambda E^n \quad (E^n = (E, \ldots, E)). \tag{68}$$

Доказательство. Пусть Q — совокупность матричных векторов

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n), \quad Y_s = Y_s' > 0.$$

Сопоставим каждой унимодулярной матрице U с элементами из k преобразование

$$Y \to Y[U] = (Y_1, [U^{(1)}], \ldots, Y_n[U^{(n)}]) \tag{69}$$

и обозначим через $Q(t)$ совокупность матричных векторов

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n), \quad Y_k = P_k[Q_k], \quad P_k = \begin{pmatrix} p_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{kn} \end{pmatrix},$$
$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q_{1n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad |q_{ij}^{(k)}| \leqslant t, \quad p_{k\alpha} \leqslant t p_{l\alpha}. \tag{70}$$

Согласно результатам Умберта ([10]), существует такое конечное множество матриц $L_1, \ldots, L_\nu$ с элементами из поля k и такое t, что любой матричный вектор $Y \in Q$ допускает представление в виде

$$Y[L_\rho U], \quad 1 \leqslant \rho \leqslant \nu, \tag{71}$$

где U — целочисленная унимодулярная матрица. Обозначим через $F_{\mu,t}$ совокупность $Z \in H_{p_0}^n$, для которых выполнены следующие условия:

1) $Y = \operatorname{Im} Z \in Q(t)$,

2) $\prod_{s=1}^{n} |C^{(s)}Z_s + D^{(s)}| > \mu$ для всех целочисленных симметрических пар (CD)*.

Мы покажем, что $F_{\mu,t}$ содержится в области $Y > \lambda E$. С этой целью подставим в (71)

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{72}$$

* Пара (CD) квадратичных матриц называется симметрической, если $CD' = DC'$ и матрица (CD) имеет максимальный возможный ранг.

Тогда мы получим, что для всех целых c и $d \in k$

$$\prod' |c^{(s)} z_s + d^{(s)}| > \mu, \tag{73}$$

где z_s — элемент матрицы Z_s, стоящий на первом месте.

Из (73) при помощи леммы Минковского о линейных формах легко получить, что

$$\prod_{s=1}^{n} y_s > \lambda_1 > 0, \quad y_s = \operatorname{Im} z_s. \tag{74}$$

Поскольку $Y \in Q(t)$, из (74) следует, что

$$y_s > \lambda_2 > 0, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{75}$$

и, значит,

$$p_{s\alpha} > t^{1-\alpha} p_{s1} = t^{1-\alpha} y_{s1} > \lambda_2 t^{1-\alpha}. \tag{76}$$

Из (76) уже тривиально вытекает существование такой константы λ, что для всех $Z \in F_{\mu,t}$

$$Y = \operatorname{Im} Z > \lambda.$$

Для доказательства леммы остается установить существование такого конечного множества матриц $U_1, \ldots, U_N$, что для всякой точки $Z \in H^n_{p_0}$ найдется преобразование

$$U = U_s U_0, \quad U_0 \in \Gamma_{p_0}(k),$$

переводящее Z в $F_{\mu,t}$.

Целочисленную симметрическую пару (CD) условимся называть примитивной, если из целочисленности матрицы $(BC\ BD)$ (B — невырожденная квадратная матрица порядка p_0) вытекает, что $|B| \geqslant 1$. Можно показать, что если k — одноклассное поле, то для всякой примитивной матрицы (CD) существует матрица $U \in \Gamma_{p_0}(k)$ вида

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Условимся называть примитивные пары матриц (CD) и $(C_1 D_1)$ эквивалентными, если существуют две матрицы: $U \in \Gamma_{p_0}(k)$, B — унимодулярная матрица порядка p с элементами из k такие, что

$$B(CD)U = (C_1 D_1). \tag{78}$$

Из результатов, полученных в конце предыдущего параграфа, следует, что число неэквивалентных примитивных симметрических пар матриц конечно. Следовательно, существует такое конечное множество симметрических матриц $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_{N_1}$, что для всякой примитивной матрицы (CD) существует матрица $U = U_s U_0$, $U_0 \in \Gamma_{p_0}(k)$, вида (77).

Пусть $V_1, \ldots, V_\nu$ — матрицы вида

$$\begin{pmatrix} L'_\rho & 0 \\ 0 & L_\rho^{-1} \end{pmatrix},$$

где L_ρ — матрицы, фигурирующие в формулировке результатов Умберта.

Обозначим через $U_1, \ldots, U_N$ множество матриц вида

$$V_\rho U_s, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant \nu, \quad 1 \leqslant s \leqslant N_1.$$

Мы покажем, что множество $U_1, \ldots, U_N$ и является искомым.

Пусть Z — некоторая точка $H^n_{p_0}$. Всегда существует примитивная пара (CD), для которой произведение определителей

$$\prod_{s=1}^{n} |C^{(s)}Z_s + D^{(s)}| \tag{79}$$

минимально (см. лемму 14).

Возьмем матрицу $\tilde{U} = U_s U_0$, $U_0 \in \Gamma_{p_0}(k)$, так, чтобы

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} * & * \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad (C_1 D_1) = B(CD), \quad |B| = 1, \tag{80}$$
$$\operatorname{Im} \tilde{U}(Z) = \operatorname{Im} Z\,[(C_1\bar{Z} + D_1)^{-1}] \in Q(t).$$

Покажем, что

$$\tilde{U}(Z) \in F_{\mu,t}.$$

Условимся обозначать через $\chi(U, Z)$, где $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, произведение

$$\prod_{s=1}^{n} |C^{(s)}Z_s + D^{(s)}|.$$

Нетрудно проверить, что для $\chi(U, Z)$ имеет место функциональное уравнение:

$$\chi(U_1U_2, Z) = \chi(U_1, U_2Z)\,\chi(U_2, Z).$$

Мы имеем:

$$\chi(U, \tilde{U}Z) = \frac{\chi(U\tilde{U}, Z)}{\chi(U, Z)}, \tag{81}$$

где

$$U = U_s U_0, \quad 1 \leqslant s \leqslant N, \quad U_0 \in \Gamma_{p_0}(k).$$

Обозначим через m такое натуральное число, что матрицы mU_s будут целочисленными. Из (80) и (81) очевидно, что

$$U(Z) \in F_{\mu,t}, \quad \mu = \frac{1}{m^2}.$$

ЛЕММА 14. *$H_{\mathfrak{A},R_0}$ можно рассматривать как аналитическую поверхность F в верхней полуплоскости Π_p; при этом $\Gamma^2_{\mathfrak{A},R_0}$ будет подгруппой группы Γ_V (см. § 3 главы 1), состоящей из всех преобразований $U \in \Gamma_V$, переводящих F в себя.*

Доказательство. Обозначим через V рациональную матрицу, обладающую следующими свойствами:

$$V'R_0V = I, \quad V\mathfrak{A}V^{-1} = \mathfrak{A}_1,$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}, \quad A_1 \in \mathfrak{A}_1. \tag{82}$$

Очевидно, что в каждом классе эквивалентных матриц $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A},R}$ существует одна и только одна вида

$$\omega = (ZE)V', \quad Z \in H_p. \tag{83}$$

Сопоставим каждому классу эквивалентных матриц ω точку Z верхней полуплоскости, определяемую формулой (83).

Легко видеть, что при таком отображении $H_{\mathfrak{A},R}$ перейдет в множество точек F верхней полуплоскости, определяемое уравнением

$$M'Z = ZM. \tag{84}$$

Из леммы 2 § 1 настоящей главы следует второе утверждение нашей леммы.

Из леммы 13 настоящего параграфа и леммы § 3 главы I следует, что $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ обладает допустимой обобщенной фундаментальной областью. Для построения мажорантной функции для $\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$ можно воспользоваться леммой 14.

Пусть $h(Z)$ — нормальная мажорантная функция для группы Γ_V, $VIV = R$. Из сказанного ясно, что $h(Z)$, рассматриваемая на поверхности (84), является мажорантной функцией для $\Gamma^0_{\mathfrak{A},R}$. Выполнение условия (43) теоремы I следует из выполнения этого условия для группы Γ_V. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА III. 1) *Для любой точки Z, не являющейся неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$, за исключением тождественного, существует $m = \frac{np_0(p_0+1)}{2}$ регулярных в этой точке автоморфных относительно $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ функций с отличным от нуля в точке Z якобианом.*

2) *Для любых двух точек Z_1 и Z_2, не эквивалентных относительно группы $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$, существует автоморфная функция, регулярная в этих точках и принимающая в них различные значения.*

3) *Поле автоморфных относительно $\Gamma_{\mathfrak{A},R}$ функций изоморфно полю алгебраических функций от m неизвестных.*

Поступило
25. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., ИЛ, 1954.
[2] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1948.
[3] Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., ИЛ, 1951.
[4] Форд Л. Р., Автоморфные функции, М.—Л., 1936.
[5] Siegel K., Simplectic Geometry, Amer. J. Math., 65 (1943), 1—86.
[6] Siegel K., Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann., 116 (1939), 617—657.
[7] Blumenthal O., Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Ann., 1-ste Hälfte — 56 (1903), 509—548; 2-te Hälfte — 58 (1904), 497—527.
[8] Maaß H., Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen, Math. Ann., 177, H. 4 (1940), 538—578.

[9] Braun H., Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinschen Reihen. Math. Zeitschr. 44 (1939), 387—397.
[10] Humbert P., Théorie de la réductim des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini, Commen. Math. Helv., 12 (1940), 263—306.
[11] Steinitz E., Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I. Math. Ann., 71 (1912), 328—354.
[12] Albert A., A solution of the principal problem in the theory of Riemann matrices, Ann. Math., 35 (1934), 500—515.
[13] Koecher M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I, Math. Zeitschr., 59 (1954), 399—416.
[14] Bochner S., Algebraic and linear dependence of automorphic functions in several variables, J. Indian Math. Soc., 16 (1952), 1—6.
[15] Lefschetz S., On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties, Trans. Am. Math. Soc., 22 (1921), 327—482.
[16] Conforto F., Funzioni abeliane modulari. Lezioni. racollte dal dott. Mario Rosati, vol. primo, Roma, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 99—136

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ВТОРЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ ДЛЯ СЕКУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В статье дано подробное изложение результатов, ранее опубликованных автором в кратком сообщении (7). В начале статьи (§ 1) дано изложение некоторых классических теорем, принадлежащих Хопфу, Штифелю, Уитнею.

Классические работы Хопфа (1) и Штифеля (2) решают (в конкретном случае векторных полей на многообразии) вопрос о вычислении первого препятствия. Общая постановка и решение вопроса о первом препятствии имеются, например, в книге Стинрода (3). Вычисление второго препятствия для частных случаев было дано Хопфом (4), (5).

Общее решение этого вопроса получено автором (6), (7). В настоящей работе дается полное изложение результатов работы (7).

В первом параграфе напоминаются хорошо известные понятия и факты теории косых произведений, в частности, вопрос о первом препятствии. Применяемое здесь определение косого произведения совпадает с тем, которое дано в (8). Оно наиболее близко к понятию координатного произведения Стинрода [см. (3)]. Базисное пространство в этом определении является полиэдром, взятым в раз навсегда фиксированном симплициальном разбиении. Вопрос о топологической инвариантности понятий, вводимых в § 1 и 2, связанный с переходом к другому разбиению базисного пространства, в работе не рассматривается.

Второй параграф посвящен изложению основных результатов о втором препятствии, частично сформулированных ранее в работе автора (7).

В третьем параграфе даны примеры. В качестве первого примера излагается содержание работы (6). Далее рассматриваются результаты Хопфа (4).

§ 1. Постановка задачи

1°. Группа преобразований. Топологическая группа G называется *группой преобразований* топологического пространства C, если каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие гомеоморфное отображение

$$z \to gz, \quad z \in C,$$

пространства C на себя. При этом требуется, чтобы было выполнено соотношение ассоциативности

$$g_1(g_2 z) = (g_1 g_2) z, \quad z \in C, \quad g_1 \in G, \quad g_2 \in G,$$

и чтобы отображение прямого произведения $G \times C$ в C, определенное

соответствием

$$(g, z) \to gz, \quad z \in C, \quad g \in G, \tag{1}$$

было непрерывно. Из сказанного следует, что единица e группы G определяет тождественное отображение пространства C на себя, а взаимно обратные элементы g и g^{-1} определяют взаимно обратные гомеоморфизмы пространства C на себя.

Группа G называется *эффективной* группой преобразований, если не совпадающие между собой элементы этой группы определяют различные преобразования пространства C, т. е. если из $g_1 \neq g_2$ вытекает существование такой точки $z \in C$, что $g_1 z \neq g_2 z$. Группа G называется *транзитивной*, если для любых двух точек z_1, z_2 пространства C найдется такой элемент $g \in G$, что $gz_1 = z_2$.

Пусть c — фиксированная точка пространства C. Совокупность $\Gamma = \Gamma_c$ всех элементов $g \in G$, удовлетворяющих условию $gc = c$, является, как нетрудно видеть, подгруппой топологической группы G; она называется *стабильной подгруппой*. Если $g\Gamma$ — произвольный левый смежный класс группы G по подгруппе Γ, то для любых двух элементов g_1, g_2 смежного класса $g\Gamma$ мы имеем

$$g_1 c = g_2 c.$$

Таким образом, точка $g_1 c, g_1 \in g\Gamma$, определена смежным классом $g\Gamma$ однозначно, и мы можем положить:

$$\pi(g\Gamma) = g_1 c, \quad g_1 \in g\Gamma.$$

Полученное (очевидно, непрерывное) отображение π пространства G/Γ левых смежных классов в C является, как нетрудно видеть, взаимно однозначным, если группа G транзитивна. Если пространство C хаусдорфово, а группа G бикомпактна, то из непрерывности и взаимной однозначности отображения π вытекает непрерывность обратного отображения π^{-1}, т. е. π является гомеоморфным отображением пространства G/Γ на C. Конечно, непрерывность отображения π^{-1} может иметь место и в других, более общих случаях.

Говорят, что группа G преобразований пространства C обладает *локальной секущей поверхностью*, если каждой точке z некоторой окрестности U точки c в C можно поставить в соответствие элемент $g_z \in G$ так, что при этом отображение

$$z \to g_z$$

окрестности U в G непрерывно, и, кроме того,

$$g_z(c) = z, \quad z \in U.$$

Заметим, что если группа преобразований G является группой Ли, то она всегда обладает локальной секущей поверхностью [см. (9)].

2°. Косое произведение. Будем говорить, что пространство P является *косым произведением*, если имеют место следующие обстоятельства. Заданы симплициальный комплекс B, называемый *базисным комплексом*, непрерывное отображение p пространства P на полиэдр B.

называемое *проекцией*, пространство C, называемое *слоем*, и эффективная группа G преобразований слоя C. Далее, для каждого симплекса T комплекса B (симплексы рассматриваются замкнутыми) задано гомеоморфное отображение ξ_T прямого произведения $T \times C$ на множество $p^{-1}(T) \subset P$, причем

$$p\xi_T(x, z) = x, \quad x \in T, \quad z \in C. \tag{2}$$

Наконец, требуется, чтобы отображения ξ_T удовлетворяли некоторым условиям согласованности при переходе от одного симплекса комплекса B к другому. Именно, обозначим через $\xi_{T,x}$, $x \in T$, гомеоморфное отображение слоя C на множество $C_x = p^{-1}(x)$, определяемое равенством

$$\xi_{T,x}(z) = \xi_T(x, z), \quad x \in T, \quad z \in C.$$

Если теперь T и T' — пересекающиеся симплексы комплекса B, то для любой точки $x \in T \cap T'$ определено гомеоморфное отображение $\xi_{T,x}^{-1}\xi_{T',x}$ слоя C на себя. Требуется, чтобы это отображение $\xi_{T,x}^{-1}\xi_{T',x}$ совпадало с преобразованием, порождаемым некоторым элементом группы G (единственным, в силу эффективности этой группы), или, как мы будем для краткости писать, чтобы было

$$\xi_{T,x}^{-1}\xi_{T',x} \in G. \tag{3}$$

Наконец, требуется еще, чтобы отображение множества $T \cap T'$ в G, определенное соответствием

$$x \to \xi_{T,x}^{-1}\xi_{T',x},$$

было непрерывным.

Множество $C_x = p^{-1}(x)$ называется *слоем* косого произведения P, лежащим *над* точкой x полиэдра B. Отображения ξ_T называются *координатными функциями*.

Более общее определение, при котором базой может быть пространство, не являющееся полиэдром, приведено в книге ([3]). Это более общее определение будет применено в конце § 2.

3°. Секущие поверхности косого произведения. Говорят, что над множеством $A \subset B$ задана (в косом произведении P) *секущая поверхность* $\mathfrak{S}$, если каждой точке $x \in A$ поставлена в соответствие точка $\mathfrak{S}(x)$ слоя C_x, причем отображение множества A в P, определенное соответствием

$$x \to \mathfrak{S}(x),$$

непрерывно.

Если для каждого числа $t \in I = [0,1]$ задана над A секущая поверхность $\mathfrak{S}_t$, причем отображение произведения $A \times I$ в P, определенное соответствием

$$(x, t) \to \mathfrak{S}_t(x), \quad x \in A, \quad t \in I,$$

непрерывно, то говорят, что задана *деформация* секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ в $\mathfrak{S}_1$. Деформация $\mathfrak{S}_t$ называется *стационарной* на множестве $A' \subset A$, если для любой точки $x \in A'$ имеем

$$\mathfrak{S}_t(x) = \mathfrak{S}_0(x), \quad t \in I.$$

Секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, заданные над A, называются *гомотопными* между собой, если существует деформация $\mathfrak{S}_t$, соединяющая эти секущие поверхности. Если при этом деформация $\mathfrak{S}_t$ стационарна на множестве $A' \subset A$, то $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ называются гомотопными *относительно* A' (в этом случае $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ должны, конечно, совпадать на множестве A').

Нетрудно видеть, что если слой C косого произведения P линейно связен (т. е. если любые две его точки можно соединить путем), то над всем одномерным остовом B^1 базисного комплекса B можно построить в P секущую поверхность. В самом деле, выбрав для каждой вершины x комплекса B произвольную точку $\mathfrak{S}(x) \in C_x$, мы получим секущую поверхность, заданную над нульмерным остовом B^0. Если T^1 — одномерный симплекс комплекса B, а x_0 и x_1 — его концы, то введем на T^1 параметр t, изменяющийся от нуля до единицы, причем точка x_0 соответствует значению $t = 0$, а точка x_1 — значению $t = 1$. Точку отрезка T^1, соответствующую значению t введенного параметра, обозначим через x_t. Пусть, далее, $p(t)$ — произвольный путь в C, соединяющий точки

$$p(0) = \xi^{-1}_{T^1, x_0}(\mathfrak{S}(x_0))$$

и

$$p(1) = \xi^{-1}_{T^1, x_1}(\mathfrak{S}(x_1)).$$

Тогда, положив

$$\mathfrak{S}(x_t) = \xi_{T^1, x_t}(p(t)),$$

мы получим, как легко видеть, секущую поверхность над T^1, совпадающую в концах этого отрезка с ранее выбранной над B^0 секущей поверхностью. Проделав это построение для всех одномерных симплексов комплекса B, мы получим секущую поверхность над всем остовом B^1.

Для выяснения вопроса о возможности построения секущей поверхности над остовами более высоких размерностей мы рассмотрим гомологические свойства секущих поверхностей косого произведения.

4°. Допустимые отображения. Гомеоморфное отображение ξ слоя C на слой C_x называется *допустимым*, если

$$\xi^{-1}_{T, x}\xi \in G,$$

где T — симплекс, содержащий точку x. Это определение корректно в том смысле, что если точка x содержится в двух симплексах T и T', то отображения $\xi^{-1}_{T, x}\xi$ и $\xi^{-1}_{T', x}\xi$ одновременно принадлежат или не принадлежат группе G [см. (3)]. Заметим, что отображение $\xi_{T, x}$, $x \in T$, слоя C на C_x допустимо.

Гомеоморфное отображение η топологического произведения $M \times C$, $M \subset T \in B$, на множество $p^{-1}(M) \subset P$ назовем *допустимым*, если для любой точки $x \in M$ выполнено условие $\eta(x, z) \in C_x$, $z \in C$, и отображение η_x слоя C на C_x, определяемое равенством

$$\eta_x(z) = \eta(x, z), \tag{4}$$

допустимо.

ЛЕММА 1. *Предположим, что группа G косого произведения P линейно связна. Если η_0 и η_1 — допустимые отображения произведения $T \times C$, $T \in B$, на множество $p^{-1}(T)$, то существует такая деформация η_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отображения η_0 в η_1, что для каждого значения t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отображение η_t произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$ допустимо.*

Доказательство. Определим отображения η_{0x} и η_{1x} слоя C на C_x формулами

$$\eta_{0x}(z) = \eta_0(x, z), \quad \eta_{1x}(z) = \eta_1(x, z), \quad x \in T, \quad z \in C,$$

и положим

$$\chi_0(x) = \xi_{T,x}^{-1}\eta_{0x}, \quad \chi_1(x) = \xi_{T,x}^{-1}\eta_{1x}, \quad x \in T.$$

Тогда отображения χ_0 и χ_1 симплекса T в G непрерывны. Так как симплекс T может быть стянут по себе в точку, а каждые две точки группы G могут быть соединены путем в G, то отображения χ_0 и χ_1 гомотопны между собой. Пусть $\gamma_t : T \to G$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — соединяющая их деформация. Положим

$$\eta_{tx} = \xi_{T,x}\gamma_t(x), \quad x \in T,$$

и определим отображение η_t формулой

$$\eta_t(x, z) = \eta_{tx}(z), \quad x \in T, \quad z \in C.$$

Тогда η_t является, очевидно, допустимым отображением, причем при $t = 0,1$ эти отображения совпадают с заданными. Итак, отображения η_0 и η_1 гомотопны между собой.

5°. Препятствие. Предположим, что слой C косого произведения P является пространством, гомотопически простым в некоторой размерности $s \geqslant 1$ (при $s = 1$ группа $\pi^1(C)$ — абелева). Предположим, далее, что над s-мерным остовом B^s базисного комплекса B задана в P секущая поверхность $\mathfrak{S}$. Пусть T^{s+1} — произвольный $(s+1)$-мерный ориентированный симплекс комплекса B, $T^{s+1} = \Sigma^s$ — его ориентированная граница, а η — допустимое отображение произведения $T^{s+1} \times C$ на множество $p^{-1}(T^{s+1})$.

Для любого симплекса T комплекса B обозначим через Π отображение произведения $T \times C$ на C, определенное равенством

$$\Pi(x, z) = z, \quad x \in T, \quad z \in C. \tag{5}$$

Так как над множеством Σ^s секущая поверхность $\mathfrak{S}$ задана, то, положив

$$F(x) = \Pi\eta^{-1}\mathfrak{S}(x) = \eta_x^{-1}(\mathfrak{S}(x)), \quad x \in \Sigma^s,$$

[см. (4)], мы получаем непрерывное отображение ориентированной сферы Σ^s в C. Элемент группы $\pi^s(C)$, определяемый отображением F, мы обозначим через $\vartheta_{\mathfrak{S}}^{s+1}(T^{s+1})$. Этот элемент не зависит от выбора допустимого отображения η, а определяется однозначно секущей поверхностью $\mathfrak{S}$. Действительно, если отображение η деформируется, оставаясь допусти-

мым, то отображение F также непрерывно деформируется, а определяемый этим отображением элемент группы $\pi^s(C)$ не меняется. Всякие же два допустимых отображения, согласно лемме 1, гомотопны. Так как, далее,

$$\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}(-T^{s+1}) = -\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}(T^{s+1}),$$

то функция $\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}$, заданная на $(s+1)$-мерных ориентированных симплексах комплекса B, является $(s+1)$-мерной цепью по области коэффициентов $\pi^s(G)$. Эта цепь называется *препятствием* для секущей поверхности $\mathfrak{S}$.

Нетрудно видеть, что препятствие $\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}$ является ∇-циклом. Действительно, пусть T^{s+2} — произвольный $(s+2)$-мерный симплекс комплекса B и η — допустимое отображение произведения $T^{s+2} \times C$ на $p^{-1}(T^{s+2})$. Положим:

$$F(x) = \Pi\eta^{-1}\mathfrak{S}(x), \quad x \in L^s,$$

[см. (5)], где L^s есть s-мерный остов симплекса T^{s+2}. Тогда для любой $(s+1)$-мерной грани T^{s+1} симплекса T^{s+2} отображение F границы $\dot{T}^{s+1}$ симплекса T^{s+1} в C определяет элемент группы $\pi^s(C)$, равный $\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}(T^{s+1})$. Таким образом, вопрос сводится к случаю непрерывного отображения s-мерного остова симплекса T^{s+2} в C и потому [см. ([10])] значение цепи $\nabla\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}$ на симплексе T^{s+2} равно нулю.

Аналогично доказываются и остальные свойства препятствия. Ограничимся указанием формулировок [см. ([10])].

(а) При деформации секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над остовом B^s, препятствие $\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1}$ не меняется.

(б) Для возможности распространения секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над остовом B^s, на остов B^{s+1} необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $\delta_{\mathfrak{S}}^{s+1} = 0$.

6°. Различающая. Пусть $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ — две секущие поверхности косого произведения P, заданные над B^s и совпадающие над B^{s-1}. Пусть, далее, T^s — произвольный ориентированный s-мерный симплекс комплекса B, а η — допустимое отображение произведения $T^s \times C$ на $p^{-1}(T^s)$. Положим

$$F_i(x) = \Pi\eta^{-1}\mathfrak{S}_i(x) = \eta_x^{-1}(\mathfrak{S}_i(x)), \quad i = 0, 1, \quad x \in T, \tag{6}$$

[см. (4), (5)]. Тогда отображения F_0 и F_1 ориентированного симплекса T^s в C совпадают на границе $\dot{T}^s$ этого симплекса, и потому определена различающая $d^s(F_0, F_1)$ для этих отображений [см. ([10])]. Эта различающая не зависит от выбора допустимого отображения η, что доказывается так же, как для препятствия. Мы обозначим эту различающую через $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}(T^s)$. Цепь $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}$ по области коэффициентов $\pi^s(C)$ называется *различающей* для секущих поверхностей $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$. Свойства ее аналогичны тем, которые имеются в случае непрерывных отображений или векторных полей на многообразии [см. ([10])]. Ограничимся указанием формулировок.

(а) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, заданные над B^s, одновременно деформируются, оставаясь совпадающими на B^{s-1}, то различающая $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}$ не меняется.

(б) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, заданные над B^s и совпадающие над B^{s-1}, таковы, что $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} = 0$, то эти секущие поверхности гомотопны относительно B^{s-1}.

(в) Для любых трех секущих поверхностей $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$, заданных над B^s и совпадающих над B^{s-1}, имеют место соотношения:

$$\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} + \partial^s_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2} = \partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_2},$$
$$\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} = -\partial^s_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_0}.$$

(г) Если $\mathfrak{S}_0$ — секущая поверхность, заданная над B^s, а d^s — произвольная s-мерная цепь комплекса B по области коэффициентов $\pi^s(C)$, то над B^s существует такая секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$, совпадающая с $\mathfrak{S}_0$ над B^{s-1}, что $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} = d^s$.

(д) Если заданная над B^s секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$ деформируется относительно B^{s-2}, а получившаяся в результате деформации секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ совпадает с $\mathfrak{S}_0$ над B^{s-1}, то $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}$ есть гомологичный нулю ∇-цикл.

(е) Обратно, если для двух заданных над B^s и совпадающих над B^{s-1} секущих поверхностей $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ различающая $\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}$ является гомологичным нулю ∇-циклом, то $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ гомотопны относительно B^{s-2}.

(ж) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, заданные над B^s, совпадают над B^{s-1}, то

$$\nabla\partial^s_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} = \mathfrak{z}^{s+1}_{\mathfrak{S}_1} - \mathfrak{z}^{s+1}_{\mathfrak{S}_0}.$$

(з) Если секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$ задана над B^s и z^{s+1} есть ∇-цикл, гомологичный препятствию $\mathfrak{z}^{s+1}_{\mathfrak{S}_0}$ секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$, то существует секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ (заданная над B^s и совпадающая с $\mathfrak{S}_0$ над B^{s-1}), для которой $\mathfrak{z}^{s+1}_{\mathfrak{S}_1} = z^{s+1}$.

7°. Деформации секущих поверхностей.

ЛЕММА 2. *Пусть K и L — подкомплексы комплекса B, $K \subset L$. Если над L задана секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$ и если $\mathfrak{S}_t$ — деформация этой секущей поверхности, заданная над K, то ее можно продолжить в деформацию секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$, заданной над всем подкомплексом L.*

Доказательство. Для каждой вершины x комплекса L, не принадлежащей подкомплексу K, положим

$$\mathfrak{S}_t(x) = \mathfrak{S}_0(x).$$

Тогда деформация $\mathfrak{S}_t$ секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ будет определена над подкомплексом $K \cup L^0$, где L^0 — нульмерный остов комплекса L. Предположим, что деформация $\mathfrak{S}_t$ секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ задана уже над $K \cup L^s$, где L^s есть s-мерный остов комплекса L, $s \geqslant 0$. Пусть T — произвольный $(s+1)$-мерный симплекс комплекса L, не содержащийся в K. Положим

$$F_t(x) = \Pi\xi_T^{-1}\mathfrak{S}_t(x) = \xi_{T,x}^{-1}(\mathfrak{S}_t(x)),$$

где $x \in T$ при $t = 0$ и $x \in \dot{T}$ при $t > 0$. Тогда F_0 есть непрерывное отображение симплекса T в слой C, а F_t — деформация этого отображения,

заданная на границе симплекса T. Эту деформацию можно продолжить на весь симплекс T. Положив

$$\mathfrak{S}_t(x) = \xi_{T,x}(F_t(x)), \quad x \in T,$$

мы получим деформацию секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ над симплексом T, причем над границей симплекса эта деформация совпадает с имевшейся ранее. Проделав это построение для всех $(s+1)$-мерных симплексов комплекса L, не принадлежащих комплексу K, мы получим деформацию $\mathfrak{S}_t$ секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ над $K \cup L^{s-1}$. Проведенная индукция и доказывает нашу лемму.

8°. Первое препятствие. Начиная с этого пункта, мы будем предполагать, что слой C косого произведения P асферичен во всех размерностях, меньших r, где r — натуральное число, т. е. что группа $\pi^s(C)$ тривиальна при $s < r$. При $r = 1$ вместо этого предположим, что группа $\pi^1(C)$ абелева. Поэтому при определении элементов группы $\pi^r(C)$ при помощи отображений сферы S^r в C можно не фиксировать полюса отображаемой сферы.

Перейдем к рассмотрению первых препятствий.

(а) Над r-мерным остовом базисного комплекса B можно построить секущую поверхность косого произведения P.

Действительно, выберем секущую поверхность $\mathfrak{S}$ над остовом B^1 произвольно (см. 3°). Если $r = 1$, то тем самым наша цель достигнута; если же $r > 1$, то препятствие $\delta^2_{\mathfrak{S}}$ для секущей поверхности $\mathfrak{S}$ равно нулю (в силу тривиальности группы $\pi^1(C)$), так что секущую поверхность $\mathfrak{S}$ можно продолжить на остов B^2. При $r = 2$ эта секущая поверхность является искомой; если же $r > 2$, то ее можно продолжить на B^3 (в силу тривиальности препятствия), и т. д.

(б) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ заданы над B^{r-1}, то они гомотопны между собой.

В самом деле, секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, рассматриваемые только над B^0, очевидно, гомотопны. Поэтому (см. лемму 2) секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$, рассматриваемая над всем остовом B^{r-1}, может быть продеформирована в такую секущую поверхность $\mathfrak{S}_0^{(0)}$, которая совпадает с $\mathfrak{S}_1$ над B^0. Пусть секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$ продеформирована уже в такую секущую поверхность $\mathfrak{S}_0^{(s-1)}$, которая совпадает с $\mathfrak{S}_1$ над B^{s-1}, $s < r$. Тогда для секущих поверхностей $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_0^{(s-1)}$ определена s-мерная различающая, которая равна нулю в силу тривиальности группы $\pi^s(C)$. Поэтому [см. 6°, (б)] секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_0^{(s-1)}$, рассматриваемые только над B^s, гомотопны. Отсюда следует (см. лемму 2), что секущая поверхность $\mathfrak{S}_0^{(s-1)}$, а значит и $\mathfrak{S}_0$, гомотопна такой секущей поверхности $\mathfrak{S}_0^{(s)}$, которая совпадает с $\mathfrak{S}_1$ над B^s. Полагая последовательно $s = 1, 2, \ldots, r-1$, мы и докажем сформулированное предложение.

(в) Всякие две секущие поверхности, заданные над остовом B^s, $s \geqslant r-1$, могут быть деформацией совмещены над B^{r-1}. Это следует непосредственно из (б) и леммы 2.

(г) Пусть $\mathfrak{S}$ — секущая поверхность, заданная над B^r. Тогда препятствие $\delta^{r+1}_{\mathfrak{S}}$ для этой секущей поверхности является ∇-циклом комплекса B по области коэффициентов $\pi^r(C)$. Мы будем называть этот цикл

первым препятствием, так как препятствия низших размерностей равны нулю в силу тривиальности групп $\pi^s(C)$ при $s < r$.

ТЕОРЕМА О ПЕРВЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ. *Над r-мерным остовом B^r базисного комплекса B всегда можно построить в P секущую поверхность $\mathfrak{S}$, и для нее будет определено первое препятствие $\delta_{\mathfrak{S}}^{r+1}$, являющееся ∇-циклом по области коэффициентов $\pi^r(C)$. Класс гомологий первого препятствия $\delta_{\mathfrak{S}}^{r+1}$ не зависит от выбора секущей поверхности $\mathfrak{S}$ (т. е. всякие два первых препятствия гомологичны между собой). Этот класс гомологий мы обозначим через Y^{r+1}. Он называется характеристическим классом косого произведения P. Для возможности построения секущей поверхности над остовом B^{r+1} необходимо и достаточно, чтобы $Y^{r+1} = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две секущие поверхности, заданные над B^r, а $\mathfrak{S}_0$ — такая секущая поверхность, также заданная над B^r и гомотопная поверхности $\mathfrak{S}$, что $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}'$ совпадают над B^{r-1} [см.(в)]. Тогда

$$\delta_{\mathfrak{S}}^{r+1} = \delta_{\mathfrak{S}_0}^{r+1}$$

[см. 5°, (а)] и

$$\nabla\partial^r(\mathfrak{S}', \mathfrak{S}_0) = \delta_{\mathfrak{S}_0}^{r+1} - \delta_{\mathfrak{S}'}^{r+1}$$

[см. 6°, (ж)]. Таким образом,

$$\delta_{\mathfrak{S}}^{r+1} \underset{\nabla}{\sim} \delta_{\mathfrak{S}'}^{r+1}.$$

Если над B^{r+1} можно построить секущую поверхность, то эта поверхность, рассматриваемая только над остовом B^r, имеет первое препятствие, равное нулю [см. 5°, (б)], т. е. $Y^{r+1} = 0$. Обратно, если $Y^{r+1} = 0$, то [см. 6°, (з)] всякий цикл класса гомологий Y^{r+1}, т. е. гомологичный нулю, является первым препятствием для некоторой секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над B^r. В частности, над B^r существует такая секущая поверхность $\mathfrak{S}$, для которой $\delta_{\mathfrak{S}}^{r+1} = 0$, т. е. поверхность, которую можно продолжить на остов B^{r+1}.

9° Второе препятствие. Начиная с этого пункта, мы будем предполагать, что для рассматриваемого косого произведения P класс гомологий Y^{r+1} является нулевым и что слой C косого произведения P является пространством, гомотопически простым в размерности $r+1$ (при $r > 1$ последнее предположение имеет место в силу тривиальности группы $\pi^1(C)$). Согласно доказанной теореме, в P можно построить секущую поверхность над остовом B^{r+1}. Мы будем рассматривать вопрос о возможности построения секущей поверхности над остовом B^{r+2}.

(а) Если гомотопные между собой секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$, заданные над остовом B^s, $s \geqslant r$, совпадают на B^{r-1}, то различающая $\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1}$ есть гомологичный нулю ∇-цикл *. При $r = 1$ это следует из предложения 6°, (д). Пусть $r > 1$ и $\mathfrak{S}_t$ — деформация секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$ в $\mathfrak{S}_1$. Будем строить семейство $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ секущих поверхностей, зависящее от двух параметров t, τ $(0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$. Именно, над B^s положим

$$\mathfrak{S}_{0,\tau} = \mathfrak{S}_0, \quad \mathfrak{S}_{1,\tau} = \mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{S}_{t,0} = \mathfrak{S}_t$$

* Приведенное доказательство этого предложения может быть упрощено применением понятия индуцированного произведения.

и, кроме того,

$$\mathfrak{S}_{t,1} = \mathfrak{S}_0 (= \mathfrak{S}_1)$$

над B^{r-2}. Пусть x — вершина комплекса B. Совокупность значений (t, τ) образует квадрат Q. Для значений (t, τ) на границе $\dot{Q}$ этого квадрата (т. е. при выполнении хотя бы одного из равенств $t = 0, t = 1, \tau = 0, \tau = 1$) секущая поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}(x)$ определена. Положив

$$F(t, \tau) = \eta^{-1}\mathfrak{S}_{t,\tau}(x), \quad (t, \tau) \in \dot{Q},$$

где η — допустимое отображение слоя C на C_x, мы получаем непрерывное отображение F границы $\dot{Q}$ квадрата Q в слой C. Это отображение можно продолжить в отображение F всего квадрата Q в C (ибо группа $\pi^1(C)$ тривиальна). Положив теперь

$$\mathfrak{S}_{t,\tau}(x) = \eta F(t, \tau), \quad (t, \tau) \in Q,$$

мы определим секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над x для всех значений (t, τ), причем для значений (t, τ), лежащих на границе квадрата, эта секущая поверхность будет совпадать с имевшейся ранее. Пользуясь этим приемом, мы определим секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над остовом B^0 для всех значений (t, τ). Предположим, что секущая поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ определена уже над B^m, $m < r - 2$, для всех значений (t, τ). Пусть T — произвольный $(m+1)$-мерный симплекс комплекса B. Тогда секущая поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ уже задана над $\dot{T}$ для всех значений (t, τ) и над всем симплексом T для значений (t, τ) на границе квадрата Q. Положив

$$F(t, \tau, x) = \Pi\xi_T^{-1}\mathfrak{S}_{t,\tau}(x) = \xi_{T,x}^{-1}\mathfrak{S}_{t,\tau}(x) \tag{7}$$

[см. (5)], мы получим отображение F границы клетки $Q \times T$ в слой C. Это отображение можно продолжить на всю клетку $Q \times T$ (в силу тривиальности группы $\pi^{m+2}(C)$). Положив теперь

$$\mathfrak{S}_{t,\tau}(x) = \xi_{T,x}F(t, \tau, x), \quad (t, \tau) \in Q, \quad x \in T, \tag{8}$$

мы определим секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над T для всех значений (t, τ). Пользуясь этим приемом, мы определим секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над остовом B^{m+1} для всех значений (t, τ). Продолжая таким же образом, мы сможем определить поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над остовом B^{r-2} для всех значений (t, τ). Пусть T — произвольный $(r-1)$-мерный симплекс комплекса B. Определим функцию $F(t, \tau, x)$ формулой (7) (для тех значений t, τ, x, для которых секущая поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ определена). Отображение F определено на всей границе клетки $Q \times T$ за исключением r-мерной грани $\tau = 1$. Поэтому его можно продолжить на всю клетку $Q \times T$. После этого мы сможем по формуле (8) распространить секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ над T для всех значений (t, τ). Таким образом, секущую поверхность $\mathfrak{S}_{t,\tau}$ можно продолжить на B^{r-1}. Таким же способом мы продолжим ее последовательно над остовами $B^r, B^{r+1}, \ldots, B^s$.

Рассмотрим построенную секущую поверхность только для значений $\tau = 1$; именно, положим $\mathfrak{S}'_t = \mathfrak{S}_{t,1}$. Тогда

$$\mathfrak{S}'_0 = \mathfrak{S}_0, \quad \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}_1,$$

причем деформация $\mathfrak{S}_t'$ стационарна на остове B^{r-2}. Доказываемое предложение вытекает теперь из 6°, (д).

(б) Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две секущие поверхности, заданные над остовом B^{r+1}. Согласно предложению 8°, (в), можно при помощи деформации привести эти секущие поверхности к совпадению над остовом B^{r-1}, после чего для них будет определена различающая $\partial^r_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'}$. Эта различающая является ∇-циклом, так как обе секущие поверхности заданы над всем остовом B^{r+1} [см. 6°, (ж) и 5°, (б)]. Самый цикл $\partial^r_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'}$ зависит от выбора деформации, при помощи которой секущие поверхности приведены к совпадению над остовом B^{r-1}, но, как мы сейчас покажем, класс гомологий $D^r(\mathfrak{S},\mathfrak{S}')$ этого цикла однозначно определяется секущими поверхностями $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$. В самом деле, пусть $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_0'$ — две совпадающие над B^{r-1} секущие поверхности, получившиеся из $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ при помощи одной деформации, а $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_1'$ — секущие поверхности, получившиеся в результате другой деформации (и также совпадающие между собой над B^{r-1}). Деформируя секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_0'$ одновременно, оставляя их совпадающими над B^{r-1} (при этом различающая меняться не будет), можно добиться того, что все четыре секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_0'$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$ будут совпадать над B^{r-1}. Мы должны показать, что цикл

$$\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_0'} - \partial^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_1'} = \partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} + \partial^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_0'} -$$

$$- (\partial^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_0'} + \partial^r_{\mathfrak{S}_0',\mathfrak{S}_1'}) = \partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} - \partial^r_{\mathfrak{S}_0',\mathfrak{S}_1'}$$

гомологичен нулю. Но секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ гомотопны между собой (они получились из $\mathfrak{S}$ двумя разными деформациями) и совпадают над остовом B^{r-1}, так что, в силу (а), мы имеем:

$$\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1} \underset{\nabla}{\sim} 0.$$

Точно так же

$$\partial^r_{\mathfrak{S}_0',\mathfrak{S}_1'} \underset{\nabla}{\sim} 0.$$

(в) Для каждой секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над B^{r+1}, определено препятствие $\delta\mathfrak{S}^{r+2}$, которое мы будем называть *вторым препятствием*. Оказывается, что если $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}''$ — такие три секущие поверхности, заданные над B^{r+1}, что

$$D^r(\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}') = D^r(\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}''),$$

то вторые препятствия $\delta\mathfrak{S}'^{r+2}$ и $\delta\mathfrak{S}''^{r+2}$ гомологичны. При доказательстве мы можем предполагать, что все три секущие поверхности $\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}',\mathfrak{S}''$ совпадают над остовом B^{r-1} (этого можно добиться при помощи деформации). Тогда циклы $\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}'}$ и $\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}''}$ по условию гомологичны между собой, так что ∇-цикл

$$\partial^r_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}''} = \partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}''} - \partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}'}$$

гомологичен нулю. Отсюда следует, что секущие поверхности $\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}''$ могут быть деформацией приведены к совпадению над B^r [см. 6°, (е) и лемму 2], и потому их вторые препятствия гомологичны [см. 6°, (ж)].

(г) Пусть $\mathfrak{S}_0$ — секущая поверхность, заданная над B^{r+1}, а D^r — произвольный элемент группы $\nabla^r(B, \pi^r(C))$. Тогда существует такая секущая поверхность $\mathfrak{S}'$, определенная над B^{r+1}, что

$$D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}') = D^r.$$

Действительно, пусть d^r — цикл класса гомологий D^r, а $\mathfrak{S}'$ — такая секущая поверхность, заданная над B^r и совпадающая с $\mathfrak{S}_0$ над B^{r-1}, что $\partial^r_{\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}'} = d^r$ [см. 6°, (г)]. Тогда, в силу соотношений

$$\nabla d^r = 0, \quad \delta^{r+1}_{\mathfrak{S}_0} = 0,$$

мы имеем:

$$\delta^{r+1}_{\mathfrak{S}'} - \delta^{r+1}_{\mathfrak{S}_0} + \nabla d^r = 0,$$

и потому секущая поверхность $\mathfrak{S}'$ может быть продолжена на остов B^{r+1}, что и дает нам искомую секущую поверхность.

(д) Выберем над остовом B^{r-1} произвольную, но раз навсегда фиксированную секущую поверхность $\mathfrak{S}_0$. Тогда из (в) следует, что класс гомологий $\Im^{r+2}(\mathfrak{S})$ второго препятствия $\delta^{r-2}_{\mathfrak{S}}$ произвольной секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над B^{r+1}, однозначно определяется классом гомологий $D^r = D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$. Мы положим поэтому

$$\Im^{r+2}(D^r) = \Im^{r+2}(\mathfrak{S}),$$

где $D^r = D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$. Из (г) следует, что символ $\Im^{r+2}(D^r)$ определен для любого элемента D^r группы $\nabla^r(B, \pi^r(C))$. Далее, из 6° (з), следует, что каждый цикл, принадлежащий классу гомологий $\Im^{r+2}(D^r)$, является вторым препятствием для некоторой секущей поверхности, заданной над B^{r+1}. Таким образом, имеет место следующее предложение.

ЛЕММА 3. *Вторые препятствия секущих поверхностей, заданных над остовом B^{r+1}, полностью заполняют один или несколько классов гомологий. Все эти классы гомологий (и только они) имеют вид $\Im^{r+2}(D^r)$, где D^r пробегает всю группу $\nabla^r(B, \pi^r(C))$. Для возможности построения секущей поверхности $\mathfrak{S}$ над остовом B^{r+2} необходимо и достаточно, чтобы среди классов гомологий $\Im^{r+2}(D^r)$, $D^r \in \nabla^r(B, \pi^r(C))$, содержался нулевой класс.*

Вычисление символа $\Im^{r+2}(D^r)$ (и, тем самым, вычисление всех классов гомологий, заполняемых вторыми препятствиями) в явном виде и является целью настоящей работы. Это вычисление проведено в следующем параграфе.

§ 2. Вычисление второго препятствия

10°. Лемма о допустимых отображениях. В этом пункте мы будем предполагать, что группа G преобразований слоя C транзитивна и обладает локальной секущей поверхностью g_z (см. 1°). Элемент $g_z \in G$ определен при $z \in U$, где U — некоторая окрестность точки c в слое C, причем отображение

$$z \to g_z$$

множества U в G непрерывно, и имеет место соотношение

$$g_z(c) = z, \quad z \in U.$$

Из этого следует, что G является косым произведением (в общем смысле Стинрода ([3])) над базисным пространством C. Слоем этого косого произведения является стабильная подгруппа Γ (относительно некоторой точки $c \in C$), а проекция $\bar{p}$ определяется формулой

$$\bar{p}(g) = g(c), \quad g \in G. \tag{9}$$

Докажем следующую важную лемму о допустимом отображении.

ЛЕММА 4. *Пусть над симплексом $T \in B$ задана секущая поверхность $\mathfrak{S}$ косого произведения P. Тогда существует такое допустимое отображение η произведения $T \times C$ на множество $\bar{p}^{-1}(T)$, что для каждой точки $x \in T$ имеем*

$$\eta(x, c) = \mathfrak{S}(x).$$

Доказательство. Положив

$$f(x) = \xi_{T,x}^{-1}(\mathfrak{S}(x)), \quad x \in T,$$

мы получаем непрерывное отображение f симплекса T в слой C. Согласно лемме о накрывающей гомотопии [см. ([3]), § 11], существует такое непрерывное отображение φ симплекса T в группу G, что $f = \bar{p}\varphi$. Иначе говоря, полагая $\varphi(x) = \varphi_x$, $x \in T$, будем иметь $\varphi_x(c) = f(x)$ [см. (9)], т. е.

$$\xi_{T,x}(\varphi_x(c)) = \mathfrak{S}(x).$$

Поэтому, положив

$$\eta(x, z) = \xi_{T,x}(\varphi_x(z)), \quad x \in T, \quad z \in C,$$

мы получаем искомое допустимое отображение.

11°. Класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$. Пусть $\mathfrak{S}$—секущая поверхность произведения P, заданная над остовом B^{r+1}. Для $x \in B^{r+1}$ обозначим через Γ_x множество всех допустимых отображений слоя C на C_x, переводящих точку c в $\mathfrak{S}(x)$. Через $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ обозначим объединение всех множеств Γ_x по $x \in B^{r+1}$. Для каждой точки $y \in \tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ существует единственная точка $x \in B^{r+1}$ для которой $y \in \Gamma_x$, и мы положим

$$\tilde{p}_{\mathfrak{S}}(y) = x.$$

Тогда $\tilde{p}_{\mathfrak{S}}$ есть отображение множества $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ на B^{r+1}. Для каждого симплекса $T \in B^{r+1}$ выберем такое допустимое отображение η_T произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$, что

$$\eta_T(x, c) = \mathfrak{S}(x), \quad x \in T,$$

(см. лемму 4). Допустимое отображение слоя C на C_x, переводящее точку $z \in C$ в точку $\eta_T(x, z)$, обозначим через $\eta_{T,x}$. Далее, положим:

$$\tilde{\xi}_T(x, \gamma) = \eta_{T,x}\gamma, \quad x \in T, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Тогда $\tilde{\xi}_T$ есть взаимно однозначное отображение произведения $T \times \Gamma$ на множество $\tilde{p}_{\mathfrak{S}}^{-1}(T)$, ибо $\tilde{\xi}_T(x, \gamma) \in \Gamma_x$ и из

$$\tilde{\xi}_T(x, \gamma) = \tilde{\xi}_T(x, \gamma'),$$

т. е.

$$\eta_{T,x}\gamma = \eta_{T,x}\gamma'$$

следует $\gamma = \gamma'$. Зададим в множестве $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ топологию, считая, что $\tilde{\xi}_T$ есть гомеоморфизм для любого $T \in B^{r+1}$. Если η'_T — другое допустимое отображение, аналогичное η_T, и

$$\tilde{\xi}'_T(x, \gamma) = \eta'_{T,x}\gamma,$$

то отображения $\tilde{\xi}_T$ и $\tilde{\xi}'_T$ связаны соотношением:

$$\tilde{\xi}'_T(x, \gamma) = \tilde{\xi}_T(x, \eta_{T,x}^{-1}\eta'_{T,x}\gamma). \tag{13}$$

Из (13) следует, что введенная топология согласована на симплексах комплекса B^{r+1} и их гранях и что эта топология не зависит от выбора отображений η_T. Покажем, что $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ есть косое произведение с базисным пространством B^{r+1}, слоем Γ и группой Γ. Непрерывность отображения $\tilde{p}_{\mathfrak{S}}$ и правильность соотношения (2) проверяются непосредственно. Далее, положив

$$\tilde{\xi}_{T,x}(\gamma) = \tilde{\xi}_T(x, \gamma), \quad \gamma \in \Gamma,$$

мы легко найдем, что отображение $\tilde{\xi}_{T,x}^{-1}\tilde{\xi}_{T',x}$ слоя Γ на себя определяется соответствием

$$\gamma \to \eta_{T,x}^{-1}\eta_{T',x}\gamma.$$

Таким образом, отображение $\tilde{\xi}_{T,x}^{-1}\tilde{\xi}_{T',x}$ сводится к умножению всех элементов группы Γ слева на один и тот же элемент $\eta_{T,x}^{-1}\eta_{T',x} \in \Gamma$, причем этот элемент непрерывно зависит от $x \in T \cap T'$. Мы видим, что $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ есть косое произведение (см. 2°), причем группа Γ, как группа преобразований слоя Γ, является группой левых операторов (в смысле умножения, имеющегося в группе Γ).

Будем предполагать, что слой Γ косого произведения $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ линейно связен. Тогда (см. 3°) над остовом B^1 можно построить секущую поверхность этого произведения. Группа $\pi^1(\Gamma)$ — абелева (ибо Γ есть топологическая группа), и потому к произведению $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$ применимы рассуждения n° 8, относящиеся к случаю $r = 1$. Таким образом, для секущей поверхности $\tilde{\mathfrak{S}}$ произведения $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$, заданной над остовом B^1, определено первое препятствие $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}}$, являющееся двумерным ∇-циклом комплекса B^{r+1} по области коэффициентов $\pi^1(\Gamma)$. Класс гомологий этого ∇-цикла мы обозначим через $\tilde{Y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}}$. Этот класс гомологий не зависит от выбора секущей поверхности $\tilde{\mathfrak{S}}$, а определяется однозначно косым произведением $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$, т. е. секущей поверхностью $\mathfrak{S}$. При $r > 1$ группа $\nabla^2(B^{r+1}, \pi^1(\Gamma))$, содержащая $\tilde{Y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}}$ в качестве своего элемента, естественным образом изо-

морфна группе $\nabla^2(B, \pi^1(\Gamma))$, т. е. класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{C}}$ можно считать (при $r > 1$) элементом группы $\nabla^2(B, \pi^1(\Gamma))$.

12°. Построение пары групп. Определим умножение элементов групп $G_1 = \pi^r(C)$ и $G_2 = \pi^1(\Gamma)$, при котором произведение будет лежать в группе $G_3 = \pi^{r+1}(C)$. Слой C предполагается гомотопически простым в размерностях r и $r+1$. Пусть α и β — произвольные элементы групп G_1 и G_2 соответственно. Пусть, далее, E^2 и E^r — ориентированные кубы размерностей 2 и r соответственно, а $E^{r+2} = E^2 \times E^r$ — естественным образом ориентированное прямое произведение этих кубов. Границу куба E^i обозначим через S^{i-1}, $i = 2, r$, причем S^1 ориентируемо когерентно с кубом E^2. Выберем произвольное отображение φ одномерной сферы S^1 в Γ, определяющее элемент β группы G_2; при этом в сфере S^1 можно не фиксировать полюса, ибо фундаментальная группа G_2 — абелева. Вместо $\varphi(a)$ будем писать φ_a, $a \in S^1$. Выберем, далее, отображение g элемента E^r в C, переводящее S^{r-1} в точку c и определяющее сфероид класса $\alpha \in G_1$. Определим отображение ψ границы

$$S^{r+1} = S^1 \times E^r \cup E^2 \times S^{r-1}$$

куба E^{r+2} в C, положив:

$$\psi(a, x) = \begin{cases} \varphi_a g(x) & \text{при} \quad a \in S^1, \quad x \in E^r, \\ c & \text{при} \quad a \in E^2, \quad x \in S^{r-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Так как $g(S^{r-1}) = c$, то на $S^1 \times S^{r-1}$ обе строки этого определения согласованы, и ψ есть непрерывное отображение множества S^{r+1} в C. Если отображения g и φ непрерывно деформируются, причем отображение g в любой момент деформации переводит сферу S^{r-1} в точку c, то и отображение ψ непрерывно деформируется. Отсюда следует, что гомотопический класс отображения ψ не зависит от выбора отображений g и φ, а однозначно определяется элементами α и β. Отображение ψ сферы S^{r+1}, ориентированной когерентно с E^{r+2}, в C определяет некоторый элемент γ группы G_3, который, согласно сказанному, однозначно определяется элементами α и β. Мы положим

$$\alpha\beta = \gamma.$$

Определенное таким образом умножение билинейно:

$$(\alpha' + \alpha'')\beta = \alpha'\beta + \alpha''\beta, \quad \alpha' \in G_1, \quad \alpha'' \in G_1, \quad \beta \in G_2, \tag{15}$$

$$\alpha(\beta' + \beta'') = \alpha\beta' + \alpha\beta'', \quad \alpha \in G_1, \quad \beta' \in G_2, \quad \beta'' \in G_2. \tag{16}$$

Для доказательства этих соотношений воспользуемся следующей леммой:

ЛЕММА 5. *Пусть E^q, E'^q и E''^q — множества, определенные в q-мерном координатном пространстве формулами:*

$$E^q: \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 2, \ldots, q,$$

$$E'^q: \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 2, \ldots, q,$$

$$E''^q: \quad \frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 2, \ldots, q,$$

и одинаковым образом ориентированные. Границы элементов E^q, E'^q *и* E''^q *обозначим соответственно через* S^{q-1}, S'^{q-1} *и* S''^{q-1}. *Пусть, далее,* ψ *— непрерывное отображение множества* $S^{q-1} \cup S'^{q-1} \cup S''^{q-1}$ *в пространство* C, *гомотопически простое в размерности* $q-1$. *Тогда отображение* ψ *сфер* S^{q-1}, S'^{q-1} *и* S''^{q-1} *в* C *определяет некоторые элементы* λ, λ' *и* λ'' *группы* $\pi^{q-1}(C)$. *Оказывается, что имеет место равенство* $\lambda = \lambda' + \lambda''$.

Доказательство этой леммы без труда следует из известного соотношения для различающих:

$$d^{q-1}(f, g) + d^{q-1}(g, h) = d^{q-1}(f, h).$$

Перейдем к доказательству соотношения (15). Пусть q' и q'' — отображения куба E^r в C, переводящие S^{r-1} в точку c и определяющие элементы α' и α'' соответственно. Будем считать, что куб E^r задан в координатном r-мерном пространстве соотношениями $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда отображение g, определенное формулами

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \begin{cases} g'(2x_1, \quad x_2, \ldots, x_r), & x_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g''(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_r), & x_1 \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

также переводит S^{r-1} в точку c и определяет элемент $\alpha' + \alpha''$ группы G_1. Кроме того, отображение g переводит множество E^{r-1}, определенное соотношениями $x_1 = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 2, \ldots, r$, в точку c. Отображение ψ [см. (14)] дополним на $E^2 \times E^{r-1}$ соотношением $\psi(E^2 \times E^{r-1}) = c$. Далее, считая, что квадрат E^2 определен неравенствами

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = r+1, \quad r+2,$$

рассмотрим множества E^{r+2}, E'^{r+2}, E''^{r+2} и S^{r+1}, S'^{r+1}, S''^{r+1}, о которых шла речь в лемме 5 ($q = r+2$). Отображение ψ сфер S^{r+1}, S'^{r+1}, S''^{r+1} в C определяет соответственно элементы $(\alpha' + \alpha'')\beta$, $\alpha'\beta$, $\alpha''\beta$ группы G_2. Соотношение (15) непосредственно следует теперь из леммы 5. Аналогично доказывается соотношение (16).

13°. Формулировка основной теоремы. В этом пункте формулируется основная теорема о вычислении вторых препятствий. Напомним требования, которые мы предъявляли в предыдущих пунктах к косому произведению P. Слой C предполагается линейно связным и асферичным в размерностях, меньших r. Начиная с этого пункта, мы будем предполагать, что $r \geqslant 2$, так что слой C является гомотопически простым во всех размерностях. Группа G преобразований слоя C обладает локальной секущей поверхностью, эффективна и транзитивна. Стабильная подгруппа Γ линейно связна. Наконец, класс гомологий Y^{r+1}, заполняемый первыми препятствиями, предполагается нулевым.

Перейдем к формулировке основной теоремы. При помощи введенного в n° 12 билинейного умножения мы сможем определить произведение $\smile$ Колмогорова—Александера для элементов групп $\nabla^r(B, G_1)$ и $\nabla^2(B, G_2)$; в частности, будет определено произведение $D^r \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ любого элемента D^r группы $\nabla^r(B, G_1)$ и определенного выше класса гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$.

Пусть, наконец, g — непрерывное отображение комплекса B^r в C, переводящее весь остов B^{r-1} в точку c. Если T^r — ориентированный симплекс комплекса B^r, то отображение g симплекса T^r в C определяет некоторый элемент группы G_1, который мы обозначим через $d_g^r(T^r)$. Таким образом получается r-мерная цепь d_g^r по области коэффициентов G_1. Если D^r — произвольный элемент группы $\nabla^r(B, G_1)$, то существует такое отображение g остова B^r в C, переводящее B^{r-1} в точку c, что цепь d_g^r является ∇-циклом, принадлежащим классу гомологий D^r. Так как d_g^r есть ∇-цикл, то отображение g может быть продолжено на остов B^{r+1}, после чего определится препятствие z_g^{r+2} к продолжению этого отображения на остов B^{r+2} (второе препятствие). Класс гомологий цикла z_g^{r+2} не зависит от выбора отображения g, а однозначно определяется классом гомологий D^r. Мы обозначим класс гомологий цикла z_g^{r+2} через $R^{r+2}(D^r)$. Этот класс гомологий является элементом группы $\nabla^{r+2}(B, G_3)$ и вычислен в работе ([11]). В его выражение входят стинродовские и понтрягинские квадраты.

ЛЕММА 6. *Определенный в* 9^0, (д) *класс гомологий* $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$ *вычисляется на основе следующей формулы*:

$$\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r) = \mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_0) + R^{r+2}(D^r) + D^r \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}. \tag{17}$$

Доказательство этой леммы приведено в n° 14.

Объединяя леммы 3 и 6, мы можем сформулировать следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА. *Все классы гомологий, заполняемые вторыми препятствиями секущих поверхностей, даются формулой**:

$$\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}) + R^{r+2}(D^r) + D^r \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}, \tag{18}$$

где $\mathfrak{S}$ — *произвольная фиксированная секущая поверхность, заданная над* B^{r+1}, $\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S})$ — *класс гомологий ее второго препятствия, а* D^r *пробегает всю группу* $\nabla^r(B, G_1)$.

14^0. Доказательство основной теоремы. Взяв произвольный класс гомологий $D^r \in \nabla^r(B, G_1)$, мы построим над B^{r+1} секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$ специального вида, удовлетворяющую условию

$$D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1) = D^r,$$

и вычислим для нее препятствие $z^{r+2}_{\mathfrak{S}_1} \in \mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$. Тем самым будет проведено доказательство леммы 6 (и, вместе с ней, основной теоремы).

Через L^s обозначим s-мерный звездный остов собственного барицентрического подразделения комплекса B^{r+2}, а через K^s — s-мерный звездный остов такого m-подразделения комплекса B^{r+2}, которое построено на основе распределения масс с попарно различными массами [см. ([12])]. Тогда остовы L^r и K^2 имеют лишь изолированные точки пересечения — по одной внутри каждого $(r+2)$-мерного симплекса T^{r+2} комплекса B^{r+2}, а остовы L^{r-1} и K^2 совсем не пересекаются [см. ([12])]. Если T^{r+1},

* Классификационная теорема для секущих поверхностей, вытекающая из этой формулы, будет опубликована автором отдельно.

$i=0,1,2$,—произвольный $(r+i)$-мерный симплекс комплекса B^{r+2}, а a—точка $(2-i)$-мерной барицентрической звезды, двойственной симплексу T^{r+i} и взятой в комплексе K^2, то через T_a^{r+i} мы будем обозначать симплекс, получающийся из T^{r+i} подобным преобразованием χ_a с центром a и коэффициентом подобия ε. Объединение U_ε всех симплексов T_a^{r+i}, $i=0,1,2$, является, как легко видеть, замыканием некоторой окрестности остова K^2 в B^{r+2}. Объединение внутренностей всех симплексов T_a^{r+2} обозначим через V_ε. При достаточно малом ε пересечение множеств U_ε и L^{r-1} пусто, а пересечение $U_\varepsilon \cap L^r$ состоит из изолированных r-мерных симплексов, лежащих по одному внутри каждого $(r+2)$-мерного симплекса $T^{r+2} \in B^{r+2}$. Число ε будет предполагаться настолько малым, чтобы выполнялись эти условия и условия, которые будут указаны в процессе доказательства.

Рассмотрим косое произведение $\tilde{P}_{\mathfrak{S}_0}$, и пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — секущая поверхность этого произведения, заданная над остовом B^1. Пусть секущая поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}$ продолжена последовательно на множества

$$B^1 = B^1 \setminus L^r,\ B^2 \setminus L^r, \ldots, B^k \setminus L^r,$$

где $1 \leqslant k \leqslant r$. Продолжим ее на $B^{k+1} \setminus L^r$. Пусть T — произвольный $(k+1)$-мерный симплекс комплекса B и η_T — допустимое отображение произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$, удовлетворяющее условию

$$\eta_T(x, c) = \mathfrak{S}_0(x), \quad x \in T \tag{19}$$

(см. лемму 4). Как обычно, будем писать $\eta_T(x, z) = \eta_{T,x}(z)$, $z \in C$. Обозначим через b центр тяжести симплекса T при собственном барицентрическом подразделении, а через π—центральное проектирование множества $T \setminus b$ из точки b на границу $\dot{T}$ симплекса T. Тогда множество $T \setminus L^r$ проектируется при помощи π на множество $\dot{T} \setminus L^r$. Поэтому, положив

$$\tilde{\mathfrak{S}}(x) = \eta_{T,x}\eta_{\dot{T},\pi(x)}^{-1}\tilde{\mathfrak{S}}(\pi(x)), \quad x \in T \setminus L^r, \tag{20}$$

мы получим непрерывное продолжение секущей поверхности $\tilde{\mathfrak{S}}$ на $T \setminus L^r$. Проведя это построение для всех $(k+1)$-мерных симплексов комплекса B, мы сможем распространить секущую поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}$ на $B^{k+1} \setminus L^r$. Наконец, полагая последовательно $k=1, \ldots, r$, мы распространим секущую поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}$ на $B^{r+1} \setminus L^r$. Пусть T — произвольный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B, а η_T — произвольное допустимое отображение произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$. Обозначим через b центр тяжести симплекса T при собственном барицентрическом подразделении, а через π — центральное проектирование множества $T \setminus b$ из точки b на границу $\dot{T}$ симплекса T. Положив

$$\mathfrak{S}_0(x) = \eta_{T,x}\eta_{\dot{T},\pi(x)}^{-1}\mathfrak{S}_0(\pi(x)), \quad x \in T \setminus b,$$

мы распространим секущую поверхность $\mathfrak{S}_0$ на $T \setminus b$. Наконец, для $x \in T \setminus L^r$ определим $\tilde{\mathfrak{S}}(x)$ формулой (20). Проделав это для всех $(r+2)$-мерных симплексов комплекса B, мы распространим секущую поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ на $B^{r+2} \setminus L^0$. Кроме того, для любой точки $x \in B^{r+2} \setminus L^r$ определе-

но допустимое отображение $\mathfrak{S}(x)$ слоя C на C_x, переводящее точку c в точку $\mathfrak{S}_0(x)$. Для удобства записи мы положим $\widetilde{\mathfrak{S}}(x) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x$. Заметим, что точка $\widetilde{\mathfrak{S}}_x(z)$ непрерывно зависит от пары переменных x, z при $x \in B^{r+2} \setminus L^r$, $z \in C$. Это следует из определения топологии в косом произведении $\widetilde{P}_{\mathfrak{S}_0}$ и из формулы (20).

Перейдем к построению секущей поверхности $\mathfrak{S}_1$, для которой имеет место соотношение

$$D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1) = D^r.$$

Пусть d^r — произвольный ∇-цикл, принадлежащий классу гомологий D^r. Выберем такое непрерывное отображение g остова B^r в C, которое переводит остов B^{r-1} в точку c и обладает тем свойством, что элемент группы G_1, определяемый отображением g любого ориентированного симплекса $T^r \in B^r$ в C, равен $d^r(T^r)$. Тогда отображение g может быть непрерывно продолжено на остов B^{r+1}. Продолженное таким образом отображение мы снова обозначим через g. Пусть x — произвольная точка множества $U_\varepsilon \setminus (V_\varepsilon \cup L^r)$ и T_a^{r+i}, $i = 0,1$, — содержащий эту точку симплекс. Тогда точка $a = a(x)$ непрерывно зависит от x, и мы положим:

$$\mathfrak{S}_1(x) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x g \chi_{a(x)}^{-1}(x), \quad x \in U_\varepsilon \setminus (V_\varepsilon \cup L^r). \tag{21}$$

Точка $\mathfrak{S}_1(x)$ также непрерывно зависит от x, и мы получаем секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$, заданную над $U_\varepsilon \setminus (V_\varepsilon \cup L^r)$. При этом на границе $\overline{B^{r+2} \setminus U_\varepsilon} \cap U_\varepsilon$ множества U_ε (т. е. для таких точек x, что $\chi_{a(x)}^{-1}(x) \in B^{r-1}$) секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ совпадает с $\mathfrak{S}_0$. Поэтому, считая на $B^{r+2} \setminus (U_\varepsilon \cup L^0)$ секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$ совпадающей с $\mathfrak{S}_0$, мы получим непрерывную секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$, заданную над

$$B^{r+2} \setminus [(L^r \cap U_\varepsilon) \cup V_\varepsilon \cup L^0].$$

В частности, секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ определена над всем остовом B^{r+1}.

Покажем, что $D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1) = D^r$. Пусть T — произвольный r-мерный ориентированный симплекс комплекса B, a — его центр тяжести в m-подразделении, примененном для построения остовов K^s (т. е. $a = T \cap K^z$), а χ_a — соответствующее точке a подобное преобразование, так что

$$T_a = \chi_a(T) = T \cap U_\varepsilon.$$

Вычислим значение различающей $\partial^r_{\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1}$ на симплексе T. Так как на $T \setminus T_a$ секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ совпадают, то достаточно вычислить значение различающей на симплексе T_a, считая, что он ориентирован так же, как и симплекс T. Над всем симплексом T_a определена секущая поверхность $\widetilde{\mathfrak{S}}$ (ибо $T_a \cap L^r = 0$), и мы положим

$$\eta(x, z) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x(z), \quad x \in T_a, \quad z \in C.$$

Полученное допустимое отображение η произведения $T_a \times C$ на $p^{-1}(T_a)$ мы и применим для вычисления различающей (см. 6°). Отображения F_0 и F_1, определенные в 6°, будут иметь следующий вид:

$$F_0(x) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\mathfrak{S}_0(x)) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_x(c)) = c, \quad x \in T_a,$$
$$F_1(x) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\mathfrak{S}_1(x)) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_x g \chi_a^{-1}(x)) = g \chi_a^{-1}(x), \quad x \in T_a.$$

Таким образом, отображение F_0 переводит весь симплекс T_a в точку $c \in C$. Отображение F_1 является суперпозицией двух отображений, первое из которых, т. е. χ_a^{-1}, накладывает симплекс T_a на T со степенью $+1$, а второе совпадает с g. Отсюда следует, что отображение F_1 определяет элемент $d^r(T)$ гомотопической группы G_1. Мы имеем:

$$\partial^r_{\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1}(T) = d^r(T) - 0 = d^r(T),$$

т. е. $\partial^r_{\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1} = d^r$. Таким образом, равенство

$$D^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1) = D^r$$

доказано. Из этого равенства следует, что второе препятствие $\delta^{r+2}_{\mathfrak{S}_1}$ для секущей поверхности $\mathfrak{S}_1$ принадлежит классу гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, и нам остается установить, что класс гомологий цикла $\delta^{r+2}_{\mathfrak{S}_1}$ определяется формулой (17).

Пусть T^{r+2} — произвольный ориентированный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B^{r+2}. Положим

$$M_1 = T^{r+2} \cup L^0, \quad M_2 = T^{r+2} \cap V_\varepsilon, \quad M_3 = T^{r+2} \cap U_\varepsilon \cap L^r.$$

На множестве $Q = T^{r+2} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$ секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ определена. Выберем произвольное допустимое отображение ξ произведения $T^{r+2} \times C$ на $p^{-1}(T^{r+2})$ и положим:

$$\xi_x(z) = \xi(x, z), \quad x \in T^{r+2}, \quad z \in C.$$

Обозначим через F непрерывное отображение множества Q в C, определенное формулой:

$$F(x) = \xi_x^{-1}(\mathfrak{S}_1(x)), \quad x \in Q. \tag{22}$$

Пусть, далее, E^{r+2} — куб размерности $r+2$, а S^{r+1} — его граница. Куб E^{r+2} и сферу S^{r+1} предположим когерентно ориентированными. Если f — непрерывное отображение сферы S^{r+1} в Q, то отображение Ff определяет некоторый элемент группы G_3. Если отображение f деформируется таким образом, что множество $f(S^{r+1})$ не пересекается в процессе деформации с

$$T^{r+2} \setminus Q = M_1 \cup M_2 \cup M_3,$$

то указанный элемент группы G_3, очевидно, не меняется. Пусть теперь f — такое гомеоморфное отображение куба E^{r+2} в T^{r+2}, что множество M_1 заключено внутри куба $f(E^{r+2})$, а множества M_2 и M_3 — вне его, причем степень отображения f куба E^{r+2} равна $+1$ в точках множества M_1. Соответствующий элемент группы G_3, определяемый отображением Ff сферы S^{r+1} в C, обозначим через $z_1(T^{r+2})$ и будем называть *индексом* * множества $M_1 \subset T^{r+2}$. Этот индекс не зависит от произвола в

---

* Замечание. Для определения индекса достаточно знать ξ_x только для $x \in f(E^{r+2})$, т. е. ξ может быть задано не на всем произведении $T^{r+2} \times C$, а только на $f(E^{r+2}) \times C$. Этим замечанием мы воспользуемся при вычислении индексов $z_2(T^{r+2})$ и $z_3(T^{r+2})$.

выборе отображения f, удовлетворяющего указанным условиям, и от выбора допустимого отображения ξ, а однозначно определяется секущей поверхностью $\mathfrak{S}_1$. Аналогично определяются индексы $z_2(T^{r+2})$ и $z_3(T^{r+2})$ множеств M_2 и M_3, над которыми, так же как и над M_1, секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ не задана. Функции z_1, z_2, z_3, определенные на множестве всех ориентированных $(r+2)$-мерных симплексов комплекса B, кососимметричны, т. е. являются цепями. Мы покажем, что

$$\mathfrak{z}^{r+2}_{\mathfrak{S}_1} = z_1 + z_2 + z_3,$$

причем цепи z_1, z_2, z_3 являются ∇-циклами, принадлежащими соответственно классам гомологий

$$\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_0), \quad R^{r+2}(D^r), \quad D^r \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}.$$

Тем самым соотношение (17) будет доказано.

Установим, прежде всего, соотношение

$$\mathfrak{z}^{r+2}_{\mathfrak{S}_1} = z_1 + z_2 + z_3.$$

Пусть E_1, E_2, E_3 — три $(r+2)$-мерных шара, расположенных в симплексе T^{r+2} и имеющих единственную общую точку, которая является граничной точкой каждого из этих шаров. Предположим еще, что множество M_i расположено внутри шара E_i, $i = 1, 2, 3$. Ориентируем шары E_i так же, как и симплекс T^{r+2}. Границу шара E_i, ориентированную когерентно с этим шаром, обозначим через S_i^{r+1}, а границу симплекса T^{r+2} (также когерентно ориентированную) — через Σ^{r+1}. Тождественное отображение e_0 сферы Σ^{r+1} гомотопно в множестве

$$T^{r+2} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

отображению e_1 этой сферы в $S_1^{r+1} \cup S_2^{r+1} \cup S_3^{r+1}$, причем степень отображения e_1 сферы Σ^{r+1} на каждой сфере S_i^{r+1}, $i = 1, 2, 3$, равна $+1$. Элемент группы G_3, равный коэффициенту цепи $\mathfrak{z}^{r+2}_{\mathfrak{S}_1}$ на симплексе T^{r+2}, определяется отображением $F = Fe_0$, а значит, и Fe_1 сферы Σ^{r+1} в C. Этот элемент равен $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, где α_i — элемент группы G_3, определяемый отображением Fe_1 сферы S_i^{r+1} в C. По определению мы имеем:

$$\alpha_i = z_i(T^{r+2}).$$

Таким образом, равенство

$$\mathfrak{z}^{r+2}_{\mathfrak{S}_1}(T^{r+2}) = z_1(T^{r+2}) + z_2(T^{r+2}) + z_3(T^{r+2})$$

доказано.

Покажем, что цепь z_1 является ∇-циклом, принадлежащим классу гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_0)$. Отображение f куба E^{r+2} в Q, нужное для определения индекса $z_1(T^{r+2})$, можно выбрать таким образом, чтобы множество $f(E^{r+2})$ было расположено вне U_ε, т. е. там, где секущая поверхность $\mathfrak{S}_1$ совпадает с $\mathfrak{S}_0$. Поэтому мы можем вычислять этот индекс $z_1(T^{r+2})$ для секущей поверхности $\mathfrak{S}_0$. Деформируя отображение f, его можно перевести в такое, которое отображает сферу S^{r+1} на Σ^{r+1} со степенью $+1$. Отсюда следует, что отображение Ff сферы S^{r+1} в C

определяет элемент группы G_3, равный значению цепи $\zeta^{r+2}_{\mathfrak{S}_0}$ на симплексе T^{r+2}. Иначе говоря,

$$z_1 = \zeta^{r+2}_{\mathfrak{S}_0}.$$

Отсюда следует, что z_1 есть ∇-цикл и что этот цикл принадлежит классу гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_0)$.

Покажем, далее, что цепь z_2 является ∇-циклом, принадлежащим классу гомологий $R^{r+2}(D^r)$. Пусть T^{r+2} — ориентированный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B и $a \in K^0$ — его центр тяжести. Для определения индекса $z_2(T^{r+1})$ мы можем взять в качестве f отображение χ_a симплекса $T^{r+2} = E^{r+2}$ в себя. Допустимое отображение ξ множества $f(E^{r+2}) \times C$ на $p^{-1}(f(E^{r+2}))$, нужное для определения индекса $z_2(T^{r+2})$, зададим формулой

$$\xi(x, z) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x(z), \quad x \in \chi_a(T^{r+2}), \quad z \in C. \tag{23}$$

Эта формула имеет смысл, так как симплекс $\chi_a(T^{r+2})$ не пересекается с L^r. Тогда отображение Ff имеет вид [см. (22), (23), (21)]:

$$Ff(y) = \widetilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_x g \chi_a^{-1}(\chi_a(y))) = g(y),$$

где

$$x = f(y), \quad y \in \dot{T}^{r+2}.$$

Итак, индекс $z_2(T^{r+2}) \in G_3$ определяется отображением g границы $\dot{T}^{r+2}$ симплекса T^{r+2} в C. Иначе говоря, цепь z_2 совпадает с препятствием z_g^{r+2} для отображения g остова B^{r+1} в C. Согласно определению отображения g, это препятствие является циклом, принадлежащим классу гомологий $R^{r+2}(D^r)$.

Перейдем к рассмотрению цепи z_3. Пусть T^{r+2} — ориентированный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B, а T^r и T^2 — такие грани этого симплекса, что барицентрические звезды, двойственные этим граням в комплексе B^{r+2} и построенные в звездных комплексах K^2 и L^r соответственно, имеют общую точку. Этим условием грани T^r и T^2 определяются однозначно. Именно, обозначим через Ξ такой порядок вершин комплекса B, при котором распределение масс, выбранное для построения остовов K^s, является возрастающим (т. е. с возрастанием номера вершины в порядке Ξ соответствующая масса также увеличивается). Тогда [см. (12)] грань T^r содержит $r+1$ первых вершин симплекса T^{r+2} (в смысле порядка Ξ), а грань T^2 — три его последние вершины. Грани T^r и T^2 имеют единственную общую вершину. Ориентируем эти грани таким образом, чтобы индекс пересечения их несущих плоскостей в несущей плоскости симплекса T^{r+2} был равен $+1$. Тогда барицентрические звезды, двойственные этим граням и расположенные соответственно в звездных комплексах K^2 и L^r, также имеют индекс пересечения $+1$. Пусть $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}$ — первое препятствие для секущей поверхности $\widetilde{\mathfrak{S}}$ в косом произведении $\widetilde{P}_{\mathfrak{S}_0}$ (см. n° 11). Обозначим через z^{r+2} произведение Кол-

могорова — Александера циклов a^r и $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}$, построенное при помощи порядка вершин Ξ. Тогда коэффициент цикла z^{r+2} на симплексе T^{r+2} равен

$$d^r(T^r)\cdot\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T^2).$$

Таким образом, для доказательства соотношения

$$z_3\in D^r\frown\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}$$

достаточно установить, что имеет место равенство $z_3 = z^{r+2}$, т. е. что индекс $z_3(T^{r+2})$ равен

$$d^r(T^r)\cdot\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T^2).$$

Приступим к вычислению индекса $z_3(T^{r+2})$. Пусть $\Phi\subset K^2$ — такой квадрат, лежащий в барицентрической звезде, двойственной грани T^r симплекса T^{r+2}, что гомеоморфное $(r+2)$-мерному кубу множество

$$E^{r+2}=\bigcup_{a\in\Phi}T^r_a=\bigcup_{a\in\Phi}\chi_a(T^r)$$

содержит M_3. Такой квадрат, очевидно, существует, если число ε достаточно мало. Через $\dot{\Phi}$ обозначим границу квадрата Φ. Положим

$$\lambda(a,x)=\chi_a(x),\qquad a\in\Phi,\quad x\in T^r,$$

т. е. представим E^{r+2} в виде прямого произведения $\Phi\times T^r$. Обозначим через Φ_0 квадрат, образованный точками вида $\lambda(a, x_0)$, где x_0 — фиксированная точка симплекса T^r. Согласно лемме 4, существует такое допустимое отображение η произведения $E^{r+2}\times C$ на $p^{-1}(E^{r+2})$, что для любой точки $y\in E^{r+2}$ имеем

$$\mathfrak{S}_0(y)=\eta(y,c)=\eta_y(c).$$

Очевидно, что $\lambda(\dot{\Phi},T^r)$ не пересекается с L^r при достаточно малом ε, так что на $\lambda(\dot{\Phi},T^r)$ определена секущая поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}$. В частности, секущая поверхность $\tilde{\mathfrak{S}}$ определена на границе $\dot{\Phi}_0$ квадрата Φ_0. Полагая

$$\gamma(y)=\eta_y^{-1}\tilde{\mathfrak{S}}_y,\qquad y\in\lambda(\dot{\Phi},T^r),$$

мы получаем непрерывное отображение множества $\lambda(\dot{\Phi},T^r)$ в Γ. Если квадрат Φ_0 ориентировать таким образом, что его индекс пересечения со звездой, двойственной грани T^2, равен $+1$, а границу $\dot{\Phi}_0$ квадрата Φ_0 ориентировать когерентно с ним, то отображение γ окружности

$$\dot{\Phi}_0\subset\lambda(\dot{\Phi},T^r)$$

в Γ определит некоторый элемент $\bar{\gamma}$ группы G_2. Мы покажем, что

$$z_3(T^{r+2})=d^r(T^r)\cdot\bar{\gamma}$$

и что

$$\bar{\gamma}=\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T^2).$$

Тем самым доказательство соотношения

$$z_3 \in D^r \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}$$

будет завершено.

Пусть φ_t — такая деформация тождественного отображения φ_0 симплекса T^r в себя, что $\varphi_1(T^r) = x_0$ и $\varphi_t(x_0) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим, далее,

$$\psi_t(\lambda(a, x)) = \lambda(a, \varphi_t(x)), \quad a \in \Phi,\ x \in T^r,$$

и

$$\delta_t(y) = \gamma\psi_t(y) \cdot (\gamma\psi_1(y))^{-1}, \quad y \in \lambda(\dot{\Phi}, T^r).$$

Тогда δ_1 есть отображение всего множества $\lambda(\dot{\Phi}, T^r)$ в точку $e \in \Gamma$; кроме того, имеем

$$\delta_t(\dot{\Phi}_0) = e \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Дополним деформацию δ_t соотношением $\delta_t(\Phi_0) = e$. Так как отображение δ_1 множества

$$\Phi_0 \cup \lambda(\dot{\Phi}, T^r)$$

в Γ можно продолжить на весь куб E^{r+2}, то и отображение δ_0 продолжаемо. Итак, существует такое отображение δ_0 куба E^{r+2} в Γ, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &\delta_0(y) = \gamma(y) \cdot (\gamma\psi_1(y))^{-1} && \text{при} \quad y \in \lambda(\dot{\Phi}, T^r), \\ &\delta_0(y) = e && \text{при} \quad y \in \Phi_0. \end{aligned}$$

Положив для любого $y \in E^{r+2}$

$$\xi_y = \eta_{ly} \cdot \delta_0(y),$$

мы получим такое допустимое отображение ξ множества $E^{r+2} \times C$ на $p^{-1}(E^{r+2})$, что на каждом симплексе $\lambda(a, T^r)$, $a \in \dot{\Phi}$, элемент $\xi_y^{-1}\, \tilde{\mathfrak{S}}_y = \varphi_a$ постоянен (т. е. зависит только от a), причем полученное таким образом отображения $a \to \varphi_a$ окружности $\dot{\Phi}$ в Γ определяет элемент $\bar{\gamma}$ группы G_2. Для определения индекса $z_3(T^{r+2})$ применим построенное допустимое отображение ξ, а за f примем тождественное отображение границы S^{r+1} куба E^{r+2} в себя. Тогда отображение $Ff = F$ сферы S^{r+1} в C, определяющее индекс $z_3(T^{r+2})$, будет задано формулой [см. (22)]

$$Ff(y) = \xi_y^{-1}(\mathfrak{S}_1(y)), \quad y \in S^{r+1},$$

или, более подробно, формулой [(см. (21)]:

$$Ff(y) = \begin{cases} \xi_y^{-1}\, \tilde{\mathfrak{S}}_y\, g\chi_a^{-1}(y) = \varphi_a\, g(x) & \text{при} \quad y = \lambda(a, x) = \chi_a(x) \in \lambda(\dot{\Phi}, T^r), \\ \xi_y^{-1}(\mathfrak{S}_1(y)) = \xi_y^{-1}(\mathfrak{S}_0(y)) = c & \text{при} \quad y \in \lambda(\dot{\Phi}, T^r). \end{cases}$$

Сравнивая эти соотношения с (14), мы легко убедимся, что имеет место равенство

$$z_3(T^{r+2}) = d^r(T^r) \cdot \bar{\gamma}.$$

Соотношение

$$\bar{\gamma} = \tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T^2)$$

следует из того, что окружность Φ_0 можно продеформировать в границу треугольника T^2, причем след деформации будет лежать в $T^{r+2} \setminus L^r$, т. е. там, где секущая поверхность $\mathfrak{S}$ задана.

Таким образом, основная теорема полностью доказана.

15°. Случай $r > 2$.

ТЕОРЕМА. *При $r > 2$ соответствие*

$$D^r \to R^{r+2}(D^r) + D^r \frown \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}, \qquad D^r \in \nabla^r(B, G_1),$$

определяет гомоморфное отображение группы $\nabla^r(B, G_1)$ в группу $\nabla^{r+2}(B, G_3)$. Таким образом, обозначая образ группы $\nabla^r(B, G_1)$ при этом гомоморфизме через H, мы найдем из формулы (18), *что все классы гомологий вторых препятствий заполняют некоторый смежный класс группы $\nabla^{r+2}(B, C_3)$ по подгруппе H.*

Эта теорема аналогична в некотором смысле приведенной в 8° теореме о первых препятствиях. Доказательство ее непосредственно вытекает из сооотношений:

$$(D_1^r + D_2^r) \frown \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}} = D_1^r \frown \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}} + D_2^r \frown \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}},$$

$$R^{r+2}(D_1^r + D_2^r) = R^{r+2}(D_1^r) + R^{r+2}(D_2^r), \qquad r > 2,$$

первое из которых очевидно, а второе вытекает из результатов работы ([11]).

Подгруппа H, существование которой установлено в предыдущей теореме, зависит a priori от выбора секущей поверхности $\mathfrak{S}$, ибо в определение этой подгруппы входит класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$. Мы покажем сейчас, что при $r > 2$ класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$, а следовательно, и подгруппа H, однозначно определяется косым произведением P.

ЛЕММА 7. *Пусть секущая поверхность $\mathfrak{S}$, заданная над остовом B^{r+1}, непрерывно деформируется; точку слоя C_x, $x \in B^{r+1}$, принадлежащую в момент времени t этой секущей поверхности, обозначим через $\mathfrak{S}_t(x)$. Существует такое непрерывное отображение ψ прямого произведения $B^1 \times I$ в группу G (где I — единичный отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$), переводящее множество $B^1 \times 0$ в точку $e \in G$, что имеет место соотношение*

$$\tilde{\mathfrak{S}}_x \psi_{x,\,t}(c) = \mathfrak{S}_t(x), \qquad x \in B^1, \tag{24}$$

где введено обозначение

$$\psi(x, t) = \psi_{x,\,t}, \qquad x \in B^1, \qquad t \in I.$$

Доказательство. Соотношение (24) можно переписать в виде:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\mathfrak{S}_t(x)) = \psi_{x,\,t}(c).$$

Положив

$$\chi(x, t) = \tilde{\mathfrak{S}}_x^{-1}(\mathfrak{S}_t(x)),$$

мы получаем непрерывное отображение χ прямого произведения $B^1 \times I$ в слой C, удовлетворяющее условию:

$$\chi(x, 0) = c.$$

Наша задача заключается в отыскании такого отображения ψ прямого произведения $B^1 \times I$ в группу G, при котором имеет место соотношение

$$\psi_{x,t}(c) = \chi(x, t), \tag{25}$$

т. е. $\overline{p}\,\psi = \chi$ (см. (9)). Существование отображения ψ, удовлетворяющего этому условию и переводящего множество $B^1 \times 0$ в точку $e \in G$, непосредственно следует из теоремы о накрывающей гомотопии [см. (3), § 11].

ЛЕММА 8. *Пусть $\mathfrak{S}_t(x)$ — деформирующаяся секущая поверхность, заданная над симплексом $T \in B^{r+1}$, и γ_t — допустимое отображение произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$. Тогда существует такое отображение φ произведения $T \times C$ в G, что, вводя обозначение $\varphi_{x,t} = \varphi(x, t)$, $x \in T$, $t \in I$, имеем*

$$\eta_x \varphi_{x,t}(c) = \mathfrak{S}_t(x). \tag{26}$$

Эта лемма доказывается так же, как и предыдущая.

ЛЕММА 9. *При деформации секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над B^{r+1}, класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ не меняется.*

Доказательство. Сохраним обозначения, введенные в формулировке леммы 7, и положим:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{x,t} = \tilde{\mathfrak{S}}_x \cdot \psi_{x,t}, \quad x \in B^1, \quad t \in I \tag{27}$$

(так что $\tilde{\mathfrak{S}}_{x,0} = \tilde{\mathfrak{S}}_x$, $x \in B^1$).

Фиксируя в выражении $\mathfrak{S}_t(x)$ переменное t, мы получаем секущую поверхность произведения P (заданную над B^{r+1}), которую обозначим через $\mathfrak{S}_t$. Тогда для каждого t будет определено косое произведение $\tilde{P}_{\mathfrak{S}_t}$ (ср. 11°). Далее, фиксируя в выражении $\tilde{\mathfrak{S}}_{x,t}$ переменное t, мы получаем секущую поверхность произведения $\tilde{P}_{\mathfrak{S}_t}$, заданную над B^1. Эту секущую поверхность мы обозначим через $\tilde{\mathfrak{S}}_t$. Первое препятствие для секущей поверхности $\tilde{\mathfrak{S}}_t$ обозначим через $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_t}$. Для доказательства леммы нам нужно установить, что циклы $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_0}$ и $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_1}$ гомологичны между собой. Мы даже покажем, что эти циклы совпадают. Для доказательства рассмотрим произвольный двумерный симплекс T комплекса B и воспользуемся для этого симплекса T отображением φ, построенным в лемме 8. Коэффициент цикла $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_t}$ на симплексе T есть элемент группы G_2, определяемый отображением

$$x \to \varphi^{-1}_{x,t} \gamma_x^{-1} \tilde{\mathfrak{S}}_{x,t}, \quad x \in \dot{T}, \tag{28}$$

окружности $\dot{T}$ в Γ. Но при изменении t от 0 до 1 отображение (28) непрерывно деформируется, так что коэффициенты циклов $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_0}$ и $\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_1}$ на симплексе T одинаковы. Таким образом,

$$\tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_0} = \tilde{y}^2_{\tilde{\mathfrak{S}}_1}.$$

ТЕОРЕМА. *При $r > 2$ класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ не зависит от выбора секущей поверхности $\mathfrak{S}$, а однозначно определяется косым произведением P.*

Доказательство. Всякие две секущие поверхности $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ косого произведения P, заданные над B^{r+1}, могут быть при $r > 2$ деформацией

приведены к совпадению на остове B^2 [см. 8°, (в)]. Так как при деформации секущей поверхности $\mathfrak{S}$ класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ не меняется, то мы можем с самого начала предполагать, что секущие поверхности $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ совпадают над B^2. Но в этом случае равенство $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}} = \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}'}$ очевидно.

16°. Случай $r = 2$. Рассмотрим вопрос о зависимости класса гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ от выбора секущей поверхности $\mathfrak{S}$ при $r = 2$.

Напомним, прежде всего, понятие граничного гомоморфизма. Пусть α — произвольный элемент группы $\pi^2(C, c)$ и f — сфероид класса α, т. е. некоторое отображение ориентированного квадрата K в C, переводящее всю границу этого квадрата в точку c. Тогда существует (в силу теоремы о накрывающей гомотопии) такое отображение φ квадрата K в G, что $f = \bar{p}\varphi$, где $\bar{p}$ — проекция, определенная формулой (9). Отображение φ переводит границу $\dot{K}$ квадрата K (ориентированную когерентно с K) в группу Γ, чем определяется некоторый элемент β группы $G_2 = \pi^1(\Gamma)$. Элемент β однозначно определяется элементом α, и можно положить $\beta = d(\alpha)$. Определенное таким образом отображение d группы $\pi^2(C)$ в $\pi^1(\Gamma)$ оказывается гомоморфным и называется *граничным гомоморфизмом*.

Пусть M и N — абелевы группы и f — гомоморфное отображение группы M в N. Пусть, далее, x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса B по области коэффициентов M. Цепь, принимающую на r-мерном ориентированном симплексе $T \in B$ значение $f(x^r(T^r))$, обозначим через fx^r. В силу очевидного соотношения

$$f\nabla x^r = \nabla f x^r,$$

гомоморфное отображение $x^r \to fx^r$ группы цепей по области коэффициентов M в группу цепей по области коэффициентов N порождает гомоморфное отображение группы $\nabla^r(B, M)$ в $\nabla^r(B, N)$, которое мы обозначим через $\hat{f}$.

ТЕОРЕМА. *При $r = 2$ имеем*

$$\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_1} = \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} - \hat{d}D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1), \tag{29}$$

где $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ — произвольные секущие поверхности произведения P, заданные над B^3.

Доказательство. Мы можем без ограничения общности считать, что секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ совпадают над остовом B^1 [см. 8°, (в) и лемму 9]. Тогда будет определена различающая $\partial^2 = \partial^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$, являющаяся ∇-циклом класса гомологий $D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$. Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — секущая поверхность произведения $\bar{P}_{\mathfrak{S}_0}$, заданная над B^1. Тогда, полагая для удобства $\tilde{\mathfrak{S}}(x) = \tilde{\mathfrak{S}}_x$, мы имеем

$$\tilde{\mathfrak{S}}_x(c) = \mathfrak{S}_0(x) = \mathfrak{S}_1(x), \quad x \in B^1.$$

Таким образом, $\tilde{\mathfrak{S}}$ является секущей поверхностью (заданной над B^1) и в произведении $\bar{P}_{\mathfrak{S}_1}$. Препятствия для секущей поверхности $\tilde{\mathfrak{S}}$, вычисленные в произведениях $\bar{P}_{\mathfrak{S}_0}$ и $\bar{P}_{\mathfrak{S}_1}$, обозначим через $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}$ и $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_1}$ соответственно. Для доказательства соотношения (29) нам достаточно установить, что имеет место равенство:

$$\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_1} = \tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0} - d(\partial^2). \tag{30}$$

Пусть T — произвольный двумерный ориентированный симплекс комплекса B. Через ξ^0 и ξ^1 обозначим такие допустимые отображения произведения $T \times C$ на $p^{-1}(T)$, что имеют место соотношения:

$$\xi^0_x(c) = \mathfrak{S}_0(x), \quad \xi^1_x(c) = \mathfrak{S}_1(x), \quad x \in T$$

(см. лемму 4). Тогда элемент

$$\varphi_x = (\xi^0_x)^{-1}\,\xi^1_x$$

группы G непрерывно зависит от $x \in T$. Примем за допустимое отображение η, применяемое при определении различающей (см. 6°) отображение ξ^0. Тогда мы будем иметь [см. (6)]:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= (\xi^0_x)^{-1}\,\mathfrak{S}_0(x) = (\xi^0_x)^{-1}\,\xi^0_x(c) = c, \qquad x \in T, \\ F_1(x) &= (\xi^0_x)^{-1}\,\mathfrak{S}_1(x) = (\xi^0_x)^{-1}\,\xi^1_x(c) = \varphi_x(c), \quad x \in T. \end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, отображение F_0 переводит весь симплекс в точку c, и потому отображение F_1 переводит границу $\dot{T}$ симплекса T в точку c. Отсюда следует, что отображение F_1 симплекса T в C определяет элемент $\partial^2(T)$ группы $\pi^2(C)$. Далее, отображение φ симплекса T в G, определенное соответствием $x \to \varphi_x$, удовлетворяет условию $F_1 = \bar{p}\varphi$ [см. (9), (31)]. Таким образом, отображение φ окружности $\dot{T}$ (ориентированной когерентно с T) в Γ определяет элемент $d(\partial^2(T))$ группы $\pi^1(\Gamma)$. Наконец, отображения

$$\begin{aligned} x &\to \psi_0(x) = (\xi^0_x)^{-1}\,\tilde{\mathfrak{S}}_x, \quad x \in \dot{T}, \\ x &\to \psi_1(x) = (\xi^1_x)^{-1}\,\tilde{\mathfrak{S}}_x, \quad x \in \dot{T}, \end{aligned}$$

определяют соответственно элементы $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T)$ и $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_1}(T)$ группы $\pi^1(\Gamma)$. Так как, очевидно,

$$\varphi_x = \psi_0(x) \cdot (\psi_1(x))^{-1},$$

то

$$d(\partial^2(T)) = \tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_0}(T) - \tilde{y}^2_{\mathfrak{S}_1}(T),$$

что и доказывает равенство (30).

17°. Связь с главным ассоциированным произведением. Обозначим через $\tilde{C}_x$ множество всех допустимых отображений слоя C на C_x и положим

$$\tilde{P} = \bigcup_{x \in B} \tilde{C}_x.$$

Множество $\tilde{P}$ является, как известно [см. (3), § 8], косым произведением с базой B, слоем G и группой G. Координатные функции $\tilde{\xi}_T$ этого произведения определяются соотношением:

$$\tilde{\xi}_{T,x}(g): \quad z \to \xi_{T,x}(gz), \quad g \in G.$$

Обозначим через i_* отображение группы $\pi^1(\Gamma)$ в $\pi^1(G)$, порожденное тождественным отображением i группы Γ в G. Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — секущая поверх-

ность произведения $\tilde{P}_{\mathfrak{S}}$, заданная над остовом B^1, и $\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}}$ — первое препятствие для этой секущей поверхности. Тогда $\mathfrak{S}$ можно также рассматривать как секущую поверхность произведения $\tilde{P}$. Обозначим через $\tilde{y}^2$ первое препятствие для секущей поверхности $\mathfrak{S}$ в косом произведении $\tilde{P}$, а через $\tilde{Y}^2 \in \nabla^2(B, \pi^1(G))$ — его класс гомологий. Если T^2 — произвольный двумерный ориентированный симплекс комплекса B, то очевидно, что имеет место соотношение

$$i_*(\tilde{y}^2_{\mathfrak{S}}(T^2)) = \tilde{y}^2(T^2). \tag{32}$$

Из точности гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi^2(C) \xrightarrow{d} \pi^1(\Gamma) \xrightarrow{i_*} \pi^1(G) \xrightarrow{j_*} \pi^1(C)$$

вытекает, что при $r > 2$ отображение i_* является изоморфизмом, так что группы $\pi^1(\Gamma)$ и $\pi^1(G)$ можно отождествить (с помощью этого изоморфизма). Таким образом, при $r > 2$ класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ совпадает (при указанном отождествлении групп $\pi^1(\Gamma)$ и $\pi^1(G)$) с характеристическим классом $\tilde{Y}^2$ для главного произведения $\tilde{P}$.

§ 3. Примеры

18°. Векторные поля на многообразии. Пусть B — риманово n-мерное многообразие, ориентированное и триангулированное. Обозначим через R^n_x эвклидово n-мерное пространство, касательное к B в точке x. Последовательность

$$v_1, \ldots, v_k, \quad k \leqslant n,$$

единичных попарно ортогональных векторов пространства R^n_x называется k-репером многообразия B в точке x. Множество всех k-реперов многообразия B в точке x обозначим через $C^{(k)}_x$ и положим:

$$P^{(k)} = \bigcup_{x \in B} C^{(k)}_x.$$

При $1 \leqslant k \leqslant n-1$ множество $P^{(k)}$ является косым произведением; мы применим к этому косому произведению результаты § 1 и 2.

Если $\alpha = (v_1, \ldots, v_k)$ — произвольный k-репер многообразия B в точке x, то положим $x = p(\alpha)$. Известно ([3]), что $P^{(k)}$ является косым произведением с базой B и проекцией p. Слоями этого произведения являются множества $C^{(k)}_x$, $x \in B$. Все эти слои, очевидно, гомеоморфны между собой и гомеоморфны штифелевскому многообразию $V_{n,k}$, точками которого являются k-реперы эвклидова пространства R^n, взятые в его начале координат. Всякое вращение (т. е. ортогональное преобразование с детерминантом $+1$) пространства R^n порождает гомеоморфное отображение многообразия $V_{n,k}$ на себя. Таким образом, группу R_n всех вращений пространства R^n можно рассматривать как группу гомеоморфизмов многообразия $V_{n,k}$. Легко видеть, что эта группа эффективна и транзитивна на $V_{n,k}$.

Эта группа $G \approx R_n$ является структурной группой произведения $P^{(k)}$.

Группы $\pi^1(V_{n,k}), \ldots, \pi^{n-k-1}(V_{n,k})$ тривиальны [см. ([2])]. Многообразие $V_{n,k}$ связно. Группа R_n преобразований многообразия $V_{n,k}$ обладает

секущей поверхностью, так как она есть группа Ли. Таким образом, все сказанное в § 1 применимо к косому произведению $P^{(k)}$ при $r = n - k$. Заметим, что секущая поверхность произведения $P^{(k)}$ представляет собой непрерывное поле k-реперов. Поэтому теорему о первых препятствиях (см. 8°) мы можем для косого произведения $P^{(k)}$ сформулировать следующим образом:

На r-мерном остове всякого n-мерного ориентированного риманова многообразия B можно построить непрерывное k-реперное поле ($r = n - k$). Всякому такому полю, заданному на B^r, соответствует $(r+1)$-мерный цикл (первое препятствие), называемый в этом случае $(r+1)$-мерным ∇-циклом Штифеля многообразия B. Все первые препятствия k-реперных полей, заданных на B^r, заполняют один класс гомологий Y^{r+1} многообразия B по области коэффициентов $\pi^r(V_{n,k})$. Этот класс гомологий называется характеристическим классом Штифеля.

Группа $G_1 = \pi^r(V_{n,k})$ является циклической [см. (2)]. Ее порядок равен двум при условии, что число r нечетно и не превосходит числа $n-2$. Во всех остальных случаях группа G является свободной циклической. Образующий элемент циклической группы G_1 описывается (во всех случаях) следующим образом. Пусть

$$c = (v_1^0, \ldots, v_{k-1}^0, v_k^0) \in V_{n,k} \tag{33}$$

— фиксированный элемент множества $V_{n,k}$. Через R^{r+1} обозначим $(r+1)$-мерное подпространство пространства R^n, ортогональное к векторам $v_1^0, \ldots, v_{k-1}^0$. Каждому единичному вектору v_k пространства R^{r+1} поставим в соответствие k-репер

$$\varphi(v_k) = (v_1^0, \ldots, v_{k-1}^0, v_k) \in V_{n,k}. \tag{34}$$

Мы получаем гомеоморфное отображение r-мерной сферы S^r (единичной сферы пространства R^{r+1}) в $V_{n,k}$. Это отображение и определяет образующий элемент группы $\pi^r(V_{n,k})$.

Перейдем к вопросу о вычислении вторых препятствий для косого произведения $P^{(k)}$, причем ограничимся случаем $n-2 \geqslant r \geqslant 2$ (в случае $r=1$ второе препятствие всегда тривиально, так как тривиальна группа $\pi^2(V_{n,n-1})$ [см. (13)]; в случае $r = n-1$ рассмотрение второго препятствия бессодержательно). Так как при $r \geqslant 2$ группа $\pi^1(V_{n,k})$ тривиальна, то слой $V_{n,k}$ косого произведения $P^{(k)}$ является гомотопически простым во всех размерностях (в частности, в размерностях r и $r+1$). Таким образом, для возможности применения результатов § 2 к косому произведению $P^{(k)}$ достаточно установить, что стабильная подгруппа Γ связна. Обозначим через R^r r-мерное подпространство пространства R^n, ортогональное ко всем векторам репера (33). Всякий элемент γ стабильной подгруппы Γ представляет собой ортогональное преобразование пространства R^n, являющееся тождественным на ортогональном дополнении R^k пространства R^r. Поэтому преобразование γ оставляет инвариантным подпространство R^r. Рассматриваемое только на R^r преобразование γ также является ортогональным. Обратно, для всякого ортогонального

преобразования γ подпространства R^r существует единственное ортогональное преобразование всего пространства R^n, совпадающее с γ на R^r и тождественное на R^k. Таким образом, стабильная подгруппа Γ изоморфна группе R_r вращений пространства R^r и потому связна. Из сказанного следует справедливость формулы (18) для косого произведения $P^{(k)}$.

Сделаем (применительно к конкретному случаю косого произведения $P^{(k)}$) некоторые замечания о членах формулы (18). Прежде всего займемся изучением класса гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$, применив результаты n° 17. Для этого рассмотрим множество $P^{(n)}$, состоящее из всех n-реперов многообразия B, ориентации которых соответствуют ориентации многообразия B. Множество $P^{(n)}$, так же как и $P^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, является косым произведением с базой B, слоем $V_{n,n}$ и группой R_n. Слой $V_{n,n}$ состоит из всех ортогональных нормированных базисов пространства R^n, имеющих одинаковую ориентацию, и потому $V_{n,n}$ можно естественным образом отождествить с группой R_n (фиксировав в R^n один определенный базис). В результате этого $P^{(n)}$ станет главным произведением, очевидно, ассоциированным с произведением $P^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Учитывая результаты n° 17, отсюда следует, что класс гомологий $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ для косого произведения $P^{(k)}$ совпадает при $r > 2$ с характеристическим классом $\tilde{Y}^2$ произведения $\tilde{P} = P^{(n)}$, т. е. с *двумерным характеристическим классом Штифеля* многообразия B. Если же $r = 2$ (т. е. при рассмотрении произведения $P^{(n-2)}$), то группа Γ гомеоморфна окружности, группа $\pi^1(\Gamma)$ является свободной циклической, а группа $\pi^1(G)$ есть (при $n > 2$) группа порядка 2. Гомоморфизм

$$i_* : \pi^1(\Gamma) \to \pi^1(G)$$

есть, как легко видеть, приведение по модулю 2, и потому $\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}}$ есть в этом случае целочисленный класс гомологий многообразия B, который после приведения по модулю 2 превращается в двумерный характеристический класс Штифеля.

Далее, для класса гомологий $R^{r+2}(D^r)$ мы имеем формулу

$$R^{r+2}(D^r) = Sq^2 D^r \tag{35}$$

[см. ([10])], где умножение элементов группы $G_1 = \pi^r(V_{n,k})$, необходимое для определения стинродовского квадрата Sq^2, задается следующим образом. Пусть α — образующий элемент группы $\pi^{r+1}(S^r)$, а φ_* — гомоморфное отображение группы $\pi^{r+1}(S^r)$ в $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, порожденное отображением φ сферы S^r в $V_{n,k}$ [см. (34)]. Положим

$$\beta = \varphi_*(\alpha). \tag{36}$$

Считая квадрат образующего элемента группы G_1 равным элементу $\beta \in \pi^{r+1}(V_{n,k})$, мы (в силу билинейности) сможем определить произведение любых двух элементов группы G_1. Именно это произведение и используется для построения стинродовского квадрата, входящего в формулу

(35). Следует отметить, что при $r > 2$ группа $\pi^{r+1}(S^r)$ имеет порядок 2, и потому в ней имеется лишь один образующий элемент. При $r = 2$ эта группа является свободной циклической, и в качестве α выбирается элемент, определяемый отображением с хопфовским числом $+1$.

Перейдем к рассмотрению члена $D^r \smile \bar{Y}^2_{\bar{c}}$ формулы (18). Именно, опишем более точно умножение элементов групп G_1 и G_2, применяемое для определения операции $\smile$. Так как обе группы G_1, G_2 являются циклическими, то достаточно установить, чему равно произведение образующих элементов этих групп. Оказывается, что произведение образующих элементов этих групп равно элементу β [см. (36)] группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$. Для доказательства этого факта образующий элемент группы G_1 зададим следующим образом. Пусть g' — отображение r-мерного шара E^r на сферу S^r, переводящее всю границу S^{r-1} шара E^r в точку $v_k^0 \in S^r$ и гомеоморфно отображающее внутренность шара E^r на $S^r \setminus v_k^0$. Тогда отображение

$$g = \varphi g' \tag{37}$$

[см. (34)] определяет образующий элемент группы $\pi^r(V_{n,k}, c)$ [см. (33)]. Пусть E^2 — плоский круг и a — угловая координата точек его окружности S^1, изменяющаяся от 0 до 2π. Пусть, далее, R^2 — какая-либо двумерная плоскость пространства R^n, ортогональная ко всем векторам $v_1^0, \ldots, v_k^0$ [см. (33)]. Обозначим через φ''_a вращение пространства R^n, поворачивающее плоскость R^2 по себе на угол a и оставляющее неподвижным ортогональное дополнение R^{n-2} плоскости R^2. Вращение φ''_a порождает вращение φ'_a сферы S^r, оставляющее неподвижной точку v_k^0, и гомеоморфное отображение φ_a многообразия $V_{n,k}$ на себя, принадлежащее группе Γ. При этом путь φ_a, $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, определяет образующий элемент группы $G_2 = \pi^1(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что имеет место соотношение:

$$\varphi_a \varphi(v) = \varphi \varphi'_a(v), \quad v \in S^r. \tag{38}$$

Мы должны доказать, что элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, определяемый отображением ψ [см. (14)] сферы $S^{r+1} = S^1 \times E^r \cup E^2 \times S^{r-1}$ в $V_{n,k}$, равен $\pm\beta$ (знак безразличен при $r > 2$, а при $r = 2$ зависит от выбора ориентаций; этот знак не влияет на справедливость формулы (18)). Мы имеем [см. (37), (38)]:

$$\psi(a, x) = \begin{cases} \varphi_a g(x) = \varphi_a \varphi g'(x) = \varphi \varphi'_a g'(x) & \text{при } a \in S^1, \quad x \in E^r, \\ c = \varphi(v_k^0) & \text{при } a \in E^2, \quad x \in S^{r-1}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\psi = \varphi \psi', \tag{39}$$

где ψ' есть отображение сферы S^{r+1} на S^r, определяемое соотношениями:

$$\psi'(a, x) = \begin{cases} \varphi'_a g'(x) & \text{при } a \in S^1, \quad x \in E^r, \\ v_k^0 & \text{при } a \in E^2, \quad x \in S^{r-1}. \end{cases} \tag{40}$$

В силу (39) и (36), нам остается доказать, что отображение ψ' определяет образующий элемент α группы $\pi^{r+1}(S^r)$.

Обозначим через d диаметр сферы S^r, проходящий через точку v_k^0, а через q — второй конец этого диаметра. Пусть, далее, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — векторы, касающиеся сферы S^r в точке q и образующие ортонормальный репер, причем векторы f_1, f_2 параллельны плоскости R^2 и, следовательно, векторы $f_3, \ldots, f_r$ ортогональны к этой плоскости. Предположим, что отображение g' является гладким и конформным внутри шара E^r, и обозначим через z прообраз точки q при этом отображении, а через $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — прообразы векторов $f_1, f_2, \ldots f_r$. Тогда отображение $(\varphi_a' g')^{-1}$ переводит q в точку z, а векторы $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ — соответственно в векторы

$$u_1 \cos a + u_2 \sin a, \quad -u_1 \sin a + u_2 \cos a, \quad u_3, \ldots, u_r. \tag{41}$$

Таким образом, полный прообраз точки q при отображении ψ' есть окружность $S^1 \times z$, а прообразы векторов $f_1, \ldots, f_r$ дают на этой окружности r векторных полей, определяемых формулой (41). Отсюда следует, что при $r = 2$ коэффициент зацепления циклов $\psi'^{-1}(z)$ и $\psi'^{-1}(w)$, где w — точка, близкая к z, равен ± 1, т. е. что отображение ψ' имеет хопфовское число ± 1 и потому определяет образующий элемент группы $\pi^3(S^2)$. При $r > 2$ из формулы (41) следует [см. ([14])], что отображение ψ' негомотопно нулю, т. е. определяет образующий элемент группы $\pi^{r+1}(S^r)$.

19°. Двумерные касательные направления на четырехмерном многообразии. Пусть B — четырехмерное ориентированное и триангулированное многообразие. Обозначим через C_x, $x \in B$, множество всех двумерных ориентированных плоскостей, касающихся многообразия B в точке x, а через P — объединение всех множеств C_x, $x \in B$. Легко показать, что P есть косое произведение с базисным пространством B. Слои C_x этого косого произведения гомеоморфны, очевидно, многообразию C всех двумерных ориентированных подпространств четырехмерного векторного пространства. Структурную группу произведения P мы рассмотрим ниже. Согласно результатам Уитнея ([15]), характеристический класс рассматриваемого косого произведения P равен нулю (для любого четырехмерного ориентируемого многообразия B) и потому возникает вопрос о вычислении вторых препятствий. Применив к произведению P результаты, изложенные в § 2, мы получим формулы, принадлежащие Хопфу ([4]).

Прежде всего изучим слой C косого произведения P. Пусть E^4 — четырехмерное векторное пространство кватернионов, E^2 — его подпространство, натянутое на векторы 1 и i, а F^2 — ортогональное дополнение пространства E^2 в E^4. Если a и b — произвольные кватернионы, по модулю равные единице, то обозначим через (a, b) вращение пространства E^4, определенное соответствием:

$$z \to azb^{-1}, \quad z \in E^4.$$

Тем же символом (a, b) будем обозначать преобразование многообразия C, соответствующее вращению (a, b). В силу очевидной формулы

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

множество M всех пар (a, b) является (неэффективной) группой преобразований многообразия C. Группа M транзитивна на C и гомеоморфна прямому произведению двух трехмерных сфер. Найдем стабильную подгруппу T группы M, соответствующую точке $c \in C$, где c есть плоскость E^2, ориентированная в соответствии с базисом $1, i$. Очевидно, что всякое вращение пространства E^4, переводящее плоскость E^2 на себя с сохранением ориентации, может быть представлено в виде произведения двух вращений, первое из которых оставляет неподвижными векторы 1 и i, а второе оставляет неподвижными векторы j и k. Легко видеть, далее, что всякое вращение пространства E^4, оставляющее неподвижными векторы 1 и i, может быть записано в виде (a', a'), где

$$a' = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Точно так же всякое вращение пространства E^4, оставляющее неподвижными векторы j и k, имеет вид $(a'', \bar{a}'')$, где

$$a'' = \cos\psi + i\sin\psi.$$

Таким образом, всякий элемент стабильной подгруппы T группы M имеет вид $(a'a'', a'\bar{a}'')$, где a' и a'' — произвольные кватернионы из E^2, по модулю равные единице. Иначе говоря, T состоит из тех и только тех пар $(a, b) \in M$, для которых векторы a и b лежат в E^2. Согласно $n^\circ 1$, многообразие C гомеоморфно пространству M/T левых смежных классов. Но M изоморфно прямому произведению $S_1^3 \times S_2^3$, где S_i^3, $i = 1, 2$, есть мультипликативная группа кватернионов, по модулю равных единице, а T изоморфно прямому произведению $\Phi_1 \times \Phi_2$, где $\Phi_i \subset S_i^3$ есть подгруппа, образованная кватернионами вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Таким образом, C гомеоморфно пространству

$$(S_1^3/\Phi_1) \times (S_2^3/\Phi_2),$$

т. е. прямому произведению двух двумерных сфер.

Группа M преобразований многообразия C неэффективна. Найдем ее ядро неэффективности [см. (9)]. Пусть χ — вращение пространства E^4, оставляющее инвариантным все его двумерные подпространства. Если бы в E^4 существовал вектор u, неколлинеарный вектору $v = \chi(u)$, то в E^4 существовала бы плоскость, содержащая u и не содержащая v, т. е. плоскость, не остающаяся инвариантной при вращении χ, чего быть не может. Таким образом, векторы u и $\chi(u)$ всегда коллинеарны, откуда легко следует, что χ есть либо тождественное отображение пространства E^4 на себя, либо его центральная симметрия. Все пары $(a, b) \in M$, соответствующие этим двум вращениям, имеют вид $(\pm 1, \pm 1)$. Итак, ядро неэффективности N группы M есть группа четвертого порядка (центр группы M), а группа $G = M/N$ есть эффективная группа преобразований многообразия C. Эта группа G и является структурной группой косого произведения P. Далее, стабильная подгруппа Γ группы G, очевидно, получается из группы T при помощи факторизации по N: $\Gamma = T/N$.

Обозначим через S_1 и S_2 двумерные сферы, в прямое произведение которых разлагается многообразие C, и положим:

$$G_1 = \pi^2(S_1), \quad G_2 = \pi^2(S_2), \quad G_1' = \pi^3(S_1), \quad G_2' = \pi^3(S_2).$$

Тогда группы

$$\pi^2(C) = G_1 + G_2 \text{ и } \pi^3(C) = G_1' + G_2'$$

являются свободными коммутативными группами с двумя образующими. Обозначим, далее, через Φ_1 и Φ_2 окружности, в произведение которых разлагается группа T, а через Φ_1' и Φ_2' — образы этих окружностей при естественном отображении группы T на группу $\Gamma = T/N$. Очевидно, что при этом естественном отображении окружность Φ_i, $i = 1, 2$, отображается на Φ_i' со степенью 2. Пусть K_i, $i = 1, 2$, — двумерная большая полусфера, опирающаяся в сфере S_i^3 на большую окружность Φ_i. При факторизации

$$S_i^3 \to S_i^3/\Phi_i = S_i$$

полусфера K_i отображается на S_i со степенью 1. Таким образом, при граничном гомоморфизме d группы

$$\pi^2(C) = G_1 + G_2$$

в группу

$$\pi^1(\Gamma) = \pi^1(\Phi_1') + \pi^1(\Phi_2')$$

образующая группы G_i, $i = 1, 2$, переходит в удвоенную образующую группы $\pi^1(\Phi_i')$. Условимся записывать свободные коммутативные группы $\pi^2(C)$, $\pi^3(C)$, $\pi^1(T)$ и $\pi^1(\Gamma)$ одинаковым образом, а именно в виде совокупности пар $[m, n]$ целых чисел. Тогда граничный гомоморфизм d группы $\pi^2(C)$ в $\pi^1(\Gamma)$ запишется соотношением:

$$d([m, n]) = [2m, 2n]. \tag{42}$$

Из результатов работ ([11]) или ([16]) непосредственно следует, что класс гомологий $R^4(D^2)$ [см. (17)] имеет вид:

$$R^4(D^2) = D^2 \smile D^2, \tag{43}$$

где умножение элементов группы $\pi^2(C)$ со значениями в $\pi^3(C)$, необходимое для определения операции $\smile$, дается формулой:

$$[m', n'][m'', n''] = [m'm'', n'n'']. \tag{44}$$

Рассмотрим, далее, умножение элементов групп $\pi^2(C)$ и $\pi^1(\Gamma)$, необходимое для определения члена $D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}$ в формуле (17). Пусть K — квадрат, и g — отображение его на S_1 со степенью 1, переводящее всю границу квадрата K в точку c. Отображение g определяет элемент $[1,0]$ группы $\pi^2(C)$. Далее, путь φ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в Γ, получающийся при факторизации $T \to \Gamma$ из пути $(\cos \pi t + i \sin \pi t, 1)$, определяет, очевидно, элемент $[1,0]$ группы $\pi^1(\Gamma)$; этот путь замкнут, так как точка $(-1, 1)$ принадлежит ядру N гомоморфизма $T \to \Gamma$. Нетрудно видеть, что при изменении t от 0 до 1 отображение φ_t поворачивает сферу S_1 на один

оборот вокруг диаметра, проходящего через точку c, а сфера S_2 остается неподвижной. Отсюда легко следует, что определенный формулой (14) элемент группы $\pi^3(C)$ равен $[\pm 1, 0]$ (ср. конец n° 18). При помощи несложного подсчета ориентаций можно убедиться, что хопфовское число отображения (14) равно в данном случае -1, т. е.

$$[1, 0]\,[1, 0] = [-1, 0].$$

Аналогично находим произведения остальных пар образующих элементов групп $\pi^2(C)$ и $\pi^1(\Gamma)$. В результате мы убедимся, что произведение любых элементов групп $\pi^2(C)$ и $\pi^1(\Gamma)$ определяется формулой:

$$[m', n']\,[m'', n''] = [-m'm'', -n'n'']. \tag{45}$$

Пусть, наконец, σ — отображение слоя C на себя, переводящее каждую его точку, т. е. каждую двумерную ориентированную плоскость, в ту же самую плоскость, но противоположно ориентированную. Легко видеть, что точки (a, b) и (aj, bj) группы M переходят при естественном гомоморфизме $M \to M/T = C$ в такие точки многообразия C, которые переходят друг в друга при инволюции σ. Но умножение на j всех кватернионов из S_i^3 с последующей факторизацией $S_i^3 \to S_i^3/\Phi_i = S_i$ дает преобразование сферы S_i на себя, переводящее каждую ее точку в диаметрально противоположную. Поэтому отображение σ порождает тождественное отображение группы $\pi^3(C)$ на себя [см. (17)], а все элементы группы $\pi^2(C)$ умножает на -1, т. е. элемент $[m, n]$ группы $\pi^2(C)$ переводит в $[-m, -n]$. Если $\mathfrak{S}$ — произвольная секущая поверхность произведения P, заданная над B^3, то, производя в каждом слое C_x преобразование σ, мы получим из $\mathfrak{S}$ новую секущую поверхность, которую обозначим через $\overline{\mathfrak{S}}$. Так как σ порождает тождественное отображение группы $\pi^3(C)$ на себя, то

$$Z^4(\mathfrak{S}) = Z^4(\overline{\mathfrak{S}}). \tag{46}$$

Аналогично, из того, что σ умножает элементы группы $\pi^2(C)$ на -1, следует формула:

$$D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}) = -D^2(\overline{\mathfrak{S}}_0, \overline{\mathfrak{S}}). \tag{47}$$

Перейдем к выводу формул Хопфа. Из (17) и (47) имеем:

$$Z^4(\mathfrak{S}) = Z^4(\mathfrak{S}_0) + D^2 \smile D^2 + D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}, \tag{48}$$

$$Z^4(\overline{\mathfrak{S}}) = Z^4(\overline{\mathfrak{S}}_0) + (-D^2) \smile (-D^2) + (-D^2) \smile \tilde{Y}^{2'}_{\overline{\mathfrak{S}}_0}, \tag{49}$$

где $D^2 = D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$ и потому $-D^2 = D^2(\overline{\mathfrak{S}}_0, \overline{\mathfrak{S}})$. Сравнивая (48) и (49), получаем, в силу (46):

$$-D^2 \smile \tilde{Y}^{2'}_{\overline{\mathfrak{S}}_0} = D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0}, \tag{50}$$

где D^2 — произвольный элемент группы $\nabla^2(B, \pi^2(C))$. Далее, согласно (29), имеем:

$$\tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} - \tilde{Y}^2_{\overline{\mathfrak{S}}_0} = \hat{d}D^2(\overline{\mathfrak{S}}_0, \mathfrak{S}_0).$$

Умножая обе части этого равенства на D^2 (в смысле $\smile$-умножения) и учитывая (50), получаем:

$$2D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = D^2 \smile \hat{d}D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0). \tag{51}$$

Но согласно (42), (44), (45) мы имеем:

$$D^2 \smile \hat{d}D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0) = -2D^2 \smile D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0).$$

Отсюда и из (51) следует, что

$$2D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = -2D^2 \smile D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0)$$

для произвольного класса гомологий D^2. Коэффициент 2 в этом равенстве может быть сокращен (ибо четырехмерных кручений многообразие B не содержит), и мы имеем окончательно:

$$D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = -D^2 \smile D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0). \tag{52}$$

Таким образом, формула (17) принимает следующий вид [см. (48), (52)]:

$$Z^4(\mathfrak{S}) = Z^4(\mathfrak{S}_0) + D^2 \smile D^2 - D^2 \smile D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0), \tag{53}$$

где $D^2 = D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$. Заметив, наконец, что

$$D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}) - D^2(\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0) = D^2(\overline{\mathfrak{S}}_0, \mathfrak{S})$$

[см. 6°, (в)], мы можем переписать формулу (53) в виде:

$$Z^4(\mathfrak{S}) = Z^4(\mathfrak{S}_0) + D^2(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}) \smile D^2(\overline{\mathfrak{S}}_0, \mathfrak{S}). \tag{54}$$

Формулы (53) и (54) принадлежат Хопфу [см. (4)].

Поступило
16.VIII.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hopf H., Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, 96 (1927), 225—250.
[2] Stiefel E., Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv., 8 (1936), 305—353.
[3] Стинрод Н., Топология косых произведений, Москва, 1953.
[4] Hopf H., Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions, Topologie algébrique, 55—59. Colloque international du centre National de la Recherche Scientifique, № 12, Paris, 1949.
[5] Hopf H., Sur une formule de la théorie des espaces fibrés, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles (1950), 117—121.
[6] Болтянский В., Векторные поля на многообразии, Доклады Ак. наук СССР, 80, № 3 (1951), 305—307.
[7] Болтянский В., Секущие поверхности косых произведений, Доклады Ак. наук СССР, 85, № 1 (1952), 17—20.
[8] Понтрягин Л. С., Характеристические циклы, Доклады Ак. наук СССР, 47 (1945), 242—245.
[9] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1954.
[10] Болтянский В., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. Ин-та Ак. наук СССР, вып. 47, 1955.

[11] Постников М., Классификация непрерывных отображений $(n+1)$-мерного комплекса в связное топологическое пространство, асферическое в размерностях, меньших n, Доклады Ак. наук СССР, 71, № 6 (1950), 1027—1028.

[12] Глазерман М., Понтрягин Л., Пересечения в многообразиях, Успехи матем. наук, 2, № 1 (1947), 57—155.

[13] Whitehead I. H. C., On the groups $\pi_r(V_{m,n})$ and sphere bundles, Proc. London Math. Soc., 48 (1944) 243—291.

[14] Понтрягин Л., Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. I, Доклады Ак. наук СССР, 19, № 3 (1938), 147—149.

[15] Whitney H., On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology, Univ. of Mich. Press, 1941.

[16] Steenrod N., Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. of Math., 48, № 2 (1947),290—320.

[17] Hopf H., Über die Abbildungen der drei-dimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen, 104 (1931), 637—665.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 137—144

Д. М. КОТЕЛЯНСКИЙ

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ С ПРЕОБЛАДАЮЩЕЙ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе выводится новая оценка снизу определителя с доминирующей главной диагональю.

Матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ с комплексными элементами имеет, по определению, преобладающую главную диагональ, если

$$|a_{ii}| > \sum_{k \neq i}^{1 \ldots n} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

За последние 15—20 лет появился ряд работ, в которых даются оценки для определителей указанных матриц. Так, в 1937 г. А. Островский([1]) доказал, что

$$|\det A| \geqslant \prod_{i=1}^{n} S_i, \quad S_i = |a_{ii}| - \sum_{\kappa \neq i} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Оценка (1) была улучшена Прайсом ([3]), давшим также оценку $\det A$ сверху. По Прайсу,

$$0 < \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^*, \tag{2}$$

где

$$\sigma_i = |a_{ii}| - \sum_{k>i} |a_{ik}|, \quad \sigma_i^* = |a_{ii}| + \sum_{k>i} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Другие оценки $\det A$ даны в работах Островского ([2]) и Бреннера ([4]).

Частным случаем матриц с преобладающей главной диагональю являются матрицы $B = \| b_{ik} \|_1^n$, для которых

$$b_{ii} > 0, \quad b_{ik} < 0, \quad \sum_{j=1} b_{ij} > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n, \ i \neq k). \tag{3}$$

Минковский ([5]), первый рассмотревший матрицы такого типа (обозначаемые нами в дальнейшем как матрицы M-типа), доказал, что их определители положительны. Оценки (2) принимают для матриц M-типа вид:

$$\prod_{i=1}^{n} \sigma_i \leqslant \det B \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^*, \ * \tag{4}$$

---

* $B\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ обозначает минор матрицы B, номера горизонталей и вертикалей которого образуют соответственно верхний и нижний ряды индексов.

где

$$\sigma_i = \sum_{k>i} b_{ik}, \quad \sigma_i^{\cdot} = b_{ii} - \sum_{k>i} b_{ik}.$$

В § 1 настоящей работы рассматриваются матрицы M-типа. При помощи леммы о положительности алгебраических дополнений элементов матриц M-типа устанавливаются оценки сверху и снизу для определителей таких матриц, уточняющие оценки (4). Далее для матрицы M-типа $B = \| b_{ik} \|_1^n$ составляются матрицы вида:

$$B^{(\nu)} = \| b_{ij}^{(\nu)} \|_{\nu+1}^n,$$

где

$$b_{ij}^{(\nu)} = B \begin{pmatrix} 1 & \dots & \nu & i \\ 1 & \dots & \nu & j \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

и доказывается, что $B^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \dots, n-2)$ также принадлежат к матрицам M-типа. Применяя полученные ранее оценки к матрицам $B^{(\nu)}$, мы приходим к новым оценкам для $\det B$ и доказываем, что точность этих оценок растет с ростом ν.

В § 2 рассматриваются матрицы с преобладающей главной диагональю и устанавливается неравенство:

$$|\det A| \geqslant \det B, \tag{5}$$

где A — матрица с преобладающей главной диагональю, B — матрица M-типа с элементами

$$b_{ii} = |a_{ii}|, \quad b_{ik} = -|a_{ik}| \quad (i \neq k).$$

Соединяя неравенство (5) с неравенствами, полученными в § 1 для определителей матриц M-типа, мы получаем оценки снизу для $|\det A|$, уточняющие оценки Прайса, причем во многих случаях, как показывают приведенные примеры, это уточнение весьма значительно.

§ 1

ЛЕММА. *Все алгебраические дополнения B_{ik} элементов матрицы M-типа $B = \| b_{ik} \|_1^n$ положительны* *.

Действительно, условия (3), будучи выполнены для B, выполняются и для любого главного минора B. Поэтому в силу теоремы Минковского все главные миноры матрицы B положительны. Несложное вычисление показывает, что при $i \neq k$

$$B_{ik} = -b_{ik} C + \sum_{\mu,\nu=1}^{n}{}' b_{\mu i} b_{\nu k} C_{\mu\nu} \tag{5'}$$

(Σ' берется по $\mu, \nu \neq i, k$), где C — главный минор $(n-2)$-го порядка, полученный вычеркиванием из B горизонталей и вертикалей с номерами

* По существу эта лемма содержится в известной теореме Фробениуса о матрицах с положительными элементами.

i, k, а $C_{\mu\nu}$ — алгебраические дополнения его элементов. Так как для определителя 2-го порядка положительность алгебраических дополнений проверяется непосредственно, то, применяя последовательно формулу (5′), мы докажем сформулированную лемму.

Отметим следующие оценки для $\det B$:

$$S_1B_{11} + S_2B_{21} + \cdots + S_kB_{k1} < \det B < \\ < b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + \cdots + b_{k1}B_{k1}, \quad (k < n). \tag{6}$$

Здесь оценка $\det B$ сверху следует из того, что $b_{jk} < 0$ $(j \neq k)$, а оценка снизу — из того, что

$$\det B = \begin{vmatrix} S_1 & b_{12} \ldots b_{1n} \\ S_2 & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_n & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

и $S_j > 0 (j = 1, \ldots, n)$ по определению матриц M-типа. В частности, беря $k = 1$, получим:

$$S_1 B \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ 2 & \ldots & n \end{pmatrix} < \det B < b_{11} B \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Применяя тот же метод оценки к $B \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, $\ldots$, $B \begin{pmatrix} n-1 & n \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, мы придем к неравенствам:

$$\prod_{i=1}^{n} \sigma_i < \det B < b_{11} \cdot b_{22} \ldots b_{nn}, \tag{7}$$

из которых левое совпадает, а правое уточняет соответствующие неравенства (4).

ТЕОРЕМА 1. *Если* $B = \| b_{ik} \|_1^n$ *— матрица* M*-типа, то к этому же типу относятся и все матрицы*

$$B^{(k)} = \| b_{ij}^{(k)} \|_{k+1}^{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

где

$$b_{ij}^{(k)} = B \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k, & i \\ 1 & \ldots & k, & j \end{pmatrix} \quad (i, j = k+1, \ldots, n).$$

Доказательство. Проверим для матрицы $B^{(k)}$ выполнение первых двух условий (3). При $i = j$, по теореме Минковского, $b_{ij}^{(k)} > 0$, при $i \neq j$ имеем:

$$b_{ij}^{(k)} = B \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & i \\ 1 & \ldots & k & j \end{pmatrix} < 0,$$

поскольку $b_{ij}^{(k)} (i \neq j)$ отличаются знаком от алгебраических дополнений элементов минора $B \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & i & j \\ 1 & \ldots & k & i & j \end{pmatrix}$, а эти дополнения положительны

в силу доказанной леммы. Чтобы проверить последнее из условий (3), составим сумму элементов строки в $B^{(k)}$:

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1k} & \Sigma' b_{1j} \\ \dots\dots\dots & \\ b_{k1} \dots b_{kk} & \Sigma' b_{kj} \\ b_{i1} \dots b_{ik} & \Sigma' b_{ij} \end{vmatrix}; \tag{8}$$

здесь Σ' берется по $j = k+1, \dots, n$.

Прибавляя к последней вертикали определителя (8) все предыдущие, получим:

$$\sum_{j=k+1}^{n} b_{ij}^{(k)} = \sum_{\mu}' S_\mu B_{\mu i},$$

где $\sum_{\mu}'$ берется по $\mu = 1, \dots, k, i$. Но S_μ и $B_{\mu i}$, как и ранее, положительны и таким образом положительна и сумма (8). Теорема доказана.

Применим к матрицам $B^{(k)}$ оценки (7), предварительно видоизменив их. Так как одинаковая перестановка горизонталей и вертикалей не нарушает условий (3), то мы можем расположить горизонтали и вертикали матрицы M-типа в порядке, обратном первоначальному, после чего оценки (7) примут форму:

$$\prod_{i=1}^{n} \sigma_i < \det B < \prod_{i=1}^{n} b_{ii}, \qquad \sigma_i = \sum_{j \leqslant i} b_{ij}. \tag{9}$$

Применив последние неравенства к $B^{(k)}$, мы получим:

$$\prod_{i=k+1}^{n} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1k} & \sigma_{1i} \\ \dots\dots\dots & \\ b_{k1} \dots b_{kk} & \sigma_{ki} \\ b_{i1} \dots b_{ik} & \sigma_{ii} \end{vmatrix} < \det B^{(k)} < \prod_{i=k+1}^{n} B \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & i \\ 1 & \dots & k & i \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_{\alpha i} = \sum_{j=k+1}^{i} b_{\alpha j} \quad (i = k+1, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n).$$

В силу тождества Сильвестра для определителей [см. ([6]), стр. 34],

$$\det B^{(k)} = \left[B \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix} \right]^{n-k-1} \cdot \det B \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\det B < \left[B \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix} \right]^{-(n-k-1)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} B \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & i \\ 1 & \dots & k & i \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\det B > \left[B \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix} \right]^{-(n-k-1)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \sigma_{1i} \\ \dots\dots\dots & & & \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & \sigma_{ki} \\ b_{i1} & \dots & b_{ik} & \sigma_{ii} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Покажем, что неравенства (11), (12) сильнее неравенств (9) и что они улучшаются с ростом k. Для этого сначала сравним (9) с (11) и (12) при $k=1$. Легко видеть, что (поскольку все $b_{ij}<0$ при $i \neq j$)

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} b_{ji} < \prod_{i=2}^{n}\begin{vmatrix} b_{11}, & \sum\limits_{j=2}^{i} b_{1j} \\ b_{i1}, & \sum\limits_{j=2}^{i} b_{ij} \end{vmatrix} \cdot b_{11}^{-(n-2)}$$

и

$$\prod_{i=2}^{n}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{1i} \\ b_{i1} & b_{ii} \end{vmatrix} \cdot b_{11}^{-(n-2)} < b_{11}\cdot b_{22}\ldots b_{nn}.$$

Таким образом применение неравенств (9) к матрице $B^{(1)}$ вместо B усиливает оценки, и неравенства (11), (12) при $k=1$ лучше неравенств (9). С другой стороны, в силу тождества Сильвестра, имеет место матричное равенство

$$cB^{(k+1)} = [B^{(k)}]^{(1)},$$

где число $c=\det B^{(k)}>0$. Поэтому с ростом k неравенства (11) и (12) усиливаются.

Пример. Пусть матрица B имеет вид:

$$B = \begin{Vmatrix} 6, & -1, & -1, & -1, & -1 \\ -2, & 9, & -2, & -1, & -1 \\ -3, & -1, & 7, & -1, & -1 \\ -4, & -2, & -2, & 10, & -1 \\ -3, & -3, & -3, & -1, & 11 \end{Vmatrix}.$$

Оценки (7) дают:

$$2\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 11 = 4950 < \det B < 6\cdot 9\cdot 7\cdot 10\cdot 11 = 41\cdot 580.$$

Составим матрицу $B^{(1)}$:

$$B^{(1)} = \begin{Vmatrix} 52, & -14, & -8, & -8 \\ -9, & 39, & -9, & -9 \\ -16, & -16, & 56, & -10 \\ -21, & -21, & -9, & 63 \end{Vmatrix}.$$

Применяя те же оценки (7) и учитывая, что, согласно (10),

$$\det B^{(1)} = 6^3\cdot \det B,$$

получим:

$$\frac{22\cdot 21\cdot 46\cdot 63}{6^3} - 6199{,}5 < \det B < \frac{52\cdot 39\cdot 56\cdot 63}{6^3} = 31941.$$

§ 2

Рассмотрим матрицу A с преобладающей главной диагональю и докажем, что модуль определителя A не меньше определителя матрицы

M-типа, возникающей при замене каждого из a_{ii} на $|a_{ii}|$, $a_{ik}\,(i \neq k)$ на $-|a_{ik}|$. Этот результат является следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если в матрице M-типа $B = \|b_{ik}\|_1^n$ заменить ее элементы на произвольные комплексные a_{ij} так, чтобы выполнялись неравенства*

$$|a_{ii}| \geqslant b_{ii}, \quad |a_{ij}| \leqslant |b_{ij}| \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n;\quad i \neq j), \tag{13}$$

то

$$|\det A| \geqslant \det B.$$

Доказательство. Для $n = 2$ теорема верна, так как

$$|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| \geqslant |a_{11}||a_{22}| - |a_{21}||a_{22}| \geqslant b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Применим для доказательства индукцию по n и пусть A и B — матрицы n-го порядка. Преобразуем определители этих матриц, приведя их к виду

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} + \lambda_1 b_{21} & \ldots & b_{2n} + \lambda_{n-1} b_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} + \lambda_1 b_{n1} & \ldots & b_{nn} + \lambda_{n-1} b_{n1} \end{vmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} + \mu_1 a_{21} & \ldots & a_{2n} + \mu_{n-1} a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} + \mu_1 a_{n1} & \ldots & a_{nn} + \mu_{n-1} a_{n1} \end{vmatrix},$$

где

$$\lambda_j = -\frac{b_{1,j+1}}{b_{11}}, \quad \mu_j = -\frac{a_{1,j+1}}{a_{11}}.$$

Таким образом,

$$\det B = b_{11} \det B_1, \quad \det A = a_{11} \det A_1,$$

причем A и A_1 — матрицы $(n-1)$-го порядка с элементами

$$b_{ij} + \lambda_{j-1} b_{i1}, \quad a_{ij} + \mu_{j-1} a_{i1} \quad (i,\ j = 2,\ \ldots,\ n)$$

соответственно.

Докажем, что B_1 есть матрица M-типа. Действительно, из определения матриц M-типа следует, что $\lambda_j > 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j = -\frac{1}{b_{11}} \sum_{k=2}^{n} b_{1k} < 1.$$

Отсюда вытекает, что все недиагональные элементы в B_1 отрицательны, а диагональные элементы положительны. Кроме того, сумма элементов любой строки в B_1

$$\sum_{j=2}^{n} (b_{ij} + \lambda_{j-1} b_{i1}) > \sum_{j=2}^{n} b_{ij} + b_{i1} = S_1$$

положительна и, таким образом, условия (3) выполнены.

При замене элементов B_1 соответствующими элементами A_1 выполняются неравенства (13), так как

$$|\mu_{k-1}| = \left|\frac{a_{1,\,k+1}}{a_{11}}\right| \leqslant \frac{|b_{1,\,k+1}|}{b_{11}} = \lambda_{k-1}$$

и, следовательно,

$$|a_{kk} + \mu_{k-1}a_{k-1}| \geqslant |a_{kk}| - |\mu_{k-1}||a_{k1}| \geqslant$$
$$\geqslant b_{kk} - \lambda_{k-1}|b_{k1}| = b_{kk} + \lambda_{k-1}b_{k1},$$

а при $i \neq j$

$$|a_{ij} + \mu_{j-1}a_{i1}| \leqslant |a_{ij}| + |\mu_{j-1}||a_{i1}| \leqslant |b_{ij}| + \lambda_{j-1}|b_{i1}| = |b_{ij} + \lambda_{j-1}b_{i1}|.$$

По допущению индукции, $|\det A_1| \geqslant \det B_1$ и, следовательно,

$$|\det A| \geqslant \det B,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если A — матрица с преобладающей главной диагональю, то, положив*

$$b_{ii} = |a_{ii}|, \quad b_{ij} = -|a_{ij}| \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n;\quad i \neq j),$$

мы получим матрицу B, которая является матрицей M-типа, и

$$|\det A| \geqslant \det B.$$

Действительно, из определения матриц с преобладающей главной диагональю следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ n),$$

т. е., что B есть матрица M-типа, а тогда неравенство $|\det A| \geqslant \det B$ есть результат доказанной теоремы.

Применяя к построенной выше матрице B оценку (12), мы получим для модуля определителя A оценку снизу:

$$|\det A| \geqslant \begin{vmatrix} |a_{11}| & \ldots & -|a_{1k}| \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -|a_{k1}| & \ldots & |a_{kk}| \end{vmatrix}^{-(n-k-1)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \begin{vmatrix} |a_{11}| & \ldots & -|a_{1k}| & \sigma_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -|a_{k1}| & \ldots & |a_{kk}| & \sigma_{ki} \\ -|a_{i1}| & \ldots & -|a_{ik}| & \sigma_{ii} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{ai} = \sum_{j=1}^{i} b_{aj},$$

точность которой, как мы видели, растет с ростом k.

Поступило
19. VII. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ostrowsky A., Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants, Bull. Sci. Math., 61 (1937), 19—32.

[2] Ostrowsky A., Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal, Proc. Amer. Math. Soc., v. 3, № 1 (1952), 26—30.

[3] Price E. B., Bounds for determinants with dominant principal diagonal, Proc. Amer. Math. Soc., v. 2 (1951), 497—502.
[4] Brenner I. L., Une borne pour un déterminant avec diagonale majorante, C. R. Acad. Sci., t. 238, N 5 (1954), 555—556.
[5] Minkowski H., Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern, Nachr. von der Königl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., H. 4 (1900), 90—93.
[6] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, ГТТИ, М.—Л., 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 145—166

А. О. ГЕЛЬФОНД

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ЭКВИВАЛЕНТЕ АНАЛИТИЧНОСТИ L-РЯДА ДИРИХЛЕ НА ПРЯМОЙ $\operatorname{Re} s = 1$

В работе элементарно выводятся оценки конечных отрезков рядов Дирихле, представляющих логарифмические производные L-рядов на прямой единице.

§ 1. Введение

В последнее время после работ А. Сельберга, доказавшего элементарно асимптотические законы распределения простых чисел в натуральном ряде и прогрессиях, возник интерес к элементарным подходам к числовым задачам. В настоящей статье мы рассмотрим некоторые простые числовые неравенства, которые соответствуют аналитичности функции $L(s, \chi)$ на прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Из этих неравенств мы получим оценки конечных отрезков рядов

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{L(s, \chi)} \quad \text{при } \operatorname{Re} s = 1.$$

Пусть χ — характер модуля m и $\Lambda(n)$ — функция Мангольта. Тогда, если или $\chi \neq \chi_0$, или $\tau \neq 0$, элементарно можно установить соотношение

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = q \ln x + O(1), \tag{A}$$

где q или равно нулю, или —1, а остаточный член при любом x ограничен постоянной, от x не зависящей. Это соотношение соответствует тому, что

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

будучи логарифмической производной аналитической функции, может или быть регулярной при $s = 1 + i\tau$, или иметь в этой точке полюс первого порядка. Поэтому элементарно доказываемое соотношение (A) можно считать арифметическим эквивалентом аналитичности $L(s, \chi)$ на прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Пользуясь этим соотношением в уточненной форме, мы докажем, что имеют место оценки:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)\Lambda(n) - q}{n^{1+i\tau}} = O\left[\ln^7 |\tau|\right], \quad \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = O\left[\ln^7 |\tau|\right],$$

$$q = \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0 \\ 0, & \chi \neq \chi_0, \end{cases} \qquad |\tau| \geqslant 0,$$

при произвольных χ и τ. Из этих оценок, в частности, следует оценка роста $L(s, \chi)$ при $s = 1 + i\tau$. Соотношение (A) при $\tau = 0$ уже было использовано Г. Шапиро ([2]) для элементарного доказательства теоремы Дирихле. Ниже мы приводим доказательство теоремы Дирихле, являющееся вариантом доказательства Г. Шапиро, и одного обобщения теоремы Дирихле, что нужно для понимания одной из основных идей наших оценок.

§ 2. Элементарные доказательства теоремы Дирихле и ее обобщения

В этих доказательствах будут использованы простейшие свойства характеров по модулю m и, в частности, неравенство

$$\left| \sum_{n}^{N} \chi(k) \right| < \frac{m}{2}, \quad \chi \neq 0, \tag{1}$$

верное для неглавного характера χ. Из неравенства (1) непосредственно следует также, что при $\chi \neq \chi_0$,

$$L(\chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k \leqslant N} \frac{\chi(k)}{k} + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{2}$$

так как

$$L(\chi) = \sum_{k \leqslant N} \frac{\chi(k)}{k} - \frac{1}{N+1} \sum_{k \leqslant N} \chi(k) + \sum_{q=N+1} \frac{\sum_{k \leqslant q} \chi(k)}{q(q+1)}.$$

Докажем теперь без рядов Дирихле, что $L(\chi)$, где χ — характер второго рода, не равно нулю. Допустим, что $L(\chi) = 0$, где χ — действительный характер. Заметим, что, в силу мультипликативности $\chi(n)$, при $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$

$$f(n) = \sum_{d/n} \chi(d) = \prod_{p/n} [1 + \chi(p) + \dots + \chi_p^{\alpha}] \geqslant 0,$$

а при $n \geqslant k^2$; другими словами, α_s четных, $f(n) \geqslant 1$. Условимся, что и в дальнейшем p всегда будет простым числом.

Далее, предполагая, что $0 < x < 1$, мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{1}^{\infty} \left[\sum_{d/n} \chi(d) \right] x^n = \sum_{1}^{\infty} f(n) x^n > \sum_{1}^{\infty} x^{n^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - 1 > \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} - 1. \tag{3}$$

С другой стороны, положив

$$S_n = \sum_{1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}, \quad T_n = \sum_{k \leqslant n} \chi(k),$$

мы будем иметь, что, в силу (2),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\frac{x^n}{1-x^n}+\sum_{1}^{\infty}\chi(n)\left[\frac{1}{1+\cdots+x^{n-1}}-\frac{1}{n}\right]\frac{x^n}{1-x}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}S_n x^n+\frac{1}{1-x}\cdot\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{1+\cdots+x^{n-1}}-\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{1+\cdots+x^n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]T_n=$$

$$=L(\chi)\frac{x}{1-x}+\sum_{1}^{\infty}O\left(\frac{1}{n}\right)x^n+O\left[\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1-x^n}-\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}-\frac{x^n}{n(1-x)}+\frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}\right|\right]=$$

$$=\frac{xL(\chi)}{1-x}+O\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)+O\left[\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{1-x^n}-\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}-\frac{x^n}{n(n+1)(1-x)}\right]\right]+$$

$$+O\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]=L(\chi)\frac{x}{1-x}+O\left(\ln\frac{1}{1-x}\right), \tag{4}$$

так как

$$\frac{x^n}{1-x^n}-\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}-\frac{x^n}{n(n+1)(1-x)}>0.$$

Сопоставляя (3) и (4), мы видим, что при x, достаточно близком к единице,

$$L(\chi)\frac{x}{1-x}>\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

откуда и следует, что $L(\chi)\neq 0$.

Это доказательство было дано нами в заметке ([3]), но его можно при желании заменить известным доказательством Е. Ландау.

Обозначая, как обычно, через $\Lambda(n)$ функцию Мангольта

$$\Lambda(n)=\ln p,\quad n=p^k,\quad \Lambda(n)=0,\quad n\neq p^k,$$

где p — простое, мы воспользуемся в дальнейшем элементарными свойствами этой функции, именно тем, что при $n>1$

$$\sum_{d/n}\mu(d)=0,\quad \sum_{d/n}\mu(d)\ln d=-\Lambda(n),\quad \sum_{d/n}\Lambda(d)=\ln n, \tag{5}$$

и неравенством

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\ln x\right|<2, \tag{6}$$

которое непосредственно выводится из тождеств:

$$\ln[x]!=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right],\quad \sum_{k\leqslant x}\Lambda(k)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=O(x).$$

Пользуясь соотношениями (5) и (6), мы выведем два простых тождества, из которых, присоединяя сюда то, что $L(\chi)\neq 0$ для действительного характера, и будет следовать теорема Дирихле. Прежде всего мы

будем иметь, что при $\chi \neq \chi_0$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{k/n}\Lambda(k)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n}\Lambda(n)\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k}=$$

$$=L(\chi)\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}+\sum\frac{\chi(n)}{n}\Lambda(n)O\left(\frac{n}{x}\right)=L(\chi)\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}+O(1), \tag{7}$$

поскольку

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n}\Lambda(n)O\left(\frac{n}{x}\right)=\frac{1}{x}O\Big[\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big]=O(1).$$

Так как, в силу неравенства (1), ряд

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}$$

сходится, то из (7) следует, что при $L(\chi)\neq 0$

$$\varphi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}=O(1),\quad \chi\neq\chi_0. \tag{8}$$

Далее, мы будем иметь, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n}\mu(n)\ln\frac{x}{n}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k}=L(\chi)\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}+O(1), \tag{9}$$

так как

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}O\left(\frac{n}{x}\right)=\frac{1}{x}O\Big(\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n}\Big)=O(1).$$

Из соотношения (9) непосредственно следует, что если $L(\chi)=0$, то

$$\varphi(x,\chi)=-\ln x+O(1). \tag{10}$$

Сопоставляя (8) и (10), мы видим, что всегда при $\chi\neq\chi_0$

$$\varphi(x,\chi)=\varepsilon(\chi)\ln x+O(1),\quad \varepsilon(\chi)=\begin{cases}0, & L(\chi)\neq 0,\\ 1, & L(\chi)=0,\end{cases} \tag{11}$$

а при $\chi\neq\chi_0$ из соотношения (6) следует, что

$$\varphi(x,\chi_0)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}+O(1)=\ln x+O(1). \tag{12}$$

Так как при действительном характере χ $L(\chi)\neq 0$, то $\varepsilon(\chi)=0$, $\chi^2=\chi_0$.

Остается показать, что если χ — характер третьего рода, то $\varepsilon(\chi)=0$. Покажем прежде всего, что $\varepsilon(\chi)$ может быть равно нулю не более чем для одного характера модуля m. Действительно, беря сумму по всем

характерам модуля m, мы будем иметь:

$$\sum_{\chi} \varphi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} \sum_{\chi} \chi(n) = \varphi(m) \sum_{\substack{n \equiv 1 \,(m) \\ n \leqslant x}} \frac{\Lambda(n)}{n} =$$

$$= \left[1 + \sum_{\chi \neq \chi_0} \varepsilon(x)\right] \ln x + O(1) > O,$$

что и доказывает наше утверждение, так как левая часть положительна и коэффициент при $\ln x$ не может быть отрицательным целым числом.

Итак, пусть $\varepsilon(\chi_1) = -1$, если χ_1 — характер третьего рода. Тогда существует такое число a, $(a, m) = 1$, что $\chi(a) \neq \pm 1$; другими словами, такое, что $\chi(a)$ — комплексное число. Беря опять сумму по всем характерам, мы будем иметь:

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \varphi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} \sum_{\chi} \chi(a'n) =$$

$$= \varphi(m) \sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \leqslant x}} \frac{\Lambda(n)}{n} = [1 - \bar{\chi}_1(a)] \ln x + O(1),$$

что невозможно при достаточно больших x, так как слева стоит действительное число, а $1 - \bar{\chi}(a)$ имеет мнимую часть, отличную от нуля. Итак, всегда

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} = O(1), \quad \chi \neq \chi_0. \tag{13}$$

Поэтому для всякого a, $(a, m) = 1$,

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} = \varphi(m) \sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \leqslant x}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1).$$

Из этого последнего соотношения мы непосредственно получаем, что

$$\sum_{\substack{p \equiv u \bmod m \\ p \leqslant x}} \frac{\ln p}{p} = \sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \leqslant x}} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(1) = \frac{1}{\varphi(m)} \ln x + O(1). \tag{14}$$

Соотношение (14), верное при любом a, $(a, m) = 1$, и доказывает теорему Дирихле о прогрессиях.

Докажем элементарно одну теорему о бесконечности простых чисел в рядах, отличающихся от прогрессий.

Пусть $\tau \neq 0$ и действительно. Положим

$$\alpha(\tau) = 1 + \frac{1}{i\tau} + \frac{1}{i\tau} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\tau} [n^{-i\tau} - (n-1)^{-i\tau}] + n^{-1-i\tau} \right\}. \tag{15}$$

Этот ряд сходится, так как

$$\frac{1}{i\tau} [n^{-i\tau} - (n-1)^{-i\tau}] + n^{-1-i\tau} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^{1+i\tau}} = \frac{i}{\tau} x^{-i\tau} + \alpha(\tau) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{17}$$

Далее, мы будем иметь, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{n^{1+i\tau}}=\ln[x]\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}}-\sum_{n\leqslant x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k\leqslant n}\frac{1}{k^{1+i\tau}}=$$

$$=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\ln x+\alpha(\tau)\ln x-\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\left[\frac{i}{\tau}n^{-i\tau}+\alpha(\tau)\right]+O(1)=$$

$$=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\ln x+O(1). \tag{18}$$

Рассмотрим простое тождество:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{n^{1+i\tau}}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\sum\limits_{k/n}\Lambda(k)}{n^{1+i\tau}}=\sum_{k\leqslant x}\frac{\Lambda(k)}{k^{1+i\tau}}\sum_{n\leqslant\frac{x}{k}}\frac{1}{n^{1+i\tau}}=$$

$$=\frac{i}{\tau}\sum\frac{\Lambda(k)}{k^{1+i\tau}}\left(\frac{x}{k}\right)^{-i\tau}+\alpha(\tau)\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+\sum_{k\leqslant x}\frac{\Lambda(k)}{k^{1+i\tau}}O\left(\frac{k}{x}\right)=$$

$$=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\ln x+\alpha(\tau)\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+O(1), \tag{19}$$

которое получается, если воспользоваться соотношениями (5), (6) и тем, что $\sum\limits_{k\leqslant x}\Lambda(k)=O(x)$.

Сопоставляя соотношения (18) и (19), мы видим, что

$$\alpha(\tau)\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(k)}{n^{1+i\tau}}=O(1). \tag{20}$$

Рассмотрим дополнительное тождество, именно:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}}\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=\ln x+\sum\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\sum_{k/n}\frac{1}{k^{1+i\tau}}=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}+$$

$$+\alpha(\tau)\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}+\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}O\left(\frac{n}{x}\right)=$$

$$=\alpha(\tau)\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}+O(1), \tag{21}$$

так как

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n}=O(1) \tag{22}$$

и

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]\ln\frac{x}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\}\ln\frac{x}{n}=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}+O(1)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)+O(1)=O(1). \tag{23}$$

Сопоставляя (20) и (21), мы видим, что

$$\varphi(\tau, x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = \varepsilon(\tau) \ln x + O(1), \tag{24}$$

где

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0, & \alpha(\tau) \neq 0, \\ -1, & \alpha(\tau) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Покажем, что при любом $\tau \neq 0$ $\varepsilon(\tau) = 0$; другими словами, что всегда $\alpha(\tau) \neq 0$. Действительно,

$$\operatorname{Re}[3\varphi(0, x) + 4\varphi(\tau, x) + \varphi(2\tau, x)] =$$

$$= 2 \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} (\cos \tau \ln n + 1)^2 = [3 + 4\varepsilon(\tau) + \varepsilon(2\tau)] \ln x + O(1), \tag{26}$$

откуда и следует, что $\varepsilon(\tau) \neq -1$, так как слева стоит неотрицательная величина. Поэтому $\varepsilon(\tau) = 0$, $\tau \neq 0$ и $\alpha(\tau) \neq 0$.

Значит, если $\tau \neq 0$, то

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = O(1), \quad \tau \neq 0, \quad \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1). \tag{27}$$

Пусть теперь a и α действительны, $a > 0$ и $P(z)$ — многочлен:

$$P(z) = \sum_{k=-S}^{S} a_k z^k, \quad a_0 = \int_0^1 P(e^{2\pi i t})\, dt.$$

На основании (27), будем иметь:

$$\sum_{n \leqslant x} P\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{2\pi i \alpha}\right] \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{k=-S}^{S} a_k a^{-2\pi i k \alpha} \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1-2\pi i \alpha k}} =$$

$$= a_0 \ln x + O(1). \tag{28}$$

Пусть $u(z)$ — периодическая действительная функция с периодом 1, $u(z+1) = u(z)$ — непрерывная, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода на $[0,1]$. Как известно, для такой функции можно найти, при любом $\varepsilon > 0$, два многочлена $P_1(z)$ и $P_2(z)$ таких, что

$$P_1(e^{2\pi i z}) \leqslant u(z) \leqslant P_2(e^{2\pi i z}), \quad \int_0^1 |P_1(e^{2\pi i z}) - P_2(e^{2\pi i z})|\, dz < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\sum_{n \leqslant x} P_1\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{2\pi i \alpha}\right] \frac{\Lambda(n)}{n} \leqslant \sum_{n \leqslant x} u\left[\alpha \ln \frac{n}{a}\right] \frac{\Lambda(n)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \leqslant x} P_2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{2\pi i \alpha}\right] \frac{\Lambda(n)}{n},$$

откуда, на основании (28), выводим:

$$\int_0^1 P_1(e^{2\pi i t})\, dt \ln x + O(1) \leqslant \sum_{n \leqslant x} u\left[\alpha \ln \frac{n}{a}\right] \frac{\Lambda(n)}{n} \leqslant \int_0^1 P_2(e^{2\pi i t})\, dt \ln x + O(1).$$

Следовательно, так как ε может быть взято сколь угодно малым, мы можем утверждать, что

$$\sum_{n\leqslant x} u\left[\alpha \ln \frac{n}{a}\right]\frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p\leqslant x} u\left(\alpha \ln \frac{p}{a}\right)\frac{\ln p}{p} + O(1) = \int_0^1 u(t)\,dt \ln x + o(\ln x). \tag{29}$$

Соотношение (29) может быть использовано для доказательства теоремы типа Дирихле для одного класса числовых рядов, ранее нами уже рассматривавшихся (4).

Пусть $m, r, q, m > 1,\ r \geqslant 0,\ q \geqslant 1$,— целые числа. Рассмотрим группу подстановок

$$L_k(x) = mx + qm + k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{30}$$

Подставим r вместо x в наши линейные формы. Мы получим m чисел первой группы. Эти m чисел подставим в наши линейные формы. Мы получим m^2 целых чисел. Этот процесс мы продолжим неограниченно и получим числовой ряд L. Все числа этого ряда, как легко видеть, будут различны, что непосредственно следует из вида любого числа N, принадлежащего к ряду L, именно:

$$N = m^s r + qm\frac{m^s-1}{m-1} + \sum_{i=0}^{s-1} k_i m^i, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

где k_i, $i = 0, 1, \ldots,$ — произвольные целые, $0 \leqslant k_i \leqslant m-1$. Поэтому N принадлежит к ряду L, если

$$m^s r + qm\frac{m^s-1}{m-1} \leqslant N \leqslant m^s(r+1) + qm\frac{m^s-1}{m-1} - 1 \tag{32}$$

при каком угодно $s \geqslant 1$.

Неравенства (32) являются необходимыми и достаточными условиями принадлежности числа N к ряду L. Более подробно свойства рядов типа L рассмотрены в нашей работе (4). Нетрудно заметить, что множество целых чисел, удовлетворяющих условиям

$$N = m^s\left(r + \frac{qm}{m-1}\right) + t, \quad 0 \leqslant t \leqslant m^s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

где t — целое число, отличается от множества чисел, определяемых неравенствами (32), лишь на множество плотности геометрической прогрессии. Но условия (33) могут быть переписаны в форме

$$\frac{\ln \dfrac{N}{r + \dfrac{qm}{m-1}}}{\ln m} = s + \frac{\ln\left[1 + \dfrac{t}{\left(r + \dfrac{qm}{m-1}\right)m^s}\right]}{\ln m}, \quad 0 \leqslant t \leqslant m^s; \tag{34}$$

другими словами, в форме

$$\left\{\frac{\ln \dfrac{N}{r + \dfrac{qm}{m-1}}}{\ln m}\right\} \leqslant \frac{1}{\ln m}\ln\left(1 + \frac{1}{r + \dfrac{qm}{m-1}}\right). \tag{35}$$

Поставим теперь вопрос о числе простых чисел в ряде L. Так как условие принадлежности числа N к L с точностью до множества чисел, образующих геометрическую прогрессию, есть условие (35), то определим функцию $u(x)$, положив

$$u(x) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\ln m} \ln\left(1 + \frac{1}{r + \frac{qm}{m-1}}\right) = 0,$$
$$u(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(x+1) = u(x).$$

Тогда условие принадлежности числа N к L с точностью до очень редкого множества будет иметь вид:

$$u\left[\frac{\ln \frac{N}{r + \frac{qm}{m-1}}}{\ln m}\right] = 1. \tag{36}$$

Воспользовавшись соотношением (29), получаем теорему:

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in L}} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\ln m} \ln\left(1 + \frac{1}{r + \frac{qm}{m-1}}\right) \ln x + o(\ln x),$$

откуда, в частности, следует бесконечность простых чисел в ряду L. Естественно, что, используя закон распределения простых чисел с хорошим остаточным членом, мы можем найти число простых чисел до x в ряду L с большой точностью. Формула (29) может быть без всяких осложнений элементарно доказана и для арифметической прогрессии. Мы будем иметь тогда соотношение

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \bmod k}} u\left[\alpha \ln \frac{n}{a}\right] \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\varphi(k)} \int_0^1 u(t)\, dt \ln x + o(\ln x), \tag{37}$$

откуда уже будет следовать и формула

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \bmod k \\ p \in L}} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\varphi(k) \ln m} \ln\left(1 + \frac{1}{r + \frac{qm}{m-1}}\right) \ln x + o(\ln x).$$

Докажем обобщение формулы (27), из которого непосредственно будет следовать и соотношение (37). Действительно, если $\chi \neq \chi_0$ и $\tau \neq 0$, то очевидно, что

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = \alpha + O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}. \tag{38}$$

Далее, будем иметь:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n) \ln n}{n^{1+i\tau}} = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^{1+i\tau}} \sum_{k \leqslant \frac{x}{n}} \frac{\chi(n)}{k^{1+i\tau}} =$$
$$= \alpha \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^{1+i\tau}} + O(1) = O(1), \tag{39}$$

в силу сходимости ряда в левой части (39).

Совершенно так же мы получаем, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}=$$
$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}}=\alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}+O(1), \tag{40}$$

в силу (38) и того, что $\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n}=O(x)$. Сопоставляя (39) и (40), мы видим, что всегда при $\tau\neq 0$ и $\chi\neq\chi_0$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}=\varepsilon(\chi,\tau)\ln x+O(1),\quad \varepsilon(\chi,\tau)=\begin{cases}0, & \alpha\neq 0,\\ -1, & \alpha=0.\end{cases} \tag{41}$$

Заметим также, что при $\tau\neq 0$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+O(1)=O(1), \tag{42}$$

в силу (27). Докажем, что всегда $\varepsilon(\chi,\tau)=0$. Мы будем иметь прежде всего, что

$$\operatorname{Re}\left[3\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n}+4\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi^2(n)\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}\right]=$$
$$=2\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n}\left[1+\operatorname{Re}\frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}\right]^2\geqslant 0, \tag{43}$$

откуда следует, что

$$[3+4\varepsilon(\chi,\tau)+\varepsilon(\chi^2,\tau)]\ln x+O(1)\geqslant 0.$$

Значит, так как $\varepsilon(\chi^2,\tau)=-1,0$, то $\varepsilon(\chi,\tau)\neq -1$; в противном случае левая часть последнего неравенства была бы отрицательной при большом x. Таким образом, всегда

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}=O(1), \tag{44}$$

если только одновременно $\chi\neq\chi_0$, $\tau\neq 0$. Отсюда уже непосредственно следует формула (37).

§ 3. Некоторые оценки и следствия из них

В этом параграфе мы получим некоторые оценки элементарными методами. Получим прежде всего простейшие оценки, необходимые в дальнейшем.

Положим, как и ранее,

$$\alpha(k)=\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{i\tau}[n^{-i\tau}-(n-1)^{-i\tau}]-n^{-1-i\tau}\right\},\quad k\geqslant 2,$$
$$\alpha=1+\frac{1}{i\tau}+\alpha(2). \tag{45}$$

Тогда мы будем иметь представление

$$\alpha(k) = (1 + i\tau) \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \int_{n}^{t} \frac{dx}{x^{2+i\tau}}\, dt, \tag{46}$$

откуда следует верное при всяком τ неравенство:

$$|\alpha(k)| < |1 + i\tau| \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \int_{t}^{n} \frac{dx}{x^2}\, dt < \frac{|1 + i\tau|}{k-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{|1 + i\tau|}{k+1}, \quad k \geqslant 3. \tag{47}$$

С другой стороны, при $|\tau| \geqslant 3$, полагая $N = 3 + [|\tau|]$, будем иметь:

$$\alpha(k) = \sum_{n=k}^{N} \left\{ \frac{1}{i\tau} [n^{-i\tau} - (n-1)^{-i\tau}] + n^{-1-i\tau} \right\} + \alpha(N+1), \tag{48}$$

откуда непосредственно следует неравенство:

$$|\alpha(k)| < 1 + \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n} + \frac{|1 + i\tau|}{N+2} < 3 + \ln|\tau|. \tag{49}$$

Отсюда выводим, что

$$|\alpha| < 5 + \ln|\tau|, \quad |\tau| \geqslant 3, \quad |\alpha| < 5 + \frac{1}{|\tau|}, \quad |\tau| \leqslant 3. \tag{50}$$

Из неравенства (46) следует также, что при $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}$

$$|\alpha| > \frac{1}{|\tau|} - 1 \geqslant 1. \tag{51}$$

В первом параграфе настоящей работы мы уже доказали, что $\alpha(\tau) \neq 0$. Нашей ближайшей задачей будет найти нижнюю грань $|\alpha|$ при больших $|\tau|$. Эту оценку достаточно получить для $\tau > 0$, так как $|\alpha(\tau)| = |\alpha(-\tau)|$.

Прежде всего мы будем иметь, что

$$\frac{i}{\tau} N^{-i\tau} \ln N = \frac{i}{\tau} \sum_{k=2}^{N} [k^{-i\tau} \ln k - (k-1)^{-i\tau} \ln(k-1)] =$$
$$= \frac{i}{\tau} \sum_{k=2}^{N} [k^{-i\tau} - (k-1)^{-i\tau}] \ln k + \frac{i}{\tau} \sum_{k=2}^{N} \left[\frac{1}{k^{1+i\tau}} + \frac{O\left(\frac{1}{k}\right)}{k^{1+i\tau}} \right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln k}{k^{1+i\tau}} - \sum_{k=2}^{N} \ln k \left\{ \frac{1}{k^{1+i\tau}} + \frac{1}{i\tau} [k^{-i\tau} - (k-1)^{-i\tau}] \right\} + O(1), \tag{52}$$

где $O(1)$ не зависит ни от τ, ни от x, вследствие (49). Но при $q = [\tau]$ имеем:

$$\left| \sum_{k=2}^{q} \ln k \left\{ \frac{1}{k^{1+i\tau}} + \frac{1}{i\tau} [k^{-i\tau} - (k-1)^{-i\tau}] \right\} \right| =$$
$$= \left| \sum_{2}^{q} \ln k \left[\frac{1}{k^{1+i\tau}} - \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{1+i\tau}} \right] \right| \leqslant 2 \sum_{2}^{q} \frac{\ln k}{k} = \ln^2 \tau + O(1), \tag{53}$$

и, далее,

$$\left|\sum_{q}^{N}\ln k\left\{\frac{1}{k^{1+i\tau}}+\frac{1}{i\tau}\left[k^{-i\tau}-(k-1)^{-i\tau}\right]\right\}\right|<(1+\tau)\sum_{q}^{\infty}\ln k\int_{k-1}^{k}\int_{t}^{k}\frac{dx\,dt}{x^2}<$$
$$<\ln\tau+O(1). \tag{54}$$

Значит, всегда

$$\left|\sum_{k=2}^{N}\ln k\left\{\frac{1}{k^{1+i\tau}}+\frac{1}{i\tau}\left[k^{-i\tau}-(k-1)^{-i\tau}\right]\right\}\right|\leqslant\ln^2\tau+O(\ln\tau). \tag{55}$$

Таким образом, окончательно будем иметь:

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln k}{k^{1+i\tau}}=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\ln x+\frac{i}{\tau}\left[[x]^{-i\tau}-x^{-i\tau}\right]\ln x+$$
$$+\sum_{2}^{N}\ln k\left\{\frac{1}{k^{1+i\tau}}+\frac{1}{i\tau}\left[k^{-i\tau}-(k-1)^{-i\tau}\right]\right\}+O(1),$$

откуда непосредственно следует, что

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln k}{k^{1+i\tau}}=\frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\ln x+T_1(x,\tau),\quad |T_1(x,\tau)|<\frac{5}{4}\ln^2\tau, \tag{56}$$

при $\tau>\tau_0$. Докажем теперь еще несколько оценок. Прежде всего имеем:

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\right|<\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}<\frac{1}{2}\ln^2x+\ln x. \tag{57}$$

Далее, при $x>e^{\ln^2\tau}$, $\tau>\tau_1$ мы получим

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\,\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right)\right|\leqslant\sum_{n\leqslant\left[\frac{x}{\tau}\right]}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}\left|\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right)\right|+$$
$$+\sum_{\left[\frac{x}{\tau}\right]<n\leqslant x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}\left|\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right)\right|<\frac{\tau}{x}\sum_{n\leqslant\frac{x}{\tau}}\ln\frac{x}{n}+$$
$$+(3+\ln\tau)\sum_{\frac{x}{\tau}<n\leqslant x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}<2\ln\tau+\frac{1}{2}(3+\ln\tau)\ln^2\tau<\frac{1}{2}\ln^3\tau+2\ln^2\tau, \tag{58}$$

вследствие оценок (47) и (49). Наконец, мы непосредственно находим, что

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right)\right|<\sum_{n<\frac{x}{\tau}}\frac{\Lambda(n)}{n}\frac{1+\tau}{\left[\frac{x}{n}\right]}+$$
$$+(3+\ln\tau)\sum_{\frac{x}{\tau}<n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}<\frac{5}{4}\ln^2\tau,\quad \tau>\tau_2, \tag{59}$$

вследствие оценок (47), (49) и соотношения (6). Из соотношений (45)

и (48) имеем:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}} = \frac{ix^{-i\tau}}{\tau} + \alpha + \frac{i}{\tau}\left[[x]^{-i\tau} - x^{-i\tau}\right] - \alpha(1+[x]) =$$
$$= \frac{ix^{-i\tau}}{i\tau} + \alpha + O\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha(1+[x]), \quad x \geqslant 1, \tag{60}$$

где $O\left(\frac{1}{x}\right)$ не зависит ни от x, ни от τ. Но заметим, что

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\,O\left(\frac{n}{x}\right)\right| < \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n} = O(1),$$
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}O\left(\frac{n}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = O(1). \tag{61}$$

Поэтому из тождества (21) следует, что

$$\ln x + \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}k^{-1-i\tau} =$$
$$= \frac{i}{\tau}x^{-i\tau}\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n} + \alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n} +$$
$$+ \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\cdot O\left(\frac{n}{x}\right) - \sum\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\,\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right).$$

Отсюда, принимая во внимание оценки (23), (58) и (61), мы получим:

$$\ln x + \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = \alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n} + T_2(\tau, x),$$
$$|T_2(\tau, x)| < \frac{2}{3}\ln^3\tau, \quad \tau > \tau_3, \quad x > e^{\ln^2\tau}. \tag{62}$$

Совершенно так же из тождества

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{n^{1+i\tau}} = \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{1}{k^{1+i\tau}} = \frac{ix^{-i\tau}}{\tau}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n} +$$
$$+ \alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} + \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}O\left(\frac{n}{x}\right) - \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}\alpha\left(1+\left[\frac{x}{n}\right]\right), \tag{63}$$

вследствие формул (56), (6), (59) и (61), мы будем иметь, что при $\tau > \tau_4$, $x > e^{\ln^2\tau}$

$$\alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = T_3(\tau, x), \quad |T_3(\tau, x)| < 3\ln^2\tau. \tag{64}$$

Перейдем непосредственно к задаче нахождения нижней границы $|\alpha| = |\alpha(\tau)|$.

Пусть $\ln x = 16\ln^3\tau$, $\tau > \tau_4$. Тогда обязательно выполняется одно

из двух неравенств:

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}<\frac{1}{2}\ln x,\quad \operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}\geqslant\frac{1}{2}\ln x. \tag{65}$$

Допустим, что выполняется первое неравенство. Тогда, в силу соотношения (26), мы будем иметь:

$$3\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}+\frac{1}{2}\ln x+4\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}>3\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}+4\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}\geqslant 0, \tag{66}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}>-\frac{7}{8}\ln x-2. \tag{67}$$

Из соотношения (62) мы тогда непосредственно получим неравенство:

$$|\alpha|\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\right|>\operatorname{Re}\left[\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}-T_2(\tau,x)\right]>$$
$$>\ln x-\frac{7}{8}\ln x-\frac{1}{24}\ln x-2=\frac{1}{12}\ln x-2,$$

откуда, воспользовавшись неравенством (57), мы и находим, что

$$|\alpha|>\frac{1}{6}\,\frac{\ln x-24}{\ln^2 x+2\ln x}=\frac{1}{6}\,\frac{8\ln^3\tau-12}{2^7\ln^6\tau+2^4\ln^3\tau}>\frac{1}{100\ln^3\tau}. \tag{68}$$

Предположим, что выполняется второе из неравенств (65). Тогда из соотношения (62), с заменой в нем τ на 2τ, мы будем иметь:

$$|\alpha(2\tau)|\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+2i\tau}}\ln\frac{x}{n}\right|>\operatorname{Re}\left[\ln x+\frac{1}{2}\ln x-|T_2(2\tau,x)|\right]>$$
$$>\frac{3}{2}\ln x-\frac{2}{3}\ln^3 2\tau>\ln x, \tag{69}$$

откуда, в силу неравенства (57), получаем:

$$|\alpha(2\tau)|>2\,\frac{1}{\ln x+2}>\frac{1}{10}\ln^{-3}\tau. \tag{70}$$

Из этого неравенства и неравенства (64) следует тогда, что

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}\right|<30\ln^5\tau,\quad \tau>\tau_6, \tag{71}$$

причем это неравенство уже верно для всех $x>e^{16\ln^3\tau}$.

Итак, мы доказали, что при выполнении второго из неравенств (65) неравенство (71) имеет место при любом $x>e^{16\ln^3\tau}$, $\tau>\tau_6$. Поэтому, полагая $\ln x=60\ln^5\tau$, мы получим, в силу неравенств (26) и (71), что

$$4\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}>-3\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}-30\ln^5\tau>$$
$$>-3\ln x-\frac{1}{2}\ln x-6, \tag{72}$$

откуда следует неравенство:

$$\operatorname{Re} \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} > -\frac{7}{8} \ln x - 2.$$

Но это неравенство в соединении с неравенством (62) дает нам, что

$$|\alpha| \left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \ln \frac{x}{n} \right| > \frac{1}{8} \ln x - \frac{2}{3} \ln^3 \tau - 2 > \\ > \frac{1}{8} \ln x - \frac{1}{10} \ln \frac{3}{5} x - 2,$$

или что при $\tau > \tau_6$

$$|\alpha| > \frac{1}{4} \frac{\ln x - \frac{4}{5} \ln \frac{3}{5} x - 16}{\ln^2 x + 2 \ln x} > \frac{1}{5 \ln x} = \frac{1}{300} \ln^{-5} \tau. \tag{73}$$

Итак, всегда верно или неравенство (68), или (73). Поэтому, так как правая часть (73) меньше правой части (68), мы доказали, что при $\tau > \tau_7$ выполняется неравенство (73). Но тогда, в силу неравенств (73) и (64), мы получаем, что для любого x, $x > 1$, в силу того, что (64) верно при $x > \ln^2 \tau$,

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} \right| < 900 \ln^7 \tau, \quad \tau > \tau_7. \tag{74}$$

Для промежутка $\frac{1}{4} \leqslant \tau \leqslant \tau_7$, где тоже $\alpha(\tau) \neq 0$, очевидно, будет иметь место неравенство

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} \right| < C_0, \tag{75}$$

где C_0 не зависит ни от x, ни от τ. Это неравенство есть, например, простое следствие тождества (63) и непрерывности $\alpha(\tau)$ по τ. Непрерывность $\alpha(\tau)$ по τ может быть получена из соотношения

$$\alpha = -\frac{N^{-i\tau}}{i\tau} + \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^{1+i\tau}} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \frac{1}{4} \leqslant \tau \leqslant \tau_7,$$

выведенного нами выше. Действительно,

$$|\alpha(\tau) - \alpha(\tau_1)| < O\left[|\tau - \tau_1| \ln N\right] + |\tau - \tau_1| O\left(\sum_{n \leqslant N} \frac{\ln n}{n}\right) + \\ + O\left(\frac{1}{N}\right) < O\left(|\tau - \tau_1| \ln^2 N + \frac{1}{N}\right) = O\left(\sqrt{|\tau - \tau_1|}\right)$$

при $N = \left[\frac{1}{|\tau - \tau_1|}\right]$. Неравенство (75), конечно, легко доказать и без использования непрерывности $\alpha(\tau)$ по τ.

Перейдем к оценкам, относящимся к арифметическим прогрессиям. Пусть $\chi(n)$ — любой неглавный характер фиксированного модуля m. Замечая, что при неглавном характере

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = \alpha + O\left(\frac{\tau}{x}\right) = \alpha + O\left[\ln(|\tau| + 2)\right], \tag{76}$$

где $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}$, так как

$$\sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = \frac{-\sum_{n<x} \chi(n)}{([x]+1)^{1+i\tau}} + \sum_{k>x} \left[\sum_{n\leqslant k} \chi(n) \right] (1+i\tau) \int_{x}^{k+1} \frac{dt}{t^{2+i\tau}} = O\left(\frac{\tau}{x}\right)$$

и

$$\sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = \sum_{x<n\leqslant [|\tau|]} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} + \sum_{n>|\tau|} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = O(\ln(|\tau|+2))$$

и, кроме того, что

$$\alpha = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = \sum_{n\leqslant|\tau|} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} + \sum_{n>|\tau|} \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = O(\ln(|\tau|+2)) \tag{77}$$

и

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)\ln n}{n^{1+i\tau}} = \sum_{n\leqslant|\tau|} \frac{\chi(n)\ln n}{n^{1+i\tau}} + \sum_{|\tau|<n\leqslant x} \frac{\chi(n)\ln n}{n^{1+i\tau}} =$$
$$= O(\ln^2(|\tau|+2)) + O\left(\frac{\tau\ln|\tau|}{\tau}\right) = O(\ln^2(|\tau|+2)), \tag{78}$$

мы из соотношения (39) найдем оценку:

$$\alpha \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+i\tau}} - \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+i\tau}} \sum_{k>\frac{x}{n}} \frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}} = O(\ln^2(|\tau|+2)). \tag{79}$$

Далее, мы получаем, что, вследствие (76),

$$\left| \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+i\tau}} \sum_{k>\frac{x}{n}} \frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}} \right| < O\left[\frac{|\tau|}{x} \sum_{n\leqslant\frac{x}{|\tau|}} \Lambda(n)\right] +$$
$$+ O\left[\ln(|\tau|+2) \sum_{\frac{x}{|\tau|}<n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n}\right] = O[\ln^2(|\tau|+2)].$$

Поэтому мы имеем оценку:

$$\alpha \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+i\tau}} = O[\ln^2(|\tau|+2)]. \tag{80}$$

Совершенно так же из тождества (40) мы будем иметь:

$$\ln x + \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = \alpha \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \ln\frac{x}{n} -$$
$$- \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \ln\frac{x}{n} \sum_{k>\frac{x}{n}} \frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}} = \alpha \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \ln\frac{x}{n} +$$
$$+ O[\ln^3(|\tau|+2)], \tag{81}$$

так как

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\ln\frac{x}{n}\sum_{k>\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}}\right|<O\left[\frac{|\tau|}{x}\sum_{n<\frac{x}{|\tau|}}\ln\frac{x}{n}\right]+$$

$$+O\left[\ln(|\tau|+2)\sum_{\frac{x}{|\tau|}<n\leqslant x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}\right]=O[\ln^3(|\tau|+2)].$$

Теперь будем только предполагать, что $\tau \neq 0$, так как отличие от нуля числа α при $\tau = 0$ было доказано выше.

Из употреблявшегося ранее неравенства Адамара мы получим:

$$\operatorname{Re}\left[3\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+4\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}+\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi^2(n)\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}\right]\geqslant 0. \tag{82}$$

Возможны два случая: или

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi^2(n)\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}\leqslant\frac{1}{2}\ln x,$$

или

$$\operatorname{Re}\sum\frac{\chi^2(n)\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}>\frac{1}{2}\ln x.$$

В первом случае мы будем иметь, что

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}>-\frac{7}{8}\ln x+O(1).$$

Воспользовавшись тогда соотношением (81), мы получим неравенство

$$\frac{2}{3}|\alpha|\ln^2 x>\frac{1}{8}\ln x+O[\ln^3(|\tau|+2)],$$

откуда, полагая

$$\ln x = C_0\ln^3(|\tau|+2),$$

где C_0 — достаточно большая, положительная, не зависящая от τ постоянная, выводим неравенство

$$|\alpha(\tau)|>\lambda_0\ln^{-3}(|\tau|+2),\quad \lambda_0>0, \tag{83}$$

где λ_0 от τ не зависит.

Во втором случае из соотношения (81), если $\chi^2(n)\neq\chi_0(n)$, или из соотношения (62), верного при любых $\tau\neq 0$ и χ, при $\chi^2(n)=\chi_0(n)$ и замене τ на 2τ и χ на χ^2 мы будем иметь неравенство

$$\frac{2}{3}|\alpha(2\tau)|\ln^2 x>\frac{3}{2}\ln x+O[\ln^3(|\tau|+2)],$$

или, положив $\ln x = C_1\ln^3(|\tau|+2)$, неравенство

$$|\alpha(2\tau)|>\lambda_1\ln^{-3}(|\tau|+2),\quad \lambda_1>0, \tag{84}$$

где λ_1 от τ не зависит. Из этого неравенства, в силу соотношения (80) или (64), соответственно при $\chi^2\neq\chi_0$ или $\chi^2=\chi_0$ с заменой опять χ на χ^2 и τ на 2τ получаем:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi^2_{(n)}\Lambda(n)}{n^{1+2i\tau}}<O[\ln^5(|\tau|+2)].$$

Но тогда из неравенства (82) следует, что

$$\mathrm{R}\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}}>-\frac{3}{4}\ln x+O\left[\ln^5(|\tau|+2)\right].$$

А из этого неравенства, вследствие (81), находим:

$$\frac{2}{3}|\alpha(\tau)|\ln^2 x>\frac{1}{4}\ln x+O\left[\ln^5(|\tau|+2)\right].$$

Полагая в этом неравенстве

$$\ln x=C_2\ln^5(|\tau|+2),$$

где C_2 — достаточно большая, не зависящая от τ постоянная, мы окончательно получаем неравенство

$$|\alpha(\tau)|>\lambda_2\ln^{-5}(|\tau|+2),\quad \lambda_2>0, \tag{85}$$

где λ_2 от τ не зависит.

Итак, всегда имеет место или неравенство (83), или (85). Значит, (85) верно всегда. Из неравенства (80) теперь уже следует, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+i\tau}}=O\left[\ln^7(|\tau|+2)\right]. \tag{86}$$

Это неравенство верно при любом χ и любом τ. В эту оценку не входит, как уже говорилось, модуль m.

Заметим также, что при $\chi\neq\chi_0$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}}\chi(n)=O\left[\ln^7(|\tau|+2)\right], \tag{87}$$

в силу (76). Кроме того, из тождества

$$1=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}}=$$

$$=\alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}-\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\sum_{k>\frac{x}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{1+i\tau}}, \tag{88}$$

в силу (76), мы непосредственно получаем неравенство:

$$|\alpha|\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}\right|<O\left[\ln^2(|\tau|+2)\right],$$

или, вследствие неравенства (85), оценку:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}}=O\left[\ln^7(|\tau|+2)\right]. \tag{89}$$

верную при любом τ и $\chi\neq\chi_0$.

Вернемся к случаю $\chi=\chi_0$. В этом случае при $\tau\geqslant\frac{1}{2}$ мы получили оценку (74). Она, конечно, сохраняется с другой постоянной и для случая χ_0 при фиксированном модуле m. Эта оценка запишется, очевидно в форме

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}}=O\left[\ln^7(|\tau|+2)\right],\quad |\tau|>\frac{1}{2}, \tag{90}$$

в силу оценки

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}} = O\left[\ln\left(|\tau|+2\right)\right].$$

В случае $\tau < \frac{1}{2}$ имеет место оценка (51). Полагая опять

$$\alpha = 1 + \frac{1}{i\tau} + \sum_{2}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^{1+i\tau}} + \frac{1}{i\tau}\left[n^{-i\tau} - (n-1)^{-i\tau}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}} + \frac{x^{-i\tau}}{i\tau} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad |\tau| < \frac{1}{2},$$

вследствие (47) мы будем иметь, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n - \nu(n) + 2C}{n^{1+i\tau}} = 2C\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}} + \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+i\tau}}\sum_{d/n}\left[\Lambda(d) - 1\right] =$$

$$= 2C\left(\alpha - \frac{x^{-i\tau}}{i\tau}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}}\left[\alpha - \frac{1}{i\tau}\left(\frac{x}{n}\right)^{-i\tau} + O\left(\frac{n}{x}\right)\right] =$$

$$= 2C\left(\alpha - \frac{x^{-i\tau}}{i\tau}\right) + \alpha\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}} - \frac{x^{-i\tau}}{i\tau}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n} + O(1), \qquad (91)$$

где $\nu(n)$ — число делителей n, C — постоянная Эйлера. Далее, так как по формуле Дирихле, доказываемой элементарно,

$$\sum_{n\leqslant x}\left[\ln n - \nu(n) + 2C\right] = O\left(\sqrt{x}\right), \quad \sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n - \nu(n) + 2C}{n^{1+i\tau}} = O(1),$$

и, кроме того,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n} = O(1), \quad \frac{1}{i\tau\alpha} = O(1), \quad |\tau| \leqslant \frac{1}{2},$$

вследствие (47) и (6), то мы непосредственно получим:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}} = O(1), \quad |\tau| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (92)$$

Отсюда, очевидно, следует, что если χ_0 — главный характер фиксированного модуля m, то

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)-1}{n^{1+i\tau}} = O(1), \quad |\tau| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (93)$$

Сопоставляя эту оценку с формулами (90) и (87), мы окончательно найдем, что при фиксированном m, в частности, при $m = 1$, справедлива оценка:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\Lambda(n) - q}{n^{1+i\tau}} = O\left[\ln^7\left(|\tau|+2\right)\right], \quad q = \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0, \\ 0, & \chi \neq \chi_0, \end{cases} \qquad (94)$$

при произвольных τ и χ.

Пусть теперь $\tau \neq 0$. Тогда из тождества

$$1 = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^{1+i\tau}} \sum_{d/n} \mu(d) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \sum_{k < \frac{x}{n}} \frac{1}{k^{1+i\tau}} =$$

$$= \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} \left[\alpha - \frac{1}{i\tau} \left(\frac{x}{n} \right)^{-i\tau} + O\left\{ \min\left[\frac{|\tau| n}{x}, \ln(|\tau| + 2) \right] \right\} \right],$$

мы, на основании (92), при $|\tau| < \frac{1}{2}$ будем иметь оценку:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = O(1), \quad 0 \leqslant |\tau| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{95}$$

Из этого же тождества при $|\tau| > \frac{1}{2}$, вследствие оценки

$$\sum \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} O\left\{ \min\left[\frac{|\tau| n}{x}, \ln(|\tau| + 2) \right] \right\} = O[\ln^2(|\tau| + 2)],$$

соотношения

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1),$$

неравенства (73) и того обстоятельства, что в промежутке $\frac{1}{2} < |\tau| \leqslant \tau_{10}$

$$|\alpha(\tau)| > \lambda, \quad \lambda > 0,$$

мы будем иметь оценку:

$$\sum \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = O[\ln^7(|\tau| + 2)], \quad |\tau| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{96}$$

Значит, в силу (95), неравенство (96) будет иметь место всегда при любом τ.

Далее, так как

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_0(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = \sum_{d/m} \mu(d) \sum_{n \leqslant \frac{x}{d}} \frac{\mu(n)}{n^{1+i\tau}},$$

где χ_0 — главный характер фиксированного модуля m, то, в силу (96),

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_0(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = O[\ln^7(|\tau| + 2)].$$

Сопоставляя это соотношение с соотношением (89), мы окончательно получаем оценку:

$$\sum_{n \leqslant n} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^{1+i\tau}} = O[\ln^7(|\tau| + 2)], \tag{97}$$

верную при любом $m \geqslant 1$, χ по модулю m (если $m = 1$, то $\chi(m) = 1$ для $n \geqslant 1$) и любом τ.

Оценки (94) и (97) могут быть использованы для доказательства предельных законов для простых чисел в натуральном ряде и в арифметических прогрессиях.

§ 4. Некоторые применения ранее полученных оценок

Оценка (14) в соединении с идеями А. Сельберга может быть непосредственно использована для элементарного доказательства асимптотического закона распределения простых в прогрессиях.

Оценка (94) позволяет дать оценку $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$, $s = 1+i\tau$, при больших τ.

Действительно, пусть $s = \sigma + i\tau$, $2 > \sigma > 1$, $|\tau| = 0$, а χ — любой характер модуля m. Положим

$$S_n = \sum_{k \leqslant n} \frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k^{1+i\tau}}. \tag{98}$$

Мы будем тогда иметь, что

$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| = \left|\sum_1^\infty (S_n - S_{n-1})\frac{1}{n^{\sigma-1}}\right| = \sum_1^\infty S_n\left(\frac{1}{n^{\sigma-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\ln^7(|\tau|+2), \quad |\tau| \geqslant a > 0, \quad c = c(a),$$

где c от σ, при $\sigma > 1$, не зависит. Значит, и при любом $\sigma \geqslant 1$

$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| < c\ln^7(|\tau|+2), \quad \tau \geqslant a > 0. \tag{99}$$

Из этой оценки уже непосредственно, при помощи контурного интегрирования, следует асимптотический закон для прогрессий.

Совершенно так же из оценки (97) следует неравенство

$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right| < c_1\ln^7(|\tau|+2), \quad |\tau| \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant 1, \tag{100}$$

из которого вытекает сходимость ряда $\sum_1^\infty \frac{\chi(n)\mu(n)}{n}$.

Возможны и другие варианты доказательств асимптотического закона при помощи полученных оценок.

Более того, этим путем можно получить и доказательство асимптотического закона с остаточным членом. Пусть

$$1 - \frac{\theta}{\ln^9|\tau|} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad \theta > 0, \quad |\tau| > 2, \tag{101}$$

где θ — некоторая постоянная, которую мы выберем ниже. Пусть также $s = \sigma + i\tau$, где σ удовлетворяет неравенству (101) при заданном θ. Тогда, если χ — неглавный характер, то

$$\left|\sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^{1+i\tau}}\right| < \sum_{n \leqslant |\tau^2|} \frac{1}{n}(n^{1-\sigma} - 1) +$$

$$+ 2|1+i\tau| \sum_{n > |\tau|^2} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} < \frac{\theta C_2 \ln^2|\tau|}{\ln^9|\tau|} + \frac{1}{\sqrt{|\tau|}},$$

где C_2 — постоянная, от τ не зависящая, и $|\tau| > \tau_0$. Отсюда, в силу неравенства (100) следует, что при $|\tau| > \tau_1$ и $\theta < \frac{1}{2C_1C_2}$ верно неравенство

$$\left|\sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}\right| > \frac{1}{3}\frac{1}{C_1\ln^7|\tau|}, \quad |\tau| > \tau_1, \tag{102}$$

где σ удовлетворяет неравенствам (101). Совершенно так же доказывается неравенство (102) для $\chi = \chi_0$. Отсюда следует, что $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области (101) при достаточно малом θ. Значит, в этой области

$$\left|\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right| < C_3 \ln^9 |\tau|, \quad |\tau| > \tau'. \tag{103}$$

Поэтому, пользуясь обычным интегральным представлением для

$$\psi_1(x, m, l) = \int_1^x \psi(t, m, l)\, dt,$$

где $\psi(x, m, l)$ — функция Чебышева, мы получаем оценку

$$\psi(x, m, l) - \frac{1}{\varphi(m)} x = O\left[xe^{-\theta_0 (\ln x)^{\frac{1}{9}}}\right],$$

где $\theta_0 > 0$ — постоянная. Этот остаточный член может быть и улучшен вышеизложенным элементарным методом. С нашей точки зрения было бы интересно довести оценку этим методом до обычной оценки Адамара — Валле-Пуссена.

Поступило
17. XI. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Selberg A., An elementary proof of the prime number theorem, Ann. Math., 50 (1949), 305—313.

[2] Shapiro H., On primes in arithmetic progressions. II, Ann. Math., 52 (1950), 231—243.

[3] Гельфонд А., Об одном элементарном подходе к некоторым задачам из области распределения простых чисел, Вестник МГУ, № 2 (1953), 21—26.

[4] Гельфонд А. О., О разбиении натурального ряда на классы группой линейных подстановок, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 297—306.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 167—178

П. И. КУЗНЕЦОВ и Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕК

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Для исследования случайных систем точек применен аппарат «функций корреляции», последовательно учитывающих многократные корреляции между случайными точками. Выведен ряд соотношений, касающихся условных распределений, характеристической функции случайного числа точек и производящего функционала.

Во многих случаях приходится иметь дело с совокупностью точек, положение которых в определенном пространстве является случайным. Подобные точки мы будем называть *случайными точками*. В качестве таковых могут выступать моменты совершения каких-либо случайных событий, точки пересечения случайной функции с некоторой кривой, центры тяжести частиц в статистической физике и т. п.

В частном случае, когда отсутствуют всякие корреляции между выпадением случайных точек в различных местах, точки распределены по закону Пуассона. В общем же случае выпадения точек являются коррелированными, и общеизвестные формулы, связанные с законом Пуассона, являются несправедливыми.

В настоящей работе мы займемся некоторыми вопросами теории одинаковых коррелированных случайных точек.

Одинаковые случайные точки в пространстве S с координатой x (под x можно понимать совокупность координат $x^1, \ldots, x^r$, тогда все приводимые ниже рассуждения и формулы справедливы с соответствующими изменениями: $dx = dx^1 \ldots dx^r$, $\Delta x = \Delta x^1 \ldots \Delta x^r$ и т. п.) описываются статистически полно функциями распределения:

$$f_1(x),\ f_2(x_1, x_2), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots \quad (x_1, x_2, \ldots \in S). \tag{1}$$

По определению, функция распределения $f_s(x_1, \ldots, x_s)$ характеризует вероятность

$$\begin{gathered} d\mathcal{P} = f_s(x_1, \ldots, x_s)\,\Delta_1 \ldots \Delta_s\,(1 + O(\Delta)) \\ (\Delta = \max(\Delta_1, \ldots, \Delta_s), \quad s = 1, 2 \ldots) \end{gathered} \tag{2}$$

одновременного выпадения хотя бы одной точки на каждый из интервалов $(x_1, x_1 + \Delta_1), \ldots, (x_s, x_s + \Delta_s)$.

Функции распределения (1), введенные указанным образом, характеризуют s-кратные корреляции между выпадениями точек на бесконечно малых отрезках вблизи точек, соответствующих значению аргументов, безотносительно к статистическим свойствам случайных точек в других

частях пространства. Этим введенные выше функции выгодно отличаются от функций распределения $F_s(x_1, \ldots, x_s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, рассматриваемых в (1). При введении $F_s(x_1, \ldots, x_s)$ используются такие понятия, как полное число точек N и объем V доступной для точек области. Функции F_s связаны с (1) соотношениями:

$$F_s(x_1, \ldots, x_s) = \frac{V^s}{N(N-1)\ldots(N-s+1)} f_s(x_1, \ldots, x_s). \tag{3}$$

Отсюда видно, что функции F_s, вместо того, чтобы характеризовать локальные статистические свойства, как это делают функции f_s, зависят от условного множителя $V^s/N\ldots(N-s+1)$, имеющего нелокальный характер и определяемого выбранным объемом V. Этот множитель приобретает особенно условный характер при неравномерном распределении случайных точек, так как в этом случае он сильно зависит от V. К недостаткам определения функций F_s относится также необходимость детерминированного значения числа точек N в объеме V.

Зная функции распределения (1), можно получить статистические сведения относительно любых величин и событий, связанных с рассматриваемыми случайными точками. Именно в этом смысле говорилось выше, что функции (1) описывают систему случайных точек статистически полно.

1. Найдем функцию распределения вероятностей $p_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n; R)$, определяющую с точностью до высших порядков малости вероятность

$$\begin{gathered} d\mathscr{P} = p_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n; R)\, dx_1 \ldots dx_n \\ (\tilde{x}_k \neq \tilde{x}_l, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{4}$$

того, что на каждый из отрезков $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1 + dx_1), \ldots, (\tilde{x}_n, \tilde{x}_n + dx_n)$ попадет по одной случайной точке в то время, как в других местах некоторой области $R \subset S$ не выпадет ни одной точки.

Для определенности будем считать область R отрезком (a, b). Произведем Δ-разбиение этого отрезка точками

$$\begin{gathered} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b, \\ x_i - x_{i-1} = \Delta_{i-1} \leqslant \Delta \quad (i = 1, \ldots, N) \end{gathered}$$

таким образом, чтобы фиксированные в (4) точки попали на различные интервалы:

$$x_{\alpha_1} \leqslant x_1 < \tilde{x}_{\alpha_1} + \Delta_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n} \leqslant \tilde{x}_n < x_{\alpha_n} + \Delta_{\alpha_n}. \tag{5}$$

Выпадение хотя бы одной точки на i-м интервале отождествим с событием $\delta_i = 1$, невыпадение точек — с событием $\delta_i = 0$.

Фигурирующая в (4) функция распределения вероятностей находится предельным переходом

$$p_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n; R) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \mathscr{P}_n}{\Delta_{\alpha_1} \ldots \Delta_{\alpha_n}}, \tag{6}$$

где

$$\Delta \mathscr{P}_n = \mathbf{P}\{\text{все } \delta_1, \ldots, \delta_N = 0, \text{ кроме } \delta_{\alpha_1}, \ldots, \delta_{\alpha_n} = 1\}. \tag{7}$$

В целях краткости обозначим через A событие, заключающееся в одновременном выпадении $\delta_{\alpha_1} = 1, \ldots, \delta_{\alpha_n} = 1$, а через $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ $(M = N - n)$

обозначим те из величин $\delta_1, \ldots, \delta_N$, которые остаются после удаления $\delta_{\alpha_1}, \ldots, \delta_{\alpha_n}$. Тогда (7) можно записать в виде:

$$\Delta\mathscr{P}_n = \mathbf{P}\{\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_M = 0, A\}. \tag{7.а}$$

Постараемся свести вероятность (7. а) к вероятности положительных событий типа

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\gamma_{i_1} = 1, \ldots, \gamma_{i_k} = 1; A\} = \\ = f_{k+n}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_k})\,\Delta_{\alpha_1}\ldots\Delta_{\alpha_n}\cdot\Delta'_{i_1}\ldots\Delta'_{i_k} \\ (x'_i = x_{\beta_i},\ \Delta'_i = \Delta_{\beta_i},\quad \beta_i \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n).\end{gathered} \tag{8}$$

Приведенное равенство вытекает из определения (2) функций распределения.

События $\gamma_i = 1$ и $\gamma_i = 0$ суть взаимно исключающие события, дающие в сумме достоверное событие, выражаемое отсутствием указания, какое значение принимает γ_i; поэтому

$$\mathbf{P}\{\gamma_i = 1, B\} + \mathbf{P}\{\gamma_i = 0, B\} = \mathbf{P}\{B\},$$

где B — произвольные события. Отсюда получаем рекуррентную формулу, позволяющую уменьшать на единицу число величин γ_i, приравниваемых нулю:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{i-1} = 0, \gamma_i = 0, \gamma_{i+1} = 1, \ldots, \gamma_m = 1, A\} = \\ = \mathbf{P}\{\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{i-1} = 0, \gamma_{i+1} = 1, \ldots, \gamma_m = 1, A\} - \\ - \mathbf{P}\{\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{i-1} = 0, \gamma_i = 1, \gamma_{i+1} = 1, \ldots, \gamma_m = 1, A\}.\end{gathered} \tag{9}$$

M-кратное применение этой формулы к (7. а) даст выражение, в которое будут входить лишь вероятности положительных событий. Это выражение представляет собой сумму 2^M членов, в которых каждое $\gamma_i\,(i = 1, \ldots, M)$ или вообще не фигурирует или приравнивается единице. Член $\mathbf{P}\{\gamma_{i_1} = 1, \ldots, \gamma_{i_k} = 1, A\}$ с заданным набором чисел $0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant M$ встречается только один раз, знак его определяется числом k. Указанную сумму запишем в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_M = 0, A\} = \mathbf{P}(A) - \sum_{i_1}\mathbf{P}\{\gamma_{i_1} = 1, A\} + \\ + \sum_{i_1 < i_2}\mathbf{P}\{\gamma_{i_1} = 1, \gamma_{i_2} = 1, A\} - \cdots = \\ = \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_k \leqslant M}\mathbf{P}\{\gamma_{i_1} = 1, \ldots, \gamma_{i_k} = 1, A\}.\end{gathered} \tag{10}$$

Подставляя сюда (8), получаем:

$$\frac{\Delta\mathscr{P}_n}{\Delta\alpha_1\ldots\Delta\alpha_n} = \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_k \leqslant M} f_{n+k}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_k})\,\Delta'_{i_1}\ldots\Delta'_{i_k}. \tag{11}$$

Совершая предельный переход $\Delta \to 0$, согласно (6) имеем:

$$p_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n; R) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int\limits_{a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant b}\cdots\int f_{n+k}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, x_1, \ldots x_k)\,dx_1\ldots dx_k$$

или, вследствие симметрии функций распределения:

$$p_n(\tilde{x}, \ldots, \tilde{x}_n; R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^b \ldots \int_a^b f_{n+k}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k. \quad (12)$$

Функция $p_n(\tilde{x}_1, \ldots; R)$ была определена посредством (4) лишь при несовпадающих аргументах. Для частично или полностью совпадающих аргументов $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ ее целесообразно доопределить формулой (12) так, что при непрерывных f_s она не будет претерпевать разрывов в местах совпадения аргументов.

Согласно идее вывода, формула (12) справедлива при любых $n = 0,1, \ldots$. Полагая $n = 0$, получаем в частности, что вероятность того, что в R не выпадет ни одной точки, равна

$$\mathcal{P}_0(R) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_R \ldots \int_R f_s(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1, \ldots dx_s. \quad (13)$$

Найдем вероятность $\mathcal{P}_n(R)$ того, что в R выпадет именно n точек.

Так как в событии (обозначим его через C), вероятность которого задается равенством (4), отсутствуют указания относительно индивидуальности случайных точек, выпадающих в окрестностях точек $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, то при интегрировании

$$\int_R \ldots \int_R p_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad (14)$$

вероятность каждого события C будет учитываться $n!$ раз (если среди $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ нет ни одной пары равных величин). В самом деле, в указанном интеграле суммируются $n!$ членов

$$p_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

в которых $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ являются различными перестановками из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$. Каждый такой член равен $\mathbf{P}\{C\}$. Чтобы в сумме вероятностей различных событий типа C, соответствующих различным наборам $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, учесть каждое такое событие только один раз, нужно (14) поделить на $n!$ Положение дела при совпадающих аргументах не окажет влияния на интеграл, определяющий $\mathcal{P}_n(R)$ (f_r, а следовательно, и p_n, мы предполагаем не имеющими дельта-образных выбросов в местах совпадения аргументов). Итак, разделив (14) на $n!$ и подставив (12), находим:

$$\mathcal{P}_n(R) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_R \ldots \int_R f_{n+k}(x_1, \ldots, x_{n+k})\, dx_1 \ldots dx_{n+k}. \quad (15)$$

Составим характеристическую функцию для числа n случайных точек, попадающих в R:

$$\theta(t) = \mathbf{M} e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(R)\, e^{int}. \quad (16)$$

Подставляя сюда (15) и суммируя биномиальные члены при каждом интеграле, получаем:

$$\theta(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(e^{it}-1)^s}{s!} \int_R \dots \int_R f_r \, dx_1 \dots dx_r. \tag{17}$$

2. Рассмотрим функционал

$$L_R\{u\} = \mathbf{M} \prod_{l=1}^{n} [1 + u(\tilde{x}_l)], \tag{18}$$

являющийся видоизменением «производящего функционала», использованного в [1]. Здесь $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ — координаты всех n точек, выпавших в R; $u(x)$ — некоторая функция.

С помощью функционала (18) легко получить и коротко записать ряд формул теории коррелированных случайных точек.

Положим

$$\delta = \prod_{i=1}^{n} [1 + u(\tilde{x}_i)]_{u(x)=-1}.$$

Очевидно, что

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Вероятность невыпадения случайных точек в R равна

$$\mathscr{P}_0(R) = \mathbf{M}\delta = \mathbf{M} \prod_i (1 + u(\tilde{x}_i))_{u=-1},$$

откуда

$$\mathscr{P}_0(R) = L_R\{-1\}. \tag{19}$$

Далее, характеристическую функцию (16) можно записать в виде

$$\theta(t) = \mathbf{M}\left[\prod_{l=1}^{n} v_l\right]_{v_l = e^{it}} = \mathbf{M} \prod_{l=1}^{n} (1 + e^{it} - 1).$$

Сравнивая это выражение с (18), получаем:

$$\theta(t) = L_R\{e^{it} - 1\}. \tag{20}$$

Выразим $L_R\{u\}$ через функции распределения. Согласно (18),

$$L_R\{u\} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{M} \sum_{1 \leqslant l_1 < \dots < l_s \leqslant n} u(\tilde{x}_{l_1}) \dots u(\tilde{x}_{l_s}), \tag{21}$$

где число однородных членов, соответствующих выбранному s, равно $\frac{n!}{s!\,(n-s)!}$.

Попрежнему произведем Δ-разбиение области R, которую мы предполагаем отрезком $a \leqslant x \leqslant b$. Учитывая, что

$$u(\tilde{x}_l) = u(x_{\alpha_l}) \left[1 + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \cdot (\tilde{x}_l - x_{\alpha_l})\right]$$

в предположении ограниченности логарифмической производной от u, имеем:

$$\sum_{1\leqslant l_1<\ldots<l_s\leqslant n} u(\tilde{x}_{l_1})\ldots u(\tilde{x}_{l_s}) = \sum_{1\leqslant l_1<\ldots<l_s<n} u(x_{\alpha_{l_1}})\ldots u(x_{\alpha_{l_s}})[1+O(\Delta)] =$$

$$= \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant N} u(x_{k_1})\ldots u(x_{k_s})\,\delta_{k_1,\ldots k_s}[1+O(\Delta)], \tag{22}$$

где $\delta_{k_1\ldots k_s}=1$, если на каждый из интервалов, номера которых встречаются среди $k_1, \ldots, k_s$, выпадает столько случайных точек, сколько раз номер данного интервала встречается среди $k_1, \ldots, k_s$, и $\delta_{k_1\ldots k_s}=0$ — в противном случае.

Для вычисления (21) с помощью (22) нужно найти $\mathbf{M}\delta_{k_1\ldots k_s}$. Пользуясь определением (2) функций распределения, можно получить:

$$\mathbf{M}\delta_{k_1\ldots k_s} = f_s(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s})\,\Delta_{k_1}\ldots\Delta_{k_s}[1+O(\Delta)]. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в (21) и переходя к пределу при $\Delta\to 0$, находим:

$$L_R\{u\} = \sum_{s=0}^{\infty}\int\limits_{a\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_s\leqslant b}\ldots\int f(x_1, \ldots, x_s)\,u(x_1)\ldots u(x_s)\,dx_1\ldots dx_s.$$

Если устранить ограничения на область изменения аргументов, то, вследствие симметрии подинтегрального выражения, будем иметь:

$$L_R\{u\} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_R\ldots\int\limits_R f(x_1, \ldots, x_s)\,u(x_1)\ldots u(x_s)\,dx_1\ldots dx_s. \tag{24}$$

Принимая во внимание полученное выражение, мы видим, что равенства (19) и (20) совпадают с найденными ранее формулами (13) и (17).

3. Для систем случайных точек, чаще всего встречающихся в физике, корреляции между выпадением точек на различных участках исчезают при раздвижении последних:

$$f_{r+s}(x_1, \ldots, x_r, x_1', \ldots, x_s') \to f_r(x_1, \ldots, x_r)\,f_s(x_1', \ldots, x_s')$$
$$\text{при } |x_i - x_j'|\to\infty \quad (i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, s). \tag{25}$$

Такие системы случайных точек можно назвать «эргодическими». Свойству (25) будет соответствовать более простое свойство:

$$g_{r+s}(x_1, \ldots, x_r, x_1', \ldots, x_s')\to 0 \text{ при } |x_i - x_j'|\to\infty$$
$$(i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, s), \tag{26}$$

если ввести функции корреляции распределения

$$g_s(x_1, \ldots, x_s) \quad (s=1, 2, \ldots) \tag{27}$$

при помощи равенства

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\mu_1, \ldots, \mu_s} f_s(x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_s})\,z_{\mu_1}\ldots z_{\mu_s} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s} g_s(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_s})\,z_{\nu_1}\ldots z_{\nu_s}\right\} \quad (f_0=1), \tag{28}$$

где $z_1, z_2, \ldots$ — произвольные величины, число которых также произвольно, $x_1, x_2, \ldots$ — произвольные точки, принадлежащие S.

Переход к функциям (27), в свою очередь статистически полно описывающим систему случайных точек, аналогичен переходу от моментных функций к обобщенным корреляционным функциям в теории случайных функций. Формулы перехода от f_s к g_s и обратно тождественны с соответствующими формулами, связывающими функции m_s и k_s [см. (2)]. Функции распределения выражаются через функции g_s следующим образом:

$$f_s(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n_1+2n_2+\ldots+pn_p=s} \mathcal{S} \left(\frac{s!}{n_1!\, n_2!\, (2!)^{n_2} \ldots n_p!\, (p!)^{n_p}} \right) g_1^{(n_1)} g_2^{(n_2)} \ldots g_p^{(n_p)}, \quad (29)$$

где

$$g_i^{(n)} = \overbrace{g_i \ldots g_i}^{n \text{ раз}} \quad (n \geqslant 0).$$

Символом $\mathcal{S}$ обозначено суммирование по всевозможным перестановкам аргументов $x_1, \ldots, x_s$, дающим не совпадающие тождественно результаты. Снизу указано число подобных перестановок (при их подсчете следует учитывать симметрию функций g_s).

Принимая во внимание (28), легко выразить функционал (24) через функции корреляции распределения. Отождествляя фигурирующие в (28) точки $x_1, x_2, \ldots$ с точками $x_1, \ldots, x_N$, производящими Δ-разбиение отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ (области R), полагая

$$z_\mu = u(x_\mu)\, \Delta_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, N)$$

и переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим:

$$L_R(u) = \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_R \ldots \int_R g_s(x_1, \ldots, x_s)\, u(x_1) \ldots u(x_s)\, dx_1 \ldots dx_s \right\}. \quad (30)$$

Согласно (19) и (20), отсюда легко найти, как выражаются $\mathcal{P}_0(R)$ и характеристическая функция $\theta(t)$ через функции корреляции распределения:

$$\mathcal{P}_0(R) = \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \mathfrak{T}_s \right\}, \quad \theta(t) = \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(e^{it}-1)^s}{s!} \mathfrak{T}_s \right\}, \quad (31)$$

где

$$\mathfrak{T}_s = \int_R \ldots \int_R g_s(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s. \quad (32)$$

Чтобы выразить (12) через функции g_s, положим в равенстве (28)

$$x_\mu = \begin{cases} x_\mu, & \mu = 1, \ldots, N, \\ x'_{\mu-N}, & \mu = N+1,\ N+2, \ldots, \end{cases}$$

$$z_\mu = \begin{cases} -\Delta_\mu, & \mu = 1, \ldots, N, \\ z'_{\mu-N}, & \mu = N+1,\ N+2, \ldots, \end{cases}$$

где $x_1, \ldots, x_N$ — точки Δ-разбиения, $x_1', x_2', \ldots, z_1', z_2', \ldots$ — произвольные величины. Пользуясь симметрией функций f_s и g_s, после приведения подобных членов получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n!m!}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\cdot$$

$$\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=1}^{N} f_{n+m}(x'_{\nu_1}\ldots x'_{\nu_n}, x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_m})\,\Delta_{\mu_1}\ldots\Delta_{\mu_m}z'_{\nu_1}\ldots z'_{\nu_n} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n!m!}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=1}^{N} g_{n+m}(x'_{\nu_1}, \ldots, x'_{\nu_n}, x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_m})\,\Delta_{\mu_1}\ldots\Delta_{\mu_m}z'_{\nu_1}\ldots z'_{\nu_n}\right\}.$$

Совершая предельный переход при $\Delta \to 0$, будем иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n} p_n(x'_{\nu_1}, \ldots, x'_{\nu_n})\,z'_{\nu_1}\ldots z'_{\nu_n} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n} h_n(x'_{\nu_1}, \ldots, x'_{\nu_n})\,z'_{\nu_1}\ldots z'_{\nu_n}\right\}, \tag{33}$$

где

$$h_n(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_R\ldots\int_R g_{n+m}(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_m)\,dx_1\ldots dx_m \tag{34}$$

в то время, как p_n определено равенством (12). Функции h_n находятся в таком же отношении к g_n, как p_n к f_n. Мы видим, что (33) отличается от (28) только тем, что в экспоненте член, соответствующий $n = 0$, не равен нулю. Если ввести p_n^0, определяемые равенствами

$$p_n = p_n^0 e^{h_0} = p_n^0 \mathscr{P}_0(R) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{35}$$

то p_n^0 и h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ будут связаны равенством, уже вполне тождественным с (28). Следовательно, p_n^0 выражаются через h_n точно так же, как в (29) f_s выражаются через g_s. Учитывая это, а также (35), получим:

$$\begin{aligned}
&p_1(x) = h_1(x)\,e^{h_0},\\
&p_2(x_1, x_2) = [h_1(x_1)\,h_1(x_2) + h_2(x_1, x_2)]\,e^{h_0},\\
&p_3(x_1, x_2, x_3) = [h_1(x_1)\,h_1(x_2)\,h_1(x_3) + h_1(x_1)\,h_2(x_2, x_3) +\\
&\quad + h_1(x_2)\,h_2(x_1, x_3) + h_1(x_3)\,h_2(x_1, x_2) + h_3(x_1, x_2, x_3)]\,e^{h_0},
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n(x_1, \ldots, x_n) = e^{h_0}\sum_{n_1+\ldots+pn_p=n} S\left(\frac{n!}{n_1!\,(1!)^{n_1}\ldots n_r!\,(p!)^{n_p}}\right) h_1^{(n_1)}\ldots h_p^{(n_p)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя полученные выражения в (14) и разделив указанный интеграл на $n!$, получим:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}_1(R) = H_1(R)\,\mathscr{P}_0(R),\\
&\mathscr{P}_2(R) = \frac{1}{2}\,[H_1(R)^2 + H_2(R)]\,\mathscr{P}_0(R),\\
&\mathscr{P}_3(R) = \frac{1}{3!}\,[H_1(R)^3 + 3H_1(R)\,H_2(R) + H_3(R)]\,\mathscr{P}_0(R),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathscr{P}_n(R) = \mathscr{P}_0(R) \sum_{n_1+\cdots+pn_p=\tilde{n}} \frac{H_1(R)^{n_1}\ldots H_p(R)^{n_p}}{n_1!\,(1!)^{n_1}\ldots n_p!\,(p!)^{n_p}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{36a}$$

где

$$H_k(R) = \int\limits_R \ldots \int\limits_R h_k(x_1, \ldots, x_k)\,dx_1 \ldots dx_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\,\mathfrak{T}_{k+m}. \tag{37}$$

4. Найдем моменты и семиинварианты числа точек n, выпадающих в области R. Подставляя (31) в известную формулу для семиинвариантов

$$k_s = \frac{1}{i^s}\left[\frac{d^s}{dt^s}\ln\theta(t)\right]_{t=0}$$

и вводя переменную $w = it$, получаем:

$$k_s = \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!}\,\frac{d^s}{dw^s}\,(e^w - 1)^r\,\mathfrak{T}_r\right]_{w=0} \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{38}$$

Эти соотношения можно записать в виде:

$$k_s = \sum_{r=1}^{s} a_{sr}\mathfrak{T}_r, \tag{39}$$

где

$$a_{sr} = \frac{1}{r!}\left[\frac{d^s}{dw^s}(e^w - 1)^r\right]_{w=0} = \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}k^s(-1)^{r-k}. \tag{40}$$

Высшие коэффициенты a_{sr} при $r > s$, как нетрудно убедиться, равны нулю. Для младших s равенства (39) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&k_1 = \mathfrak{T}_1,\\
&k_2 = \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1,\\
&k_3 = \mathfrak{T}_3 + 3\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1,\\
&k_4 = \mathfrak{T}_4 + 6\mathfrak{T}_3 + 7\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{41}$$

Аналогичным образом, производя дифференцирование самой характеристической функции (а не ее логарифма) и учитывая на этот раз (17), получим:

$$\mathbf{M}n^s = m_s = \sum_{r=1}^{s} a_{sr}\int\limits_R \ldots \int\limits_R f_r(x_1, \ldots, x_r)\,dx_1 \ldots x_r. \tag{42}$$

5. Преобразуем некоторые найденные нами выражения применительно к одному важному для приложений частному случаю, а именно, к од-

нородной системе случайных точек, для которой, по определению,

$$g_s(x_1, \ldots, x_s) = g_s(x_1 + a, \ldots, x_s + a)$$

при любом a и $s = 1, 2, \ldots$. Однородную систему случайных точек можно характеризовать функциями $g_s^*(x_1, \ldots, x_{s-1}) = g_s(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0)$, обладающими соответствующими свойствами симметрии. При этом, как показано в [3], вследствие симметрии указанных функций, мы имеем

$$\mathfrak{T}_s = s(s-1)\int_0^l (l-\sigma)\, d\sigma \int_0^\sigma \ldots \int_0^\sigma g_s^*(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-2})\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{s-2}$$
$$(l = b - a, \quad s = 2, 3, \ldots). \tag{43}$$

В системах случайных точек, обычно встречающихся в физике, корреляции быстро пропадают с расстоянием; для них функции g_s^* ($s = 2, 3, \ldots$) достаточно быстро исчезают при возрастании аргументов, так что имеют место равенства:

$$\mathfrak{T}_s = G_s l\,[1 - \xi_s/l] \quad (s \geqslant 2), \tag{44}$$

где

$$G_s = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int g_s^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1})\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{s-1}; \tag{45}$$

ξ_s — s-е расстояние корреляции, определяемое равенством:

$$\xi_s = \frac{s(s-1)}{G_s}\int_0^\infty \sigma d\sigma \int_0^\sigma \ldots \int_0^\sigma g_s^*(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-2})\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{s-2}.$$

При $l \gg \xi$ (ξ — максимальное из расстояний корреляции $\xi_2, \xi_3, \ldots$) будем иметь:

$$\mathfrak{T}_s = G_s l \quad (s = 2, 3, \ldots, l = b - a). \tag{46}$$

Подставляя эти выражения в (31), получим:

$$\theta = \exp\left\{l \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(e^{it} - 1)^s}{s!} G_s\right\} \quad (G_1 = g_1). \tag{47}$$

Далее, в результате подстановки их в (37), имеем:

$$H_n(R) = l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} G_{n+m}, \tag{48}$$

или

$$H_n(R) = (-1)^{n-1} \beta_n l, \tag{49}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_0 &= g_1 - \sum_2^\infty \frac{(-1)^r}{r!} G_r, \\
\beta_1 &= g_1 - \sum_2^\infty \frac{(-1)^r}{(r-1)!} G_r, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_n &= -\sum_{r=n}^\infty \frac{(-1)^r}{(r-n)!} G_r.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Равенства (48) и (49) можно считать справедливыми для всех значений n, включая 0 и 1, если полагать $G_0 = 0$, $G_1 = g_1$.

Подставляя (49) в (36.а), находим:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_0(l) &= e^{-\beta_0 l}\\
\mathscr{P}_1(l) &= \beta_1 l e^{-\beta_0 l},\\
\mathscr{P}_2(l) &= \frac{1}{2}(\beta_1^2 l^2 - \beta_2 l)\, e^{-\beta_0 l},\\
\mathscr{P}_3(l) &= \frac{1}{3!}(\beta_1^3 l^3 - 3\beta_1\beta_2 l^2 + \beta_3 l)\, e^{-\beta_0 l},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{51}$$

Отсюда видно, что в наиболее простом случае, когда отсутствуют корреляции между выпадениями случайных точек ($g_2 = g_3 = \ldots = 0$), формулы (51) совпадают с соответствующими формулами закона Пуассона; при этом

$$\beta_0 = \beta_1 = g_1, \quad \beta_2 = \beta_3 = \ldots = 0.$$

Отметим, что при любом n

$$\mathscr{P}_n(l) = \frac{1}{n!}(\beta_1 l)^n e^{-\beta_0 l}\left[1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right]. \tag{52}$$

Поставим вопрос, можно ли говорить о некотором законе Пуассона, эквивалентном данному распределению? Вероятность $\mathscr{P}_0(l)$ данного распределения равна вероятности $\mathscr{P}_0(l)$ эквивалентного распределения Пуассона, имеющего плотность $\beta = \beta_0$. Отношение же $\mathscr{P}_n(l)/\mathscr{P}_0(l)$ при $l \to \infty$ стремится к соответствующему отношению эквивалентной пуассоновой системы, имеющей $\beta = \beta_1$. В этом смысле можно говорить, что в отношении невыпадения точек система имеет эквивалентную пуассоновую плотность β_0, в отношении же выпадения их — плотность β_1.

Для дисперсии числа точек n, которая, согласно (41), равна

$$Dn = k_2 = \mathfrak{T}_2 + \bar{n}, \tag{53}$$

где $\bar{n} = m_1 = k_1$ — среднее число точек в K, мы имеем, вследствие (45), выражение:

$$k_2 = (g_1 + G_2)\, l, \tag{54}$$

справедливое при $l \gg \xi$. Отсюда следует, что флюктуации числа частиц (плотности) в рассматриваемой непуассоновой системе — такие же, как флюктуации в эквивалентной пуассоновой системе, имеющей среднюю плотность $\beta = g_1 + G_2$. Коэффициенты асимметрии и эксцесса для n при $l \gg \xi$, согласно (41), (46), равны:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{G_3 + 3G_2 + g_1}{(G_2 + g_1)^{\frac{3}{2}}\, l^{\frac{1}{2}}},\\
\gamma_2 &= \frac{G_4 + 6G_3 + 7G_2 + g_1}{(G_2 + g_1)^2\, l}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Приближенные равенства (46) — (55), выведенные в предположении $l \gg \xi$, будут вытекать из основных предыдущих формул как точные, если в них формально положить:

$$g_s(x_1, \ldots, x_s) = G_s \delta(x_1 - x_s) \ldots \delta(x_{s-1} - x_s) \quad (s = 2, 3, \ldots). \tag{56}$$

Поскольку при $G_s \not\equiv 0$ $(s \geqslant 2)$, функции (56) являются сингулярными, к ним нельзя непосредственно применять развитый выше аппарат. Тем не менее, повидимому, возможно обобщение теории на случай (56) при соответствующей модификации формулировок и доказательств. Если описание системы случайных точек функциями распределения вида (56) действительно возможно, то распределение (56) является ближайшим обобщением закона распределения Пуассона. Для него, как и для последнего, расстояние корреляции равно нулю, а все эффекты корреляции сводятся к особой вероятности выпадения пар точек, троек и т. д. Такой закон распределения асимптотически описывает большинство физических законов распределения при больших расстояниях. Им можно пользоваться, если не интересоваться микрокартиной, развертывающейся на расстояниях порядка расстояния корреляции ξ.

В большинстве приложений теории коррелированных случайных точек роль высших корреляций уменьшается с увеличением их порядка. Поэтому в формулах настоящей работы можно полагать $g_s \equiv 0$, начиная с некоторого порядка $p\,(s = p+1,\ p+2,\ \ldots)$, зависящего от точности рассмотрения. Соответственно этому суммы, в которые входят функции g_s, h_s или интегралы от них $\mathfrak{T}_s$, G_s, H_s, будут содержать конечное число членов. Обрывать подобным образом ряды, составленные из интегралов от f_s, имеется значительно меньше оснований, и в этом проявляется преимущество функций g_s перед функциями распределения. В свете сказанного можно утверждать, что переход от функций распределения к функциям корреляции распределения дает более быструю сходимость рядов.

Если иметь в виду приложения к статистической физике, то задачи, рассматриваемые в настоящей работе, имеют большой интерес вследствие наличия корреляций между реальными молекулами. При изучении их статистических свойств целесообразно пользоваться именно аппаратом функций распределения и функций корреляции распределения. Выигрышной чертой последнего является то, что в нем на наиболее видных местах находятся младшие корреляционные зависимости, которые в целом являются определяющими.

Поступило
6. IV.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М. — Л., ГИТТЛ, 1946.

[2] Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Приложение II, Автоматика и телемеханика, XIV, № 4 (1953), 375—389.

[3] Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Корреляционные функции в теории броуновского движения, ЖЭТФ, 26 (1954), 189—207.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 179—196

О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ—СТИЛЬТЬЕСА СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе рассматриваются коэффициенты Фурье—Стильтьеса сингулярных функций и устанавливается, что ряд из их квадратов может расходиться как угодно медленно.

Не равную тождественно постоянной функцию, производная которой равна нулю почти всюду, называют сингулярной. Как известно, коэффициенты Фурье—Стильтьеса монотонной сингулярной функции $F(x)$

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, dF(x)$$

таковы, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \qquad (I)$$

расходится. В 1916 г. Д. Е. Меньшовым ([6]) было доказано, что эти коэффициенты могут стремиться к нулю. Вопрос о том, с какой скоростью c_n могут стремиться к нулю, изучался Литтльвудом ([1]), Винером совместно с Винтером ([2]) и Шеффером ([3]). Наиболее сильный результат Шеффера состоит в том, что для любой положительной функции $r(x)$, стремящейся монотонно к бесконечности при $x \to \infty$, можно построить такую функцию $F(x)$, что

$$c_n = O\left(\frac{r(|n|)}{\sqrt{|n|}}\right).$$

В настоящей работе показывается, что в известном смысле слова ряд (I) может расходиться как угодно медленно. В частности, его коэффициенты могут иметь порядок убывания

$$\frac{1}{\sqrt{|n|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|n|\ln|n|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|n|\ln|n|\ln\ln|n|}} \text{ и т. д.}$$

ТЕОРЕМА. *Если положительная, монотонно убывающая и дифференцируемая функция* $\chi(y)$, *заданная на полупрямой* $y \geqslant 0$, *удовлетворяет условиям:*

1. $\psi(y) = \int_0^y \chi^2(\eta)\, d\eta \to \infty$ *при* $y \to \infty$;
2. $y^{1+\varepsilon}\chi^2(y) \to \infty$ *при* $y \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$;
3. $y\chi^2(y) \to 0$ *при* $y \to \infty$;

4. *существует такое* y_0, *что для всех* $y > y_0$ *и любого* $\theta \geqslant 1$

$$\frac{\chi(y)}{\chi(\theta y)} \leqslant \theta^{\frac{3}{4}},$$

то на отрезке $[0, 2\pi]$ *можно построить такую непрерывную, монотонно неубывающую и сингулярную функцию* $F(x)$, *что*

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, dF(x) = o(\chi(|n|)).$$

В заметке ([4]) аналогичное утверждение было сформулировано при несколько более жестких ограничениях на функцию $\chi(y)$.

Доказательство. Обозначим

$$\chi_1(y) = \frac{\chi(y)}{\sqrt{\psi(y) + 1}}.$$

Легко видеть, что функция

$$\psi_1(y) = \int_0^y \chi_1^2(\eta)\, d\eta = \int_0^y \frac{\chi^2(\eta)}{\psi(\eta) + 1}\, d\eta = \ln[\psi(y) + 1],$$

в силу условия 1, при $y \to \infty$ неограниченно и монотонно возрастает. Так как $\psi_1(y)$ непрерывна и монотонно возрастает от $\psi_1(0) = 0$ до бесконечности при возрастании y от нуля до бесконечности, то существует обратная к $\psi_1(y)$ функция $\bar{\psi}(x)$, которая тоже определена на полупрямой $x \geqslant 0$ и монотонно возрастает от нуля до бесконечности. Полагая

$$f(x) = \int_0^x \bar{\psi}(\xi)\, d\xi,$$

мы строим искомую функцию $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x),$$

где

$$F_n(x) = \int_0^x Q_n(\xi)\, d\xi, \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} [1 + \cos f(d_k + x)],$$

а последовательность

$$d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k < \cdots$$

подчинена лишь условиям достаточно быстрого возрастания.

§ 1. Свойства функций χ, ψ, χ_1 и f

ЛЕММА 1. *Функция* $\chi_1(y)$ *монотонно убывает, положительна, дифференцируема, обладает свойствами* 1—3 *функции* $\chi(y)$ *и свойством* 4*. *существует такое* y_1, *что для всех* $y > y_1$ *и любого* $\theta \geqslant 1$

$$\frac{\chi_1(y)}{\chi_1(\theta y)} \leqslant \theta.$$

Доказательство. Положительность, монотонность и дифференцируемость очевидны. Докажем свойства 1—4*. Свойство 1 доказано выше.

Свойство 2. По свойству 3 функции $\chi(y)$, для всех y имеем:

$$\chi^2(y) < \frac{a}{y},$$

где a — некоторая постоянная. Отсюда ясно, что

$$\psi(y)=\int_0^y \chi^2(\eta)\,d\eta=\int_0^1 \chi^2(\eta)\,d\eta+\int_1^y \chi^2(\eta)\,d\eta<\chi^2(0)+\int_1^y \frac{a}{\eta}\,d\eta=\chi^2(0)+a\ln y.$$

Рассмотрим произведение

$$y^{1+\varepsilon}\chi_1^2(y)=y^{1+\varepsilon}\frac{\chi^2(y)}{\psi(y)+1}>y^{1+\varepsilon}\frac{\chi^2(y)}{\chi^2(0)+a\ln y+1}=\frac{1}{a+\dfrac{1+\chi^2(0)}{\ln y}}\cdot\frac{y^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln y}\cdot y^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\chi^2(y).$$

В последнем равенстве при $y\to\infty$ первый сомножитель положителен и ограничен снизу, а второй и третий стремятся к бесконечности (третий — по свойству 2 функции $\chi(y)$).

Свойство 3 очевидно, так как $\chi_1(y)=o(\chi(y))$.

Свойство 4*. Пусть $1\leqslant\theta\leqslant 4$ и $y>y_1$. В силу свойства 4 функции $\chi(y)$,

$$\frac{\chi_1(y)}{\chi_1(\theta y)}=\frac{\chi(y)}{\sqrt{\psi(y)+1}}:\frac{\chi(\theta y)}{\sqrt{\psi(\theta y)+1}}=\frac{\chi(y)}{\chi(\theta y)}\sqrt{\frac{\psi(\theta y)+1}{\psi(y)+1}}\leqslant\theta^{\frac{3}{4}}\sqrt{1+\frac{\psi(\theta y)-\psi(y)}{\psi(y)+1}}=$$

$$=\theta^{\frac{3}{4}}\sqrt{1+\frac{\chi^2(\eta)\,y(\theta-1)}{\psi(y)+1}}\leqslant\theta^{\frac{3}{4}}\sqrt{1+\frac{(\theta-1)\,y\,\chi^2(y)}{\psi(y)+1}}\leqslant\theta,$$

так как y_1 можно выбрать таким, что

$$\frac{y\chi^2(y)}{\psi(y)+1}<\frac{1}{3}$$

для всех $y>y_1$. Если же $\theta>4$, то можно подобрать такое $\theta_1<4$, что $\theta=\theta_1^k$ (k — целое). Тогда

$$\frac{\chi_1(y)}{\chi_1(\theta y)}=\frac{\chi_1(y)}{\chi_1(\theta_1^k y)}=\frac{\chi_1(y)}{\chi_1(\theta_1 y)}\cdot\frac{\chi_1(\theta_1 y)}{\chi_1(\theta_1^2 y)}\cdot\frac{\chi_1(\theta_1^2 y)}{\chi_1(\theta_1^3 y)}\cdot\ldots\frac{\chi_1(\theta_1^{k-1}y)}{\chi_1(\theta_1^k y)}\leqslant\theta_1^k=\theta.$$

Легко видеть, что функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ положительны, монотонны и неограниченно возрастают, причем

$$f'(x)=\psi(x),\quad f''(x)=\frac{1}{\chi_1^2(f'(x))}.\tag{1}$$

Обозначим через ξ_y корень уравнения

$$f'(x)=|y|.$$

Из (1) следует, что

$$\chi_1^2(|y|)=\frac{1}{f''(\xi_y)}.$$

Заметим, кроме того, что

$$\xi_y=\psi_1(|y|),\tag{2}$$

так как $f'(x)$ и $\psi_1(y)$ — обратные функции. Из (2) следует также, что ξ_y — монотонно возрастающая функция от y.

ЛЕММА 2. $\xi_{\theta y}-\xi_y\to 0$ *при* $y\to\infty$ *для любого* $\theta>1$.

Доказательство. Ввиду (2) и по формуле конечных приращений

$$\xi_{\theta y}-\xi_y=\psi_1(|\theta y|)-\psi_1(|y|)=\chi_1^2(\theta'|y|)\,|y|\,(\theta-1)\quad(1\leqslant\theta'\leqslant\theta).$$

Но, в силу монотонности $\chi_1(y)$,

$$(\theta-1)|y|\chi_1^2(\theta'|y|)\leqslant[|y|\chi_1^2(|y|)](\theta-1),$$

где в правой части сомножитель в квадратных скобках стремится к нулю при $y \to \infty$ по свойству 3 функции $\chi_1(y)$.

Обозначим через $\Delta_a(x)$ такую положительную функцию от x, что

$$0 < f(x) - f(x - \Delta_a(x)) = a.$$

ЛЕММА 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{[f''(x)]^{2-\varepsilon}}{f'(x) f'(x - \Delta_a(x))} = 0.$$

Доказательство. Преобразуем это отношение при помощи формулы (1):

$$\frac{[f''(x)]^{2-\varepsilon}}{f'(x) f'(x - \Delta_a(x))} = \frac{1}{[\chi_1^2(f'(x))]^{2-\varepsilon}} \frac{1}{f'(x) f'(x - \Delta_a(x))} =$$

$$= \frac{1}{[\chi_1^2(f'(x))]^{2-\varepsilon} [f'(x)]^2} \cdot \frac{f'(x)}{f'(x - \Delta_a(x))}.$$

Знаменатель в первом множителе можно записать в виде:

$$[\chi_1^2(f'(x))]^{2-\varepsilon} [f'(x)]^2 = \{\chi_1^2(f'(x)) [f'(x)]^{\frac{2}{2-\varepsilon}}\}^{2-\varepsilon}.$$

Так как $f'(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то произведение в фигурных скобках, а вместе с тем и весь знаменатель, стремятся к бесконечности при $x \to \infty$ по свойству 2 функции $\chi_1(y)$, так как

$$\frac{2}{2-\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} > 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покажем, что второй множитель ограничен:

$$a = f(x) - f(x - \Delta_a(x)) = \int_{x - \Delta_a(x)}^{x} f'(\xi)\, d\xi > f'(x - \Delta_a(x))\, \Delta_a(x). \qquad (3)$$

Обозначим

$$f'(x - \Delta_a(x)) = y, \quad f'(x) = C(a, x)\, y.$$

Тогда

$$x - \Delta_a(x) = \psi_1(y), \quad x = \psi_1(C(a, x)\, y),$$

так как $f'(x)$ и $\psi_1(y)$ — обратные функции. Отсюда при помощи свойства 4* получаем:

$$\Delta_a(x) = \psi_1(C(a, x)\, y) - \psi_1(y) = \int_{y}^{C(a,x)y} \chi_1^2(\eta)\, d\eta \geqslant$$

$$\geqslant \int_{y}^{C(a,x)y} \left(\frac{y\chi_1(y)}{\eta}\right)^2 d\eta = [y\chi_1(y)]^2 \frac{1}{y}\left[1 - \frac{1}{C(a, x)}\right]. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует:

$$a \geqslant f'(x - \Delta_a(x))\, [y\chi_1(y)]^2 \frac{1}{y}\left[1 - \frac{1}{C(a, x)}\right] = [y\chi_1(y)]^2 \left[1 - \frac{1}{C(a, x)}\right],$$

или, после преобразования:

$$C(a, x) \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{a}{[y\chi_1(y)]^2}},$$

что доказывает наше утверждение, так как при $x \to \infty$ $y \to \infty$, а тогда, по свойству 2, $y\chi_1(y) \to \infty$.

§ 2. Функции Q_n и F_n и вспомогательные леммы

Выберем последовательность положительных чисел

$$d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k < \cdots$$

так, чтобы при $k > 1$

$$\alpha_1) \quad \frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{[f'(d_k)]^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{16^k},$$

$$\alpha_2) \quad \frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{\sqrt{d_k}} < \frac{1}{2^k},$$

$$\alpha_3) \quad \frac{f'(d_k)}{\sqrt{f''(d_k)}} > 100 \cdot 4^k f'(d_{k-1}+2\pi),$$

а d_1 удовлетворяло условию

$$\alpha_4) \quad \cos f(d_1) = -1 \text{ и } f'(d_1) > 1.$$

Выбор d_1, удовлетворяющего условию $\alpha_4)$, осуществляется без труда, так как $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ растет неограниченно. Выбор d_k при $k > 1$ осуществляется индуктивно: после того как d_{k-1} уже выбрано, d_k выбирается столь большим, чтобы выполнялись условия $\alpha_1) - \alpha_3)$, что всегда возможно, так как при фиксированном d_{k-1} условия $\alpha_1) - \alpha_3)$ выполняются для всех достаточно больших d_k. Это непосредственно очевидно для условия $\alpha_2)$. Для условия α_1 это вытекает из того, что при $x \to \infty$ $f'(x)$ растет неограниченно. Условие $\alpha_3)$ удовлетворяется при достаточно больших d_k, так как, в силу формулы (1),

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f''(x)}} = f'(x)\,\chi_1(f'(x)),$$

а последнее выражение вместе с ростом x растет неограниченно по свойству 2 функции χ_1, так как $f'(x)$ — неограниченно и монотонно растущая функция.

Пользуясь выбранной последовательностью чисел $\{d_k\}$, построим на отрезке $[0, 2\pi]$ две последовательности функций:

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} [1 + \cos f(d_k + x)] \text{ и } F_n(x) = \int_0^x Q_n(\xi)\, d\xi.$$

Из построения ясно, что $Q_n(x)$ и $F_n(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, а $F_n(x)$ — монотонно возрастающая, так как $Q_n(x) \geqslant 0$.

ЛЕММА 4. $|Q_n'(x)| \leqslant 2^n f'(d_n + b)$ *на* $[a, b] \subset [0, 2\pi]$.

Доказательство.

$$|Q_n'(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_n(x)}{1 + \cos f(d_k + x)} (-\sin f(d_k + x)) f'(d_k + x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{Q_n(x)}{1 + \cos f(d_k + x)} \right| |\sin f(d_k + x)|\, |f'(d_k + x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-1} f'(d_n + x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f'(d_k + x)}{f'(d_k + x)} < 2^{n-1} f'(d_n + b) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f'(d_k + 2\pi)}{f'(d_n)} + 1 \right];$$

здесь мы воспользовались монотонностью $f'(x)$ и тем, что каждая скобка произведения $Q_n(x)$ не больше 2. Каждый член полученной суммы легко оценивается при помощи условия α_1), наложенного на последовательность $\{d_k\}$ $(k<n)$:

$$\frac{f'(d_k+2\pi)}{f'(d_n)}<\frac{f'(d_{n-1}+2\pi)}{[f'(d_n)]^{\frac{1}{3}}}<\frac{1}{16^n}.$$

Таким образом,

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f'(d_k+2\pi)}{f'(d_n)}<1+\frac{n-1}{16^n}<2,$$

чем утверждение леммы доказано.

В дальнейшем для обозначения вариации функции $Q(x)$ на отрезке $\Delta=[a,b]$ будем употреблять символы $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}Q$ или $\underset{\Delta}{\mathrm{V}}Q$.

ЛЕММА 5. $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}Q_n\leqslant 2^n(b-a)f'(d_n+b)$.

Доказательство. В силу леммы 4,

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}Q_n=\int_a^b|dQ_n(x)|=\int_a^b|Q_n'(x)|\,dx\leqslant 2^n(b-a)f'(d_n+b).$$

ЛЕММА 6. *Для любого* $\theta>1$ *и* $y>\frac{1}{\theta}f'(d_k)$

$$\frac{d_k}{\psi_1(y)}<\theta.$$

Доказательство. Так как $\psi_1(y)$ и $f'(x)$ — обратные функции, то

$$\frac{d_k}{\psi_1(y)}=\frac{\psi_1(f'(d_k))}{\psi_1(y)}=\frac{\int_0^{f'(d_k)}\chi_1^2(\eta)\,d\eta}{\int_0^{y}\chi_1^2(\eta)\,d\eta}=$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{\theta}f'(d_k)}\chi_1^2(\theta u)\,du}{\int_0^{y}\chi_1^2(\eta)\,d\eta}<\theta\frac{\int_0^{y}\chi_1^2(\theta u)\,du}{\int_0^{y}\chi_1^2(\eta)\,d\eta}<\theta\frac{\int_0^{y}\chi_1^2(u)\,du}{\int_0^{y}\chi_1^2(\eta)\,d\eta}=\theta.$$

ЛЕММА 7. *Если* k *и* n *связаны соотношением*

$$\frac{1}{2}f'(d_{k+1})>n>\frac{1}{2}f'(d_k),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^kf'(d_{k-1}+2\pi)}{\sqrt{\psi(n)+1}}=0.$$

Доказательство. Преобразуем допредельное соотношение:

$$\frac{2^kf'(d_{k-1}+2\pi)}{\sqrt{\psi(n)+1}}=\frac{2^kf'(d_{k-1}+2\pi)}{\sqrt{d_k}}\sqrt{\frac{d_k}{\psi_1(n)}}\sqrt{\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)+1}}.$$

Первый сомножитель меньше 1 в силу α_2), второй — меньше $\sqrt{2}$ в силу леммы 6, а третий стремится к нулю, так как $\psi_1(n)=o(\psi(n))$.

ЛЕММА 8. *Пусть функция $Q(x)$ имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию и $g(x)$ — непрерывная функция. Тогда*

$$\left|\int_a^b Q(x)\cos g(x)\,dx\right| < K \max_{a<x<b}\left|\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi\right|, \qquad (*)$$

где

$$K = |Q(b)| + \bigvee_a^b Q.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем:

$$\left|\int_a^b Q(x)\cos g(x)\,dx\right| = \left|\left[Q(x)\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi\right]_a^b - \int_a^b\left(\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi\right)dQ(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |Q(b)|\left|\int_a^b \cos g(\xi)\,d\xi\right| + \int_a^b\left|\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi\right||dQ(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a<x<b}\left|\int_a^b \cos g(\xi)\,d\xi\right|\left[|Q(b)| + \int_a^b |dQ(x)|\right].$$

Следствие 1. *Если в условиях леммы 8 функция $g(x)$ такова, что $g''(x)$ сохраняет знак и $|g''(x)| \geqslant r$ всюду на $[a, b]$, то*

$$\left|\int_a^b Q(x)\cos g(x)\,dx\right| \leqslant \frac{6K}{\sqrt{r}}.$$

Доказательство. Функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы Ван-дер-Корпута [см. (5), теорема 409] и потому для любого $x \in [a, b]$

$$\left|\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi\right| < \frac{6}{\sqrt{r}}.$$

Следствие 2. *Если в условиях леммы 8 $g'(x)$ непрерывна, монотонна и $|g'(x)| \geqslant M > 0$ всюду на $[a, b]$, то*

$$\left|\int_a^b Q(x)\cos g(x)\,dx\right| < \frac{2K}{M}.$$

Доказательство. Оценим интеграл в правой части соотношения (*) леммы 8. Так как $g'(x)$ сохраняет знак и $|g'(x)| \geqslant M > 0$, то $g(x)$ — монотонная функция, имеющая обратную непрерывно дифференцируемую функцию $\overline{g}(y)$. Сделаем замену переменной $y = g(\xi)$ в интеграле

$$\int_a^x \cos g(\xi)\,d\xi = \int_{g(a)}^{g(x)} \cos y\,\overline{g}'(y)\,dy.$$

Ввиду монотонности и положительности (для определенности) $g'(x)$, функция $\overline{g}'(x)$ тоже положительна и монотонна (для определенности будем

считать, что она убывающая). Применим к полученному интегралу вторую теорему о среднем:

$$\int_{g(a)}^{g(x)} \cos y\, \bar{g}'(y)\, dy = \bar{g}'(g(a)) \int_{g(a)}^{\xi} \cos y\, dy.$$

Но так как $\bar{g}(y)$ и $g(x)$ — обратные функции, то

$$\bar{g}'(g(a)) = \frac{1}{g'(a)} \leqslant \frac{1}{M},$$

интеграл же от косинуса по модулю всегда меньше 2.

Примечание 1. Если функция $Q(x)$ имеет на $[a, b]$ хоть один нуль, то

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |Q(x)| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} Q$$

и в лемме 8 можно положить $K = 2 \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} Q$.

Примечание 2. Лемма 8 и ее следствия остаются справедливыми, если вместо косинусов всюду поставить синусы.

ЛЕММА 9. *Для каждого* $x \in [0, 2\pi]$ *существует*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

и предельная функция непрерывна, монотонно не убывает и не равна тождественно постоянной.

Доказательство. По следствию 2 леммы 8,

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| = \left| \int_0^x Q_n(\xi) \cos f(d_{n+1} + \xi)\, d\xi \right| < \frac{2K}{f'(d_{n+1})},$$

так как $f'(x)$ — монотонно возрастающая функция. Заметим, что в силу условия α_4), наложенного на выбор d_1, для всех n $Q_n(0) = 0$; поэтому, в силу примечания 1 к лемме 8, можно положить

$$K = 2 \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}} Q_n.$$

После этого, воспользовавшись леммой 5 и условием α_1), легко получаем:

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| < \frac{4 \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}} Q_n}{f'(d_{n+1})} < \frac{4 \cdot 2^n \cdot 2\pi \cdot f'(d_n + 2\pi)}{f'(d_{n+1})} < 2^{n+3} \pi \frac{f'(d_n + 2\pi)}{[f'(d_{n+1})]^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{4^n},$$

т. е. последовательность непрерывных функций $F_n(x)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$. Отсюда следует существование и непрерывность предельной функции $F(x)$. Далее,

$$F_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} [1 + \cos f(d_1 + x)]\, dx > 2\pi - \left| \int_0^{2\pi} \cos f(d_1 + x)\, dx \right| > 4,$$

так как из доказательства следствия 2 леммы 8 и α_4) ясно, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos f(d_1 + x)\, dx \right| < \frac{2}{f'(d_1)} < 2.$$

Но для любого n

$$|F_1(2\pi) - F_n(2\pi)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |F_k(2\pi) - F_{k-1}(2\pi)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} < 1,$$

т. е.

$$F(2\pi) > 4 - 1 = 3,$$

чем доказано, что $F(x)$ не есть тождественная постоянная, так как $F(0) = 0$. Кроме того, $F(x)$ — монотонно неубывающая, так как $F_n(x)$ — монотонно возрастающие функции.

ЛЕММА 10. *При* $n < \frac{1}{2} f'(d_p)$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_p(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_{p-1}(x)\, dx + \frac{\theta}{2^p} \chi_1(|n|), \quad |\theta| < 1.$$

Доказательство.

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_p(x)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_{p-1}(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \cos nx \cos f(d_p + x)\, Q_{p-1}(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} \cos [nx + f(d_p + x)]\, Q_{p-1}(x)\, dx \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} \cos [nx - f(d_p + x)]\, Q_{p-1}(x)\, dx \right|.$$

Оба интеграла в правой части оцениваются одинаково, если заметить, что

$$\left| \frac{d}{dx} [nx \mp f(d_p + x)] \right| = f'(d_p + x) \mp |n| > \frac{1}{2} f'(d_p),$$

и воспользоваться следствием 2 и примечанием 1 к лемме 8:

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos [nx \mp f(d_p + x)]\, Q_{p-1}(x)\, dx \right| < \frac{4 \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} Q_{p-1}}{\frac{1}{2} f'(d_p)}.$$

Но, по лемме 5,

$$8 \frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{V}} Q_{p-1}}{f'(d_p)} < 8 \frac{2^{p-1} 2\pi f'(d_{p-1} + 2\pi)}{f'(d_p)} = \left[8\pi 2^p \frac{f'(d_{p-1} + 2\pi) \sqrt{f''(d_p)}}{f'(d_p)} \right] \frac{1}{\sqrt{f''(d_p)}}.$$

Сомножитель в квадратных скобках, в силу условия α_3), меньше 2^{-p}. Второй же сомножитель легко преобразовать, воспользовавшись формулой (1) и монотонностью $\chi_1(y)$:

$$\frac{1}{\sqrt{f''(d_p)}} = \chi_1(f'(d_p)) < \chi_1(|n|).$$

ЛЕММА 11. *Для любого отрезка* $\Delta \subset [0, 2\pi]$, *содержащего не менее одного нуля* $Q_{p-1}(x)$, *имеем:*

$$\int_{\Delta} Q_p(x)\,dx = \int_{\Delta} Q_{p-1}(x)\,dx + \frac{\theta}{4^p}\Delta, \quad |\theta| < 1.$$

Доказательство. По следствию 2 и примечанию 1 леммы 8 и в силу монотонности $f'(x)$,

$$\left|\int_{\Delta} Q_p(x)\,dx - \int_{\Delta} Q_{p-1}(x)\,dx\right| = \left|\int_{\Delta} \cos f(d_p - x)\, Q_{p-1}(x)\,dx\right| < \frac{4VQ_{p-1}}{f'(d_p)}.$$

Но, в силу леммы 5 и условий α_1) и α_4),

$$\frac{4VQ_{p-1}}{f'(d_p)} < 4\frac{2^p \Delta f'(d_{p-1} + 2\pi)}{f'(d_p)} < 2^{p+1}\frac{f'(d_{p-1} + 2\pi)}{[f'(d_p)]^{\frac{1}{3}}}\Delta < \frac{\Delta}{4^p},$$

чем утверждение леммы доказано.

Примечание. Если $\Delta > \frac{\pi}{f'(d_p)}$, то на этом отрезке существует корень $Q_p(x)$. Действительно, корни $1 + \cos f(d_p + x)$ являются и корнями $Q_p(x)$. Возьмем два таких соседних корня $\xi_1 < \xi_2$. Тогда

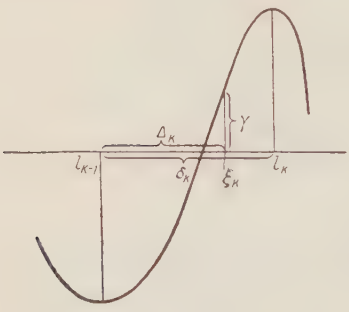
$$\pi = f(d_p + \xi_2) - f(d_p + \xi_1) = (\xi_2 - \xi_1) f'(d_p + \xi) \quad (\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2),$$

откуда

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{\pi}{f'(d_p + \xi)} < \frac{\pi}{f'(d_p)},$$

что доказывает наше утверждение.

Перенумеруем все точки экстремума функции $y = \cos f(x)$ по порядку слева направо. Так как $f(x)$ монотонно и неограниченно возрастает, то эти точки образуют бесконечную последовательность $l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \cdots$. Очевидно, что $l_0 = 0$ есть максимум, так как $f(0) = 0$, поэтому все экстремальные точки с четными номерами суть точки максимума, с нечетными — точки минимума.



Рассмотрим функцию $y = \cos f(x)$ на отрезке $[l_{k-1}, l_k]$. На каждом отрезке $[l_{k-1}, l_k]$ существует единственный нуль ξ^k функции $\cos f(x) - \gamma$ (γ — любое между -1 и $+1$). Введем обозначения:

$$\delta_k = l_{k+1} - l_k,$$

$$\Delta_k = \begin{cases} \xi_k - l_{k-1} & \text{при } k \text{ четном,} \\ l_k - \xi_k & \text{при } k \text{ нечетном,} \end{cases}$$

$$r_k = \frac{\Delta_k}{\delta_k}\,\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \arcsin\gamma};$$

на чертеже изображен случай четного k.

ЛЕММА 12. $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 1$.

Доказательство. Пусть $x = g(y)$ — функция, обратная к $f(x)$ (она существует в силу непрерывности и монотонности $f(x)$). Тогда

$$l_k = g(\pi k), \quad \xi_k = g\left(\pi k - \frac{\pi}{2} + (-1)^k \arcsin\gamma\right).$$

Так как для любого k

$$\Delta_k = \left| g\left(k\pi - \frac{\pi}{2} + (-1)^k \arcsin\gamma\right) - g\left(k\pi - \frac{\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

то

$$r_k = \left| \frac{g\left(k\pi - \frac{\pi}{2} + (-1)^k \arcsin\gamma\right) - g\left(k\pi - \frac{\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{2}\right)}{g(k\pi) - g((k-1)\pi)} \right| \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \arcsin\gamma}.$$

Применив к числителю и знаменателю выражения, стоящего под знаком абсолютной величины, теорему о конечном приращении, получаем:

$$\left| \frac{g'(k\pi + \theta)(-1)^k \left(\arcsin\gamma + \frac{\pi}{2}\right)}{g'(k\pi + \theta_1)\pi} \right| = \frac{g'(k\pi + \theta)}{g'(k\pi + \theta_1)} \frac{\arcsin\gamma + \frac{\pi}{2}}{\pi},$$

где θ и θ_1 заключены между 0 и π. Таким образом,

$$r_k = \frac{g'(k\pi + \theta)}{g'(k\pi + \theta_1)}.$$

Преобразуем полученное выражение, пользуясь соотношением между производными обратных функций:

$$r_k = \frac{g'(k\pi + \theta)}{g'(k\pi + \theta_1)} = \frac{f'(g(k\pi + \theta_1))}{f'(g(k\pi + \theta))} = 1 + \frac{f'(g(k\pi + \theta_1)) - f'(g(k\pi + \theta))}{f'(g(k\pi + \theta))} =$$

$$= 1 + \frac{(\theta_1 - \theta) f''(g(k\pi + \theta_2)) g'(k\pi + \theta_2)}{f'(g(k\pi + \theta))} = 1 + \frac{(\theta_1 - \theta) f''(g(k\pi + \theta_2))}{f'(g(k\pi + \theta)) f'(g(k\pi + \theta_2))},$$

где θ_2 находится между θ_1 и θ. Второе слагаемое стремится к нулю в силу леммы 3 ($a < \pi$, $\varepsilon = 1$).

ЛЕММА 13. *Пусть*

$$\cos f(a) = \cos f(b) = -1, \quad 0 < b - a < 2\pi,$$

и $E(a, b, c)$ обозначает множество тех точек x отрезка $[a, b]$, для которых $1 + \cos f(x) < c$. Тогда равномерно по b мера $\mu E(a, b, c)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\mu E(a, b, c)}{b - a} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(c - 1)}{\pi}.$$

При этом c считается постоянным, a b меняется вместе с a произвольно с соблюдением условий:

$$\cos f(a) = \cos f(b) = -1, \quad 0 < b - a < 2\pi.$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2 \ldots$ — корни функции $1 + \cos f(x)$ (т. е. l_k с нечетными номерами), а $b_1, b_2, \ldots$ — корни функции $1 - c + \cos f(x)$ (т. е. ξ_k при $\gamma = c - 1$). Ясно, что между любой парой соседних корней a_k и a_{k+1} всегда найдутся два корня b_j и b_{j+1}. Очевидно, что интересующее нас множество $E(a, b, c)$ распадается на непересекающиеся промежутки $[a_k, b_j)$ или $(\beta_{j+1}, a_{k+1}]$ (которые выше обозначались через Δ_k) и

$$\mu E(a, b, c) = \sum_{a \leqslant l_k \leqslant b} \mu\Delta_k,$$

где сумма берется по тем k, для которых $a \leqslant l_k \leqslant b$. Обозначим, как и раньше, через δ_k отрезок от нуля функции $1 + \cos f(x)$ до ее ближай-

шего максимума, содержащий промежуток Δ_k; тогда

$$\mu\Delta_k = r_k \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(c-1)}{\pi} \mu\delta_k.$$

Заметим, что при $a \to \infty$ $l_k \to \infty$, а значит, и $k \to \infty$, поэтому, в силу леммы 12, $r_k \to 1$ при $a \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем a настолько большим, чтобы для всех k таких, что $l_k > a$, выполнялось неравенство

$$|1 - r_k| < \varepsilon.$$

Тогда

$$(1-\varepsilon)(b-a) = (1-\varepsilon) \sum_{a \leqslant l_k \leqslant b} \mu\delta_k \leqslant \sum_{a \leqslant l_k \leqslant b} r_k \mu\delta_k \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{a \leqslant l_k \leqslant b} \mu\delta_k \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)(b-a),$$

т. е.

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{\sum_{a \leqslant l_k \leqslant b} r_k \mu\delta_k}{b-a} \leqslant 1 + \varepsilon,$$

откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 14. *На отрезке* $\left[\xi_{\frac{1}{2}n}, \xi_{\frac{3}{2}n}\right]$ *и только на нем*

$$\left|\frac{d}{dx}\left[f(x) - nx\right]\right| \leqslant \frac{1}{2}n, \quad n > 0.$$

Доказательство. В силу монотонного возрастания $f'(x)$ и определения ξ_y, имеем:

$$-\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n - n = f'\left(\xi_{\frac{1}{2}n}\right) - n \leqslant f'(x) - n \leqslant f'\left(\xi_{\frac{3}{2}n}\right) - n = \frac{3}{2}n - n = \frac{1}{2}n.$$

Для всех же остальных значений x $f'(x)$ или больше $\frac{3}{2}n$, или меньше $\frac{1}{2}n$.

Покажем, что функция $F(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы.

§ 3. Оценка порядка коэффициентов Фурье — Стильтьеса

Так как все $F_p(x)$ монотонны и ограничены, то для каждого n

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF(x) = \lim_{p \to \infty} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF_p(x).$$

Поэтому для каждого n существует такое p_n, что для всех $p > p_n$

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF(x) - \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF_p(x) \right| < \chi_1(|n|),$$

или

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF(x) \right| < \chi_1(|n|) + \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF_p(x) \right|.$$

Оценим интеграл правой части этого неравенства:

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} dF_p(x) = \int_0^{2\pi} \cos nx \, Q_p(x)\, dx - i \int_0^{2\pi} \sin nx \, Q_p(x)\, dx.$$

Оба полученных интеграла оцениваются одинаково, и оценка эта не зависит от знака n, поэтому будем считать далее $n>0$. Оценим первый интеграл. Ясно, что p всегда можно выбрать так, что $n \leqslant \frac{1}{2} f'(d_p)$. Выбрав такое p и применяя несколько раз лемму 10, мы придем, наконец, к равенству

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_p(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_k(x)\, dx + \frac{\theta}{2^k}\chi_1(n), \quad |\theta|<1,$$

где k таково, что

$$\frac{1}{2} f'(d_k) < n < \frac{1}{2} f'(d_{k+1}).$$

Оценим полученный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_k(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\,[1+\cos f(d_k+x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_{k-1}(x)\, dx + \int_0^{2\pi} \cos nx \cos f(d_k+x)\, Q_{k-1}(x)\, dx = I_1 + I_2.$$

Для оценки интеграла I_1 воспользуемся следствием 2 и примечанием 1 к лемме 8 и леммой 5:

$$\left|\int_0^{2\pi} \cos nx\, Q_{k-1}(x)\, dx\right| < \frac{4\overset{2\pi}{\underset{0}{V}} Q_{k-1}}{n} <$$

$$< \frac{4\cdot 2\pi\cdot 2^{k-1}\cdot f'(d_{k-1}+2\pi)}{n} = 4\pi 2^k \frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{n\chi_1(n)}\chi_1(n);$$

но множитель, стоящий перед $\chi_1(n)$, стремится к нулю при $n\to\infty$:

$$\frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{n\chi_1(n)} = \frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{n^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\chi_1(n)} < \frac{f'(d_{k-1}+2\pi)}{\left[\frac{1}{2}f'(d_k)\right]^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\chi_1(n)}.$$

Первый сомножитель меньше $2\cdot 16^{-k}$ в силу условия α_1, а второй — стремится к нулю по свойству 2 функции $\chi_1(y)$. Таким образом, интеграл $I_1 = o(\chi_1(n))$. Прежде чем оценивать интеграл I_2, несколько его преобразуем:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos f(d_k+x)\, Q_{k-1}(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos[nx + f(d_k+x)] Q_{k-1}(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos[nx - f(d_k+x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx = I_3 + I_4.$$

Интеграл I_3 оценивается так же, как и интеграл I_1, поскольку

$$\frac{d}{dx}[nx + f(d_k+x)] > n$$

на отрезке интегрирования. Обозначим

$$\xi_{\frac{1}{2}n} - d_k = \alpha, \quad \xi_{\frac{3}{2}n} - d_k = \beta, \quad \Delta = [\alpha, \beta], \quad D = [0, 2\pi].$$

Заметим еще раз, что отрезок Δ отличается тем, что только на нем

$$\frac{1}{2}n < f'(d_k + x) < \frac{3}{2}n,$$

а вне его $f'(d_k + x)$ или больше $\frac{3}{2}n$, или меньше $\frac{1}{2}n$ (лемма 14).

При оценке интеграла I_4 следует различать два случая: когда отрезки Δ и D пересекаются и когда они не пересекаются. В первом случае интеграл разбивают на два:

$$I_5 = \int_{\Delta} \cos[nx - f(d_k + x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx$$

и

$$I_6 = \int_{D \setminus \Delta} \cos[nx - f(d_k + x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx.$$

Основную трудность в оценке представляет интеграл I_5. По следствию 1 леммы 8, лемме 5 и свойству 4*, имеем:

$$|I_5| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} \cos[nx - f(d_k + x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx\right| < \frac{6K}{\sqrt{f''(d_k + \alpha)}} =$$

$$= 6\,\frac{Q_{k-1}(\beta) + VQ_{k-1}}{\sqrt{f''\left(\xi_{\frac{1}{2}n}\right)}} < 6\,[2^{k-1} + 2^{k-1}(\beta - \alpha)\, f'(d_{k-1} + \beta)]\, \chi_1\left(\frac{1}{2}n\right) <$$

$$< 6\,[2^{k-1} + 2^{k-1}\left(\xi_{\frac{3}{2}n} - \xi_{\frac{1}{2}n}\right) f'(d_{k-1} + 2\pi)]\, 2\chi_1(n) =$$

$$= 6\left[\frac{2^k}{\sqrt{\psi(n) + 1}} + \left(\xi_{\frac{3}{2}n} - \xi_{\frac{1}{2}n}\right)\frac{2^k f'(d_{k-1} + 2\pi)}{\sqrt{\psi(n) + 1}}\right]\chi(n);$$

множитель в квадратных скобках стремится к нулю при $n \to \infty$ по леммам 2 и 7 и так как $f'(d_{k-1} + 2\pi) > 1$.

Таким образом,

$$I_5 = o(\chi(n)).$$

Интеграл же I_6 и весь интеграл I_4 во втором случае оцениваются одинаково, так как на $D \setminus \Delta$

$$\left|\frac{d}{dx}[nx - f(d_k + x)]\right| \geqslant \frac{1}{2}n,$$

в силу леммы 14, и потому, в силу следствия 2 леммы 8 и примечания 1 к той же лемме, имеем:

$$\left|\int_{D \setminus \Delta} \cos[nx - f(d_k + x)]\, Q_{k-1}(x)\, dx\right| \leqslant 2\,\frac{4VQ_{k-1}}{\frac{1}{2}n} = o(\chi_1(n)),$$

как это было показано при оценке интеграла I_1.

Таким образом, для построенной функции $F(x)$ ее коэффициенты Фурье — Стильтьеса

$$c_n = o(\chi(|n|)).$$

§ 4. Сингулярность

В лемме 9 было показано, что $F(x)$ монотонна и не есть тождественно постоянная. Таким образом, достаточно показать, что $F'(x) = 0$ почти всюду. В силу монотонности $F(x)$,

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} = F'(x)$$

существует почти всюду. Поэтому достаточно показать, что для какой-нибудь последовательности $\Delta_k \to 0$ при $k \to \infty$ равенство

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F(x+\Delta_k) - F(x)}{\Delta_k} = 0$$

не выполняется только на множестве меры нуль.

Выберем Δ_k так, чтобы

$$16^k f'(d_k + 2\pi) < \frac{4^k}{\Delta^k} < f'(d_{k+1}), \tag{5}$$

что можно сделать в силу условия $\alpha_1)$, и преобразуем допредельное выражение:

$$\frac{F(x+\Delta_k) - F(x)}{\Delta_k} = \frac{F_p(x+\Delta_k) - F_p(x)}{\Delta_k} + \\ + \frac{F(x+\Delta_k) - F_p(x+\Delta_k)}{\Delta_k} + \frac{F_p(x) - F(x)}{\Delta_k}.$$

Так как $F_p(x)$ сходятся равномерно к $F(x)$ на $[0,2\pi]$ (лемма 9), то для каждого k существует такое P_k, что для всех $p \geqslant P_k$ и всех $x \in [0,2\pi]$

$$|F(x) - F_p(x)| < \Delta_k^2. \tag{6}$$

Обозначим $q = \max\{P_k, k\}$ и заметим, что $q \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда для всех $x \in [0,2\pi]$, в силу (6),

$$\frac{F(x+\Delta_k) - F(x)}{\Delta_k} = \frac{F_q(x+\Delta_k) - F_q(x)}{\Delta_k} + \theta\Delta_k, \quad |\theta| < 2.$$

Преобразуем отношение в правой части этого равенства:

$$\frac{F_q(x+\Delta_k) - F_q(x)}{\Delta_k} = \frac{1}{\Delta_k} \int_x^{x+\Delta_k} Q_q(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Если $q = k$, то, применяя к этому интегралу первую теорему о среднем, имеем:

$$\frac{1}{\Delta_k} \int_x^{x+\Delta_k} Q_k(\xi)\, d\xi = Q_k(x+\delta) = Q_k(x) + [Q_k(x+\delta) - Q_k(x)], \quad |\delta| < |\Delta_k|.$$

Последнее слагаемое в правой части при $k \to \infty$ стремится к нулю равномерно по x, так как по условию $\alpha_1)$ на последовательности $\{d_k\}$ и $\{\Delta_k\}$

$$Q_k(x+\delta) - Q(x)| = |Q_k'(\xi)\,\delta| < 2^k f'(d_k + 2\pi) \frac{4^k}{f'(d_{k+1})} < 8^k \frac{f'(d_k + 2\pi)}{[f'(d_{k+1})]^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{2^k}.$$

Если $q > k$, то к интегралу в правой части равенства (7) можно применять лемму 11 до тех пор, пока под интегралом не получим $Q_{k+1}(\xi)$ (леммой 11

можно пользоваться в силу примечания к ней и выбора $|\Delta_k|$), что даст остаток, меньший, чем

$$|\Delta_k|\left(\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+2}}+\cdots\right)<\frac{\Delta_k}{4^k},$$

и мы будем иметь:

$$\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k} Q_q(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k} Q_{k+1}(\xi)\,d\xi+\frac{\theta}{4^k},\quad |\theta|<1.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k} Q_{k+1}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k} Q_k(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k}\cos f(d_{k-1}+\xi)\,Q_k(\xi)\,d\xi.$$

Величина первого интеграла нам уже известна, оценим второй:

$$\left|\frac{1}{\Delta_k}\int_x^{x+\Delta_k}\cos f(d_{k+1}+\xi)\,Q_k(\xi)\,d\xi\right|<\frac{2K}{|\Delta_k|f'(d_{k+1})}=$$

$$=2\frac{|Q_k(x+\Delta_k)|+{}^{V}_{\Delta_k}Q_k}{|\Delta_k|f'(d_{k+1})}<2\frac{2^k+2^kf'(d_k+2\pi)|\Delta_k|}{|\Delta_k|f'(d_{k+1})}=$$

$$=2\left[\frac{2^k}{|\Delta_k|f'(d_{k+1})}+\frac{2^kf'(d_k+2\pi)}{f'(d_{k+1})}\right]<2\left[\frac{1}{2^k}+\frac{1}{8^k}\right],$$

по выбору последовательности $\{\Delta_k\}$ и условию α_1) на последовательность $\{d_k\}$. Таким образом,

$$\frac{F(x+\Delta_k)-F(x)}{\Delta_k}=Q_k(x)+\beta_k(x),$$

где $\beta_k(x)$ при $k\to\infty$ стремится к нулю равномерно по x на $[0,2\pi]$, т. е. почти всюду существует

$$F'(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{F(x+\Delta_k)-F(x)}{\Delta_k}=\lim_{k\to\infty}Q_k(x)=Q(x).$$

Покажем, что $Q(x)=0$ почти всюду.

В дальнейшем через $E(l_1\leqslant Q<l_2)$ будем обозначать множество точек x, для которых $l_1\leqslant Q(x)<l_2$, и через μE — меру множества E.

Нам необходимо показать, что

$$\mu E(Q>0)=0.$$

Но

$$\mu E(Q>0)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\mu E(2^{s-1}\leqslant Q<2^s).$$

Предположим, что для какого-нибудь s

$$\mu E(2^{s-1}\leqslant Q<2^s)>0.$$

Обозначим

$$\mathcal{E}_k=E(2^{s-2}<Q_k<2^s).$$

Так как

$$E(2^{s-1} \leqslant Q < 2^s) \subset \bigcup_n \bigcap_{k>n} \mathcal{E}_k,$$

то

$$\mu E(2^{s-1} \leqslant Q < 2^s) < \mu \bigcup_n \bigcap_{k>n} \mathcal{E}_k = \lim_{n\to\infty} \mu \bigcap_{k>n} \mathcal{E}_k,$$

и можно выбрать такое n_0, что

$$\mu \bigcap_{k>n_0} \mathcal{E}_k > \frac{1}{2}\, \mu E(2^{s-1} \leqslant Q < 2^s).$$

Пусть ξ — точка плотности множества $E_0 = \bigcap_{k>n_0} \mathcal{E}_k$. Положим

$$d = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{7}{8}}{\pi} > 0 \text{ и } \eta_1 = 0{,}1d > 0.$$

Для всех отрезков I достаточно малой длины и содержащих точку ξ

$$\mu I \setminus E_0 < \eta_1 \mu I, \tag{8}$$

по определению точки плотности. Из этих отрезков I выберем такой, что для некоторого $k_0 > n_0 + 1$

$$Q_{k_0-1}(x) < 2^{s+1} \text{ при } x \in I,$$

а концы I есть нули для функции $1 + \cos f(d_{k_0} + x)$. Это всегда можно сделать за счет уменьшения отрезка I, не нарушая соотношения (8). Действительно, положим

$$r = \frac{2^s}{2^{k_0} f'(d_{k_0-1} + 2\pi)}.$$

Отрезок $I_1 = [\xi - r, \xi + r]$, содержащий точку ξ и для всех достаточно больших k_0 удовлетворяющий соотношению (8), характерен еще и тем, что

1°. $Q_{k_0-1}(x) < 2^{s+1}$ для любого $x \in I_1$ и

2°. в каждой своей половине $[\xi - r, \xi]$ и $[\xi, \xi + r]$ он содержит не менее одного нуля функции $1 + \cos f(d_{k_0} + x)$. Для доказательства свойства 1° воспользуемся формулой Лагранжа:

$$Q_{k_0-1}(x) = Q_{k_0-1}(\xi) + (x - \xi)\, Q'_{k_0-1}(\bar{\xi}) \quad (\bar{\xi} \text{ между } \xi \text{ и } x)$$

и заметим, что

$$|(x - \xi)\, Q'_{k_0-1}(\bar{\xi})| < \frac{2^s}{2^{k_0} f'(d_{k_0-1} + 2\pi)}\, 2^{k_0-1} f'(d_{k_0-1} + 2\pi) < 2^s,$$

а $Q_{k_0-1}(\xi) < 2^s$, так как ξ — точка плотности множества E_0. Для доказательства 2° заметим, что расстояние между двумя соседними нулями функции $1 + \cos f(d_{k_0} + x)$, согласно примечанию к лемме 11, не превосходит $\frac{\pi}{f'(d_{k_0})}$, а

$$\frac{2^s}{2^{k_0} f'(d_{k_0-1} + 2\pi)} : \frac{\pi}{f'(d_{k_0})} = \frac{f'(d_{k_0})}{[f'(d_{k_0-1} + 2\pi)]^3}\, [f'(d_{k_0-1} + 2\pi)]^2 2^{s-k_0} >$$

$$> 16^{3k_0}\, [f'(d_{k_0-1} + 2\pi)]^2 2^{s-k_0} = 2^{s+11k_0}\, [f'(d_{k_0-1} + 2\pi)]^2,$$

что больше 2 при достаточно большом k_0. Отсюда ясно, что при достаточно большом k_0 внутри отрезка I_1 можно найти нужный нам отрезок I.

Тогда, в силу леммы 13, при $c = \frac{1}{8}$

$$\mu E\,(Q_{k_s} < 2^{s-2}) \cap I \geqslant \mu E\,(2^{s+1}\{1 + \cos f(d_{k_s} + x)\} < 2^{s-2}) \cap I =$$
$$= \mu E\left(1 + \cos f(d_{k_s} + x) < \frac{1}{8}\right) \cap I > \frac{1}{2}\, d\mu I \qquad (9)$$

для всех достаточно больших k_0. С другой стороны,

$$I \cap E\,(Q_{k_s} < 2^{s-2}) \subset I \setminus E_0.$$

Сравнивая (9) с (10) и учитывая (8), имеем:

$$\frac{1}{2}\, d < \eta = 0{,}1d.$$

Полученное противоречие доказывает, что для всех s

$$\mu E(2^{s-1} \leqslant Q < 2^s) = 0,$$

т. е.

$$\mu E\,(Q > 0) = 0.$$

Этим доказано, что $F'(x) = 0$ почти всюду.

Теорема полностью доказана.

Приношу глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, поставившему передо мной эту задачу и давшему ряд ценных указаний.

Поступило
30.IV.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Littlewood J. E., On the Fourier coefficients of functions of bounded variations, Quart. J. Math., 7 (1936), 219—226.

[2] Wiener N. and Winter A., Fourier — Stieltjes transforms and singular infinite convolutions, Am. J. Math., 60 (1938), 513—522.

[3] Schaeffer A. C., The Fourier — Stieltjes coefficients of a function of bounded variation, Am. J. Math., 60 (1939), 934—940.

[4] Ивашев-Мусатов О. С., О коэффициентах Фурье — Стильтьеса сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 82 (1952), 9—11.

[5] Ландау Э., Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, ИЛ, 1948.

[6] Меньшов Д. Е., Sur l'unicité du développement trigonométrique, C. R., 163 (1916), 433—436.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 197—206

С. Б. СТЕЧКИН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе исследуется, как связаны между собою наилучшие приближения непрерывной периодической функции $f(x)$ и сопряженной с ней функции $\tilde{f}(x)$.

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и $\tilde{f}(x)$ — тригонометрически сопряженная с ней функция. Обозначим через $E_n(f)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n.

В работе [4] Н. К. Бари поставила следующую задачу: что можно сказать о скорости, с которой стремятся к нулю наилучшие приближения $E_n(\tilde{f})$, если известно поведение наилучших приближений $E_n(f)$? Исследуя этот вопрос, Н. К. Бари получила такие результаты. Пусть функция $\varphi(\delta)$ определена для $0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi$ и удовлетворяет условиям:

$$\varphi(\delta) \uparrow, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\delta) > 0 \quad (0 < \delta \leqslant 2\pi); \tag{1}$$

тогда соотношения

$$E_n(f) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

влекут непрерывность функции $\tilde{f}(x)$ в том и только том случае, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

а соотношения

$$E_n(f) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ и } E_n(\tilde{f}) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

влекут одно другое в том и только том случае, если

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$

Эти результаты Н. К. Бари тесно примыкают к исследованиям С. М. Лозинского [9], в которых рассмотрены аналогичные задачи отно-

сительно связи между поведением наилучших приближений и модулей непрерывности одной и той же функции.

Здесь я рассмотрю тот же вопрос, что и Н. К. Бари, с несколько более общей точки зрения, а именно, в духе своих исследований [14].

2. Отметим несколько теорем теории приближения функций, которые понадобятся нам в дальнейшем.

(A). *Пусть r — натуральное число и $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π. Если*

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{3}$$

то

$$E_n(f) \leqslant \frac{MK_r}{(n+1)^r} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Если же

$$|\tilde{f}^{(r)}(x)| \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{6}$$

то

$$E_n(f) \leqslant \frac{M\tilde{K}_r}{(n+1)^r} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Неравенство (4) установлено Ж. Фаваром [15] в 1936 г. и было затем передоказано Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [1]. Неравенство (7) доказано Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [1] в 1937 г. и независимо от них Ж. Фаваром [16] [см. также [3]]. Точные значения констант K_r и $\tilde{K}_r$ в дальнейшем не используются.

(B). *Пусть r — натуральное число $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f) < \infty. \tag{9}$$

Тогда $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$ и

$$E_n(f^{(r)}) \leqslant C_1(r) \left\{ (n+1)^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

где константа $C_1(r)$ зависит только от r.

Первое утверждение установлено С. Н. Бернштейном [см. [5], [6]], а второе — автором [14].

(C). *Пусть $f(x)$ — функция с периодом 2π, имеющая непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{2K_r}{(n+1)^r} E_n(f^{(r)}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Если же $\tilde{f}(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f) \leqslant \frac{2\tilde{K}_r}{(n+1)^r} E_n(\tilde{f}^{(r)}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Аналогичное предложение см. в работе ([10]), стр. 119—120. Ради полноты приведем доказательство.

Доказательство. Пусть $f^{(r)}(x)$ непрерывна и тригонометрический полином

$$t_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu^* \cos \nu x + b_\nu^* \sin \nu x)$$

наименее уклоняется от этой функции среди всех тригонометрических полиномов порядка n, т. е.

$$\| f^{(r)} - t_n^* \| = \max_x | f^{(r)}(x) - t_n^*(x) | = E_n(f^{(r)}). \tag{13}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x)\, dx = 0,$$

то

$$a_0^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t_n^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{t_n^*(x) - f^{(r)}(x)\}\, dx,$$

откуда, в силу (13),

$$\left| \frac{a_0^*}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f^{(r)}(x) - t_n^*(x) |\, dx \leqslant E_n(f^{(r)}).$$

Поэтому, полагая

$$t_n^{(0)}(x) = t_n^*(x) - \frac{a_0^*}{2} = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^* \cos \nu x + b_\nu^* \sin \nu x),$$

будем иметь

$$\| f^{(r)} - t_n^{(0)} \| \leqslant \| f^{(r)} - t_n^* \| + \left| \frac{a_0^*}{2} \right| \leqslant 2E_n(f^{(r)}).$$

Таким образом, существует тригонометрический полином n без свободного члена, для которого

$$\| f^{(r)} - t_n^{(0)} \| \leqslant 2E_n(f^{(r)}). \tag{14}$$

Обозначим через $T_n(x)$ такой тригонометрический полином порядка n, что $T_n^{(r)}(x) = t_n^{(0)}(x)$, и положим $F(x) = f(x) - T_n(x)$. Тогда, в силу (14),

$$\max_x | F^{(r)}(x) | = \| f^{(r)} - t_n^{(0)} \| \leqslant 2E_n(f^{(r)}).$$

Отсюда, используя теорему (А), выводим, что

$$E_n(F) = E_n(f - T_n) \leqslant \frac{2K_r}{(n+1)^r} E_n(f^{(r)}).$$

Но функции $F(x)$ и $f(x)$ отличаются друг от друга на некоторый тригонометрический полином порядка n. Поэтому $E_n(f) = E_n(F)$, и, следовательно,

$$E_n(f) \leqslant \frac{2K_r}{(n+1)^r} E_n(f^{(r)}).$$

Неравенство (11) доказано. Совершенно аналогично доказывается и неравенство (12).

(D). *Пусть*

$$G_n > 0, \quad G_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G_n < \infty. \tag{15}$$

Тогда функция

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G_n \sin nx$$

удовлетворяет условиям:

$$E_n(f_0) \leqslant C_2 G_{n+1} \quad \text{и} \quad E_n(\tilde{f}_0) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

См. работу Н. К. Бари [4].

3. Переходя к изложению основного результата работы, отметим, что теоремы (B) и (C) в известном смысле противоположны друг другу. Первая из них дает оценку $E_n(f^{(r)})$ через наилучшие приближения $E_\nu(f)$, а вторая оценивает $E_n(f)$ через наилучшие приближения $E_n(f^{(r)})$ или $E_n(\tilde{f}^{(r)})$. Однако это соответствие — не полное. Здесь мы покажем, что для наилучших приближений $E_n(\tilde{f}^{(r)})$ можно получить оценку, совершенно аналогичную (10).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π, r — целое неотрицательное число и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f) < \infty. \tag{17}$$

Тогда сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $\tilde{f}^{(r)}(x)$ и

$$E_n(\tilde{f}^{(r)}) \leqslant C_3(r) \left\{ (n+1)^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

где константа $C_3(r)$ зависит только от r.

Доказательство * Обозначим через $\tilde{F}(x)$ примитивную для $\tilde{f}(x)$ и воспользуемся второй частью теоремы (C) для $r = 1$; тогда получим, что

$$E_n(\tilde{F}) \leqslant \frac{2\tilde{K}_1}{n+1} E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

откуда, в силу (17), следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r E_n(\tilde{F}) \leqslant 2\tilde{K}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n+1} E_n(f) \leqslant 2\tilde{K}_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f) < \infty.$$

Таким образом, к функции $\tilde{F}(x)$ применима теорема (B) с заменой r на $r+1$, которая показывает, что функция $\tilde{f}^{(r)}(x) = \tilde{F}^{(r+1)}(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$E_n(\tilde{f}^{(r)}) \leqslant C_1(r+1) \left\{ (n+1)^{r+1} E_n(\tilde{F}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r E_\nu(\tilde{F}) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Наконец, вновь используя оценку (19), выводим, что

* Здесь я приведу не свое первоначальное доказательство этой теоремы, а доказательство, построенное по образцу рассуждений Н. К. Бари [4], как более простое.

$$E_n(\tilde{f}^{(r)}) \leqslant 2\tilde{K}_1 C_1 (r+1)\left\{(n+1)^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu^r}{\nu+1} E_\nu(f)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_3(r)\left\{(n+1)^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и теорема доказана.

Отметим ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n(f) < \infty. \tag{20}$$

Тогда сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна и

$$E_n(\tilde{f}) \leqslant C_4\left\{E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f)\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Это — частный случай $r = 0$ теоремы 1. В качестве непосредственного следствия отсюда вытекает вспомогательная теорема 2 из работы Н. К. Бари [4]:

Следствие 2. *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и*

$$E_n(f) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{22}$$

где мажоранта $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда

$$E_n(\tilde{f}) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{23}$$

Действительно, в силу (21), (22) и (2),

$$E_n(\tilde{f}) \leqslant C_5\left\{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, неравенство (21) показывает, что последовательности наилучших приближений $\{E_n(f)\}$ и $\{E_n(\tilde{f})\}$ ведут себя во многом одинаково. Например, имеет место

Следствие 3. *Если $\alpha > -1$ и $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(f)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(\tilde{f})$ сходятся и расходятся одновременно.*

В силу симметрии, существующей между функциями $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$, достаточно установить, что сходимость первого из этих рядов влечет сходимость второго. Итак, пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(f) < \infty.$$

Тогда заведомо выполняется условие (20) и, следовательно, справедлива оценка (21). Пользуясь ею, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(\tilde{f}) \leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left\{E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f)\right\} =$$

$$= C_4\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(f) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f) \sum_{n=1}^{\nu-1} n^\alpha\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(f) + C_6 \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^\alpha E_\nu(f) \leqslant C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_n(f) < \infty.$$

Далее, сопоставляя теорему 1 с теоремой (B), выводим, что если r — натуральное число и выполняется условие (17), то как функция $f(x)$, так и сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ имеют непрерывные r-е производные. Отсюда вытекает еще одно любопытное

Следствие 4. *Пусть функция* $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *регулярна в круге* $|z|<1$ *и непрерывна в замкнутом круге* $|z|\leqslant 1$. *Положим* $f(x)=\operatorname{Re} g(e^{ix})$. *Если для некоторого натурального* r *выполняется условие* (17), *то функция* $g(z)$ *имеет в круге* $|z|\leqslant 1$ *непрерывную* r*-ю производную* $g^{(r)}(z)$.

В самом деле, $g^{(r)}(e^{ix})$ представляет собою линейную комбинацию с непрерывными коэффициентами функций $f^{(k)}(x)$ и $\tilde{f}^{(k)}(x)$ при $k\leqslant r$. Поэтому, в силу сделанного выше замечания, $g^{(r)}(e^{ix})$ непрерывна, а следовательно, и $g^{(r)}(z)$ непрерывна в круге $|z|\leqslant 1$.

Наконец, из теоремы 1 и известных «обратных теорем» теории приближения функций [см., напр., ([14]), теоремы 8 и 11] без труда вытекают оценки для модулей непрерывности сопряженной функции и ее производных через модули непрерывности исходной функции. В качестве примера мы выведем одну теорему А. Зигмунда ([8]).

Следствие 5. *Пусть* $\varphi(\delta)>0$, $\varphi(\delta)\uparrow$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)<\infty.$$

Если

$$\omega(\delta, f)=O(\varphi(\delta)), \tag{24}$$

то

$$\omega(\delta,\tilde{f})=O\left\{(N+1)^{-1}\sum_{n=1}^{N}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \tag{25}$$

где $N=[\delta^{-1}]$.

В самом деле, из теоремы Джексона и из (24) следует:

$$E_n(f)\leqslant C_8\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right)=O\left(\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Отсюда и из (21) выводим:

$$E_n(\tilde{f})=O\left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\right\}\quad(n=0,1,2,\ \ldots). \tag{26}$$

Отметим, что, как известно [см. ([14]), теорема 8], для любой непрерывной периодической функции $\psi(x)$

$$\omega(\delta,\psi)\leqslant\frac{C_9}{N+1}\sum_{n=0}^{N}E_n(\psi)\quad(N=[\delta^{-1}]).$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой (26), получаем:

$$\omega(\delta,\tilde{f})=O\left\{(N+1)^{-1}\sum_{n=0}^{N}\left(\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\right)\right\}=$$

$$=O\left\{(N+1)^{-1}\sum_{n=0}^{N}\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)+(N+1)^{-1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{\nu=n+1}^{N}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)+\right.\right.$$

$$+\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\Big)\Big\}=O\Big\{(N+1)^{-1}\sum_{n=1}^{N+1}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\Big\}+$$

$$+O\Big\{(N+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\sum_{n=0}^{\nu-1}1\Big\}+O\Big\{\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\Big\}=$$

$$=O\Big\{(N+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{N}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\Big\}+O\Big\{\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\Big\},$$

и оценка (25) установлена. Очевидно, что она эквивалентна оценке Зигмунда:

$$\omega(\delta,\tilde{f})\leqslant C_{10}\Big\{\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\Big\}.$$

4. Исследуем вопрос о точности оценки (18). Мы ограничимся рассмотрением важнейшего случая $r=0$ (см. следствие 1).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$G_n>0,\quad G_n\downarrow 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}G_n<\infty. \tag{27}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}[G]$ *класс непрерывных периодических функций* $f(x)$, *для которых*

$$E_n(f)\leqslant G_n\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{28}$$

и положим

$$E_n(\widetilde{\mathfrak{M}[G]})=\sup_{f\in\mathfrak{M}[G]}E_n(\tilde{f}).$$

Тогда

$$E_n(\widetilde{\mathfrak{M}[G]})\sim G_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}G_\nu. \tag{29}$$

Эта теорема показывает, что для всего класса $\mathfrak{M}[G]$ оценку (21) нельзя улучшить.

Доказательство. В силу следствия 1, для любой функции $f(x)\in\mathfrak{M}[G]$

$$E_n(\tilde{f})\leqslant C_4\Big(G_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}G_\nu\Big),$$

где C_4 — абсолютная константа. Отсюда вытекает, что и

$$E_n(\widetilde{\mathfrak{M}[G]})=\sup_{f\in\mathfrak{M}[G]}E_n(\tilde{f})\leqslant C_4\Big(G_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}G_\nu\Big). \tag{30}$$

Остается установить противоположное неравенство:

$$E_n(\widetilde{\mathfrak{M}[G]})\geqslant C_{11}\Big(G_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}G_\nu\Big), \tag{31}$$

где $C_{11} > 0$ — снова абсолютная константа. Для этого заметим предварительно, что так как $G_n \downarrow 0$, то

$$G_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu \leqslant G_n + \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu} G_\nu + \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \ln 2)\, G_n + \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu \leqslant C_{12}\left(G_n + \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right).$$

Поэтому достаточно показать, что

$$E_n(\widetilde{\mathfrak{M}[G]}) \geqslant C_{13}\left(G_n + \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right). \tag{32}$$

Это неравенство означает следующее: существует константа $C_{13} > 0$ такая, что для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ найдется функция $f_m(x) \in \mathfrak{M}[G]$, для которой

$$E_m(\tilde{f}_m) \geqslant C_{13}\left(G_m + \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right). \tag{33}$$

Для доказательства этого неравенства зафиксируем номер m и рассмотрим два случая.

Первый случай:

$$G_m \geqslant \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu. \tag{34}$$

Положим $f_m(x) = G_m \cos(m+1)x$. Очевидно, $f_m(x) \in \mathfrak{M}[G]$ и

$$E_m(\tilde{f}_m) = E_m(G_m \sin(m+1)x) = G_m,$$

откуда, в силу (34), имеем:

$$E_m(\tilde{f}_m) \geqslant \frac{1}{2}\left(G_m + \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right) \geqslant C_{13}\left(G_m + \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right). \tag{35}$$

Второй случай:

$$G_m \leqslant \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu. \tag{36}$$

Положим $f_m(x) = \frac{1}{C_2} f_0(x)$, где $f_0(x)$ — функция, фигурирующая в теореме (D). Тогда, согласно (16), $f_m(x) \in \mathfrak{M}[G]$ и

$$E_m(\tilde{f}_m) \geqslant \frac{1}{4C_2} \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu,$$

откуда, в силу (36), получаем:

$$E_m(\tilde{f}_m) \geqslant \frac{1}{8C_2}\left(G_m + \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right) \geqslant C_{13}\left(G_m + \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right). \tag{37}$$

Объединяя оценки (30), (35) и (37), убеждаемся, что теорема полностью доказана.

Возможно, что эта теорема допускает некоторое усиление. Точнее, возможно, что всегда существует такая функция $f_1(x) \in \mathfrak{M}[G]$, не зависящая от n, для которой одновременно выполняются все неравенства

$$E_n(\tilde{f}_1) \geqslant C_{14}\left(G_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{38}$$

Мы умеем строить такую функцию лишь при некоторых дополнительных ограничениях на поведение последовательности $\{G_n\}$. Именно, покажем, что если последовательность $\{G_n\}$ удовлетворяет условию

$$G_n = O\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right), \tag{39}$$

то существует функция $f_1(x)$, для которой выполняются неравенства (38).

Отметим, что условие (39) в известном смысле противоположно условию Н. К. Бари (2), которое в наших обозначениях имеет вид:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu = O(G_n).$$

Как показывают простейшие примеры, эти условия несравнимы.

Положим

$$Q_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu$$

и докажем, что при выполнении условия (39)

$$Q_{n+1} = O(Q_{2n+1}). \tag{40}$$

В самом деле, если $G_n \leqslant AQ_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то имеем:

$$Q_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu = \frac{1}{n} G_n + Q_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{A}{n}\right) Q_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

от

$$Q_{n+1} \leqslant \prod_{k=n+1}^{2n} \left(1 + \frac{A}{k}\right) Q_{2n+1} \leqslant \left(1 + \frac{A}{n+1}\right)^n Q_{2n+1} < e^A Q_{2n+1}.$$

Из оценок (39) и (40) вытекает, что

$$G_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu = G_n + Q_{n+1} = O(Q_{n+1}) = O(Q_{2n+1}). \tag{41}$$

В силу этого, полагая, как и выше, $f_1(x) = \frac{1}{C_2} f_0(x)$, будем иметь: $f_1(x) \in \mathfrak{M}[G]$ и

$$E_n(\tilde{f}_1) \geqslant C_{15} Q_{2n+1} \geqslant C_{14}\left(G_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} G_\nu\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

5. В заключение сделаем несколько замечаний относительно аналогичных задач в других метриках.

Как известно, теоремы (A) и (B) остаются справедливыми для пространства L. Относительно теоремы (A) см. [2] и [11]; что же касается

теоремы (B), то ее доказательство не меняется. Отсюда вытекает, что теорема (C) и все результаты п. 3 без изменений формулировок и доказательств переносятся на приближения в метрике L. Однако приведенный в п. 4 пример теряет свою силу, и вопрос о справедливости в этом случае теоремы 2 остается открытым.

Аналогичные задачи в метрике L^p, где $p > 1$, не представляют интереса. Именно, согласно теореме М. Рисса ([12]), ([13]) [см. также ([7]), § 7.21],

$$\|\tilde{f}\|_{L^p} \leqslant A_p \|f\|_{L^p} \quad (p > 1).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$E_n(\tilde{f})_{L^p} \leqslant A_p E_n(f)_{L^p} \tag{42}$$

и для любого натурального k

$$\omega_k(\delta, \tilde{f})_{L^p} \leqslant A_p \omega_k(\delta, f)_{L^p}. \tag{43}$$

Эти неравенства показывают, что в пространстве L^p $(p > 1)$ наилучшие приближения $E_n(f)_{L^p}$ и $E_n(\tilde{f})_{L^p}$, а также модули непрерывности $\omega_k(\delta, f)_{L^p}$ и $\omega_k(\delta, \tilde{f})_{L^p}$, всегда имеют одинаковый порядок убывания.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5.VII.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. и Крейн М., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. Доклады Ак. наук СССР, 15 (1937), 107—112.
[2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Харьков, 1940.
[3] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М.— Л., 1947.
[4] Бари Н. К., О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19(1955), 285—302.
[5] Бернштейн С., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. матем. об-ва (2), 13 (1912), 49—144.
[6] Бернштейн С. Н., Конструктивная теория функций, Собрание сочинений, т. 1 (1905—1930), Ак. наук СССР, 1952.
[7] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.
[8] Zygmund A., O module ciągłości sumy szeregu sprzężonego z szeregiem Fouriera, Prace Mat.-fiz., 33 (1924), 125—132.
[9] Лозинский С. М., Обращение теорем Джексона, Доклады Ак. наук СССР, 83 (1952), 645—647.
[10] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.
[11] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.
[12] Riesz M., Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, Comptes rendus Acad. Sci., 178 (1924), 1464—1467.
[13] Riesz M., Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr., 27 (1927), 218—244.
[14] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.
[15] Favard J., Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques, Comptes rendus Acad. Sci., 203 (1936), 1122—1124.
[16] Favard J., Sur les meilleures procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. de Sc. Math. (2), 61, p. 1 (1937), 209—224, 243—256.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 207—240

Ф. Д. ГАХОВ и Ю. М. КРИКУНОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОБРАТНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

По заданным на контуре области значениям аналитической или псевдоаналитической функции выводятся соотношения между числом критических точек (нулей, полюсов, логарифмических точек, прообразов точек ветвления) соответствующих функций в области. Даются приложения полученных соотношений к решению обратных краевых задач аналитических функций.

§ 1. Введение

В настоящей работе речь идет об определении числа критических точек аналитической и, более обще, псевдоаналитической функции по заданным ее особенностям в области и заданным ее контурным значениям.

В классической теории функций комплексного переменного такого рода соотношения дает принцип аргумента. В последние десятилетия возникла новая теория, опирающаяся на топологические методы и охватывающая более широкий класс функций — псевдоаналитических, возникающих из аналитических, если над аргументами последних произвести некоторое гомеоморфное преобразование, сохраняющее ориентацию. Сводное изложение этой теории имеется в вышедшей недавно в русском переводе монографии М. Морса (1), результатами которой мы будем широко пользоваться.

В настоящей работе результаты монографии (1) обобщаются и уточняются в различных направлениях. Первое обобщение касается характера областей, в которых определена функция; у М. Морса допускаются лишь конечные области, здесь все соотношения обобщаются на случай бесконечной области. Второе обобщение относится к вопросу о характере контурных значений исследуемых функций. У М. Морса допускается конечное число экстремальных значений (условие А) или же на всей кривой функция сохраняет постоянное значение; у нас допускается конечное число дуг, на которых функция может принимать постоянные значения. Наиболее серьезные обобщения касаются вопроса о допустимых особенностях. В книге (1) проводится исследование для двух случаев: 1) для гармонических функций, где допустимыми особенностями являются логарифмические, 2) для аналитических функций, где допускаются полюсы. Случай наличия полярной и логарифмической особенности не допускается.

У нас исследуются случаи одновременного наличия логарифмических и полярных особенностей, причем они могут встречаться как в раздельных, так и в совпадающих точках. Последний случай представляет наибольшие трудности. Кроме того, исследуется случай наличия логарифмической особенности на самом контуре.

Уточнение касается двух вопросов: 1) способа подсчета граничного индекса, 2) исследования кратности точек нулевого градиента и кратности так называемого неполного разветвленного элемента.

По первому вопросу у Морса имеется полная ясность, когда он ведет исследование по самой аналитической функции. Там граничный индекс выражается определенным образом через граничные значения исследуемой аналитической функции (через так называемый порядок и угловой порядок). Совсем иначе обстоит дело, когда исследование ведется по гармонической функции. Привзнос к граничному индексу дают точки входящего экстремума. Число экстремальных точек определяется по граничным значениям исследуемой гармонической функции, но характер экстремума (входящий или выходящий), если ограничиваться только самой гармонической функцией, может быть определен только в том случае, если она известна во всей области. Фактически из этого и исходит Морс, когда рассматривает примеры. Но тогда соотношения приобретают тривиальный характер проверки известных соотношений или же дают новый способ подсчета числа нулей производной известной функции. Привлекая, наряду с исследуемой гармонической функцией, ее сопряженную, мы даем способ подсчета граничного индекса этой функции по граничным значениям соответствующей аналитической функции.

Уточнение, относящееся ко второму вопросу, носит более глубокий характер и является, по нашему мнению, одним из наиболее существенных результатов настоящего исследования. Хотя Морс при выводе своих соотношений и не исключает точки нулевого градиента исследуемой функции на контуре, но так как он не дает никакого исследования их и в дальнейшем о них совершенно не упоминает, то дело фактически обстоит так, как будто точки нулевого градиента вовсе исключаются из рассмотрения. В нашей работе дается полное исследование этого случая. Для подсчета кратности неполного разветвленного элемента у Морса дается формула для одного простейшего частного случая. Здесь дается подробное исследование этого вопроса.

В заключение дается приложение полученных результатов к теории обратных краевых задач аналитических функций. Как известно [см (3), (4)], эти задачи заключаются в отыскании области при условии, что заданное произвольное комплексное выражение есть краевое значение функции, аналитической в искомой области, за исключением отдельных фиксированных точек, где она имеет особенности заданного характера. Дело идет об отыскании числа критических точек искомой функции в искомой области. Своеобразие задачи заключается, как видно из ее постановки, в том, что здесь не известна сама область определения функции. Однако последнее обстоятельство не оказывает влияния на метод исследования, и выведенная из топологических методов теория с успехом применяется к этой своеобразной задаче.

Следует заметить, что хотя последние приложения, где речь идет лишь об аналитических функциях, охватывают лишь частный случай топологической теории, приложимой к более обширному классу псевдоаналитических функций, однако они сыграли основную роль в развитой здесь теории. Потребности этих приложений служили руководящей нитью для сделанного в настоящей работе расширения приложимости топологических методов. При выборе направления обобщений учитывались потребности обратных краевых задач, исходя из уже выдвинутых в этой теории вопросов.

§ 2. Основные понятия и теоремы

В настоящем параграфе приводятся необходимые нам понятия и теоремы из монографии [1].

Наряду с мероморфными и гармоническими функциями рассматриваются их обобщения — псевдоаналитические и псевдогармонические функции.

Определение псевдоаналитической функции. Пусть $F(t)$ — непостоянная аналитическая функция, определенная в некоторой окрестности N точки t_0. Подвергнем N гомеоморфному и сохраняющему ориентацию преобразованию $t = \Phi(z_0)$ $(t_0 = \Phi(z_0))$, отображающему N в некоторую окрестность N_1 точки z_0. Сложную функцию

$$F[\Phi(z)] = f(z) \tag{2.1}$$

назовем псевдоаналитической *. Говорят, что псевдоаналитическая функция, определенная в N_1, реализует внутреннее отображение $w = f(z)$ окрестности N_1 точки z_0. Функция $w = f(z)$, определенная в области G, псевдоаналитична в этой области, если она псевдоаналитична в окрестности каждой точки G.

Пусть $F(t)$ аналитична в некоторой окрестности точки t_0 всюду, кроме самой t_0, где она имеет полюс. Говорят, что функция $f(z)$, определенная соотношением (2.1), имеет полюс в точке z_0. Аналогичным способом определяются прообразы точек ветвления функции $f(z)$. Кратности полюсов, нулей и прообразов точек ветвления псевдоаналитической функции $w = f(z)$ определяются как кратности полюсов, нулей и прообразов точек ветвления порождающей мероморфной функции $F(t)$. Очевидно, что можно рассматривать более общие псевдоаналитические функции, если в качестве порождающих функций брать не только мероморфные, но и другие аналитические функции, например, многозначные функции с логарифмическими точками разветвления.

Определение псевдогармонических функций. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, отличная от тождественной постоянной в некоторой окрестности N точки (x_0, y_0). Пусть, далее, точки N подвергаются произвольному, сохраняющему ориентацию гомеоморфизму T,

---

* Термин «псевдоаналитическая» функция введен нами. Морс и в книге [1] и в работе [2] говорит о таких функциях, как о функциях, производящих внутренние отображения.

который преобразует окрестность N в некоторую другую окрестность N' точки (x_0', y_0'), причем точке (x, y) из N соответствует точка $(x', y') \in N'$. Удобно предположить, что точка (x_0, y_0) соответствует при этом самой себе, так что $x_0' = x$, $y_0' = y_0$.

Положим

$$u(x, y) = U(x', y'). \tag{2.2}$$

Функция $U(x', y)$ называется псевдогармонической в N'.

Если $u(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) логарифмический полюс, т. е.

$$u(x, y) = k \ln |z - z_0| + \omega(x, y),$$

где k — действительное число, а $\omega(x, y)$ гармонична в окрестности (x_0, y_0), то считается, что соотношение (2.2) определяет псевдогармоническую функцию с логарифмическим полюсом в точке (x_0, y_0).

Если $w = f(z)$ — псевдоаналитическая функция, то функции $U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $V(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ являются, очевидно, псевдогармоническими во всех точках, отличных от полюсов $f(z)$.

Все эти функции рассматриваются в конечной области G, ограниченной ν жордановыми кривыми

$$(B_1, B_2, \ldots, B_\nu) = (B).$$

Перейдем к определению критических топологических точек псевдогармонической функции $U(x, y)$.

Пусть $U(x, y)$ псевдогармонична в окрестности точки $(x_0, y_0) \in G$. Множество точек, удовлетворяющих в окрестности (x_0, y_0) уравнению

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = 0,$$

называется линией уровня этой функции, проходящей через точку (x_0, y_0). Говорят, что точка области G расположена ниже (выше) уровня $c = U(x_0, y_0)$ относительно псевдогармонической функции U, если в этой точке $U < c$ $(U > c)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1 (2.1.а). * *Если $U(x, y)$ — непостоянная псевдогармоническая в точке (x_0, y_0) функция, то существует такой гомеоморфизм достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) на круг, при котором (x_0, y_0) соответствует центру круга, а множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = 0, \tag{2.3}$$

соответствует совокупности $2m$ радиусов круга, ограничивающих секторы с центральными углами $\frac{\pi}{m}$. При переходе переменной точки (x, y) через прообраз каждого такого радиуса разность (2.3) *меняет знак.*

Эта теорема дает каноническое представление линий уровня $U = c$ в окрестности точки (x_0, y_0), где $U(x, y)$ псевдогармонична. Окрестность

* Нумерация в скобках соответствует нумерации в книге [1].

N точки (x_0, y_0) теоремы 2.1 называется канонической окрестностью. Каждая открытая связная подобласть N, ограниченная двумя соседними дугами уровня c и отрезком границы N, называется сектором. Имеется m секторов, расположенных ниже c, и m секторов, расположенных выше c. При $m = 1$ точка (x_0, y_0) называется обыкновенной, при $m > 1$ — внутренней седловой точкой кратности $m - 1$.

Если $f(z)$ — функция, аналитическая в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то эта точка будет внутренней седловой точкой гармонической функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (или $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) тогда и только тогда, когда она есть нуль $f'(z)$; при этом кратность седловой точки равна кратности нуля $f'(z)$.

Если функция, определенная значениями U на (B), непрерывна и имеет не более, чем конечное число точек относительного экстремума, между которыми она изменяется строго монотонно (граничные условия А), то каноническое представление линий уровня в окрестности граничной точки дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2 (6.1). *Пусть z_0 — точка (B), не являющаяся изолированной среди точек ее уровня c. Тогда существует каноническая относительная окрестность N точки z_0, замыкание которой допускает гомеоморфное отображение на полукруг H такое, что точка z_0 соответствует центру 0 полукруга, пересечение $\overline{N}$ и (B) — диаметру и совокупность точек N, лежащих на уровне c, — совокупности n радиусов $(n > 0)$. Прообразы этих радиусов делят N на $n + 1$ областей (секторов), в которых знаки $U - c$ перемежаются. Точки радиусов, отличные от 0, соответствуют обыкновенным точкам множества $U = c$.*

Точка z_0 границы (B) называется обыкновенной, если в N имеется не более одного сектора, расположенного ниже c. Если же число этих секторов равно $n > 1$, то z_0 называется граничной седловой точкой кратности $n - 1$.

ТЕОРЕМА 2.3 (7.2). *Пусть z_0 — точка относительного экстремума, принадлежащая (B). Существует каноническая окрестность N точки z_0, замыкание которой допускает такое гомеоморфное отображение на полукруг, при котором z_0 соответствует центру полукруга, а граница N, расположенная на (B), — его диаметру; граница N, расположенная в G, находится на некотором уровне $c_1 \neq c$, тогда как все точки N, за исключением z_0, лежат между уровнями c_1 и c.*

К топологическим критическим точкам относятся: логарифмические полюсы, внутренние и граничные седловые точки и точки относительного минимума. При граничных условиях А число топологических критических точек конечно.

Основной теоремой при граничных условиях А является

ТЕОРЕМА 2.4 (12.1). *Пусть U — функция, псевдогармоническая всюду в конечной области G, ограниченной ν жордановыми кривыми, за исключением логарифмических полюсов, и непрерывная в граничных точках (B) области G. Если функция, определенная значениями U на (B), имеет не более чем конечное число точек относительного экстремума, то*

$$M + m - S - s = 2 - \nu, \tag{2.4}$$

где M есть число логарифмических полюсов U в G, m — число точек относительного минимума U, а S и s — соответственно числа внутренних и граничных седловых точек U, каждая из которых считается с ее кратностью.

В монографии ([1]) рассматривается также видоизменение этой теоремы при других граничных условиях. Помимо граничного условия A, здесь рассматривается случай постоянных граничных значений и граничные условия B и C. Граничные условия B требуют, чтобы в (x, y)-плоскости существовала окрестность N границы (B), в которой функция U может быть доопределена так, чтобы она имела непрерывную производную и была простой; при этом граничные кривые предполагаются регулярными.

Граничные условия C требуют, чтобы удовлетворялись граничные условия A и B.

При всех указанных граничных условиях справедливо соотношение

$$M - S = 2 - \nu + I, \tag{2.5}$$

которое является видоизменением соотношения (2.4) теоремы 2.4. Величина I называется граничным индексом; она зависит только от поведения функции U на границе и определяется при различных граничных условиях различными способами; при этом граничный индекс I всей границы (B) понимается как сумма граничных индексов I_i по всем граничным кривым B_i. Величину I_i называют привзносом граничного индекса от B_i. Ниже приводятся способы определения граничного индекса I_i при некоторых граничных условиях, которые потребуются нам в дальнейшем.

При граничном условии A привзнос

$$I_i = s_i - m_i,$$

где m_i — число точек минимума U на B_i и s_i — число седловых точек U на B_i.

При граничном условии C (частный случай граничного условия A) числа m_i и s_i могут быть подсчитаны соответственно как числа входящих точек минимума и максимума граничной функции. *

Если на B_i функция U равна постоянному экстремальному значению, то привзнос граничного индекса от B_i равен нулю.

Для псевдоаналитических функций $w = f(z)$ в книге ([1]) выводятся соотношения между полюсами, нулями и прообразами точек ветвления — так называемые теоремы о порядках [см. ([1]), теоремы 19.1, 20.1 и 24.2].

Доказательство этих теорем опирается на соотношение (2.5) и следующую лемму.

ЛЕММА 2.1 (19.1). *Пусть $U(x, y)$ — псевдогармоническая функция, определенная соотношением $U(x, y) = \ln|f(z)|$; $n(0)$ и $n(\infty)$ — соответственно число нулей и полюсов $f(z)$ в G; μ — число прообразов точек ветвления $f(z)$ в G; M — число логарифмических полюсов U в G; S — число*

* Точка границы называется точкой входа (точкой выхода), если градиент функции U в этой точке входит в область G (выходит из G).

седловых точек U в G. Тогда

$$n(0) + n(\infty) - \mu = M - S. \tag{2.6}$$

Как уже указывалось, область G везде предполагалась конечной. В следующем параграфе мы освободимся от этого ограничения.

§ 3. Случай бесконечной области

Пусть D — бесконечная область, ограниченная ν жордановыми кривыми

$$(C_1, C_2, \ldots, C_\nu) = (C).$$

Определим, прежде всего, поведение функций в бесконечно удаленной точке.

Любую функцию $u(x, y)$, гармоническую в окрестности N конечной точки $z_0 = x_0 + iy_0$, можно рассматривать как вещественную часть функции $\Phi(z)$, аналитической в N. Если $u(x, y)$ имеет в точке z_0 логарифмический полюс, т. е. представляется в виде

$$k \ln |z - z_0| + \omega(x, y),$$

где $\omega(x, y)$ — гармоническая в N функция, то $u(x, y)$ можно рассматривать как вещественную часть функции $\Phi(z)$ с логарифмической точкой разветвления $z = z_0$.

Очевидно, что таким же способом можно определить функцию, гармоническую в окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение 1. Пусть $\Phi(z)$ — функция, аналитическая в окрестности N точки $z = \infty$, за исключением, быть может, самой точки $z = \infty$, где допускается логарифмическая точка разветвления такая, что главная часть $\Phi(z)$ имеет вид $k \ln z$ (k вещественно). Однозначную функцию $u(x, y)$, допускающую в N представление

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z), \tag{3.1}$$

будем называть гармонической в этой окрестности. При этом $u(x, y)$ гармонична и в самой точке $z = \infty$, если в ней аналитична функция $\Phi(z)$; в противном случае $u(x, y)$ имеет в точке $z = \infty$ логарифмический полюс.

Определение 2. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в точке $z = \infty$. Если $z = \infty$ является прообразом точки ветвления функции $\Phi(z)$, то она называется внутренней седловой точкой функции $u(x, y)$; при этом кратность седловой точки определяется как кратность прообраза точки ветвления. Если $\Phi(z)$ однолистна в точке $z = \infty$, то эта точка называется обыкновенной точкой функции $u(x, y)$.

Наряду с функциями, гармоническими в бесконечной области D, мы будем рассматривать и их обобщение — псевдогармонические функции; они определяются так же, как и в § 2, с той лишь разницей, что точка (x_0, y_0) может быть как конечной, так и бесконечно удаленной.

Приняв эти определения, легко распространить на случай бесконечной области результаты глав I и II монографии [1]. Для этого достаточно доказать справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть U — функция, псевдогармоническая всюду в бесконечной области D, ограниченной ν жордановыми кривыми, за исключением логарифмических полюсов, и непрерывная в граничных точках (C) области D. Тогда*

$$M - S = 2 - \nu + I, \tag{3.2}$$

где M — число логарифмических полюсов U в D, S — число внутренних седловых точек U в D, каждая из которых считается с ее кратностью, а I — граничный индекс функции U относительно (C), который определяется так же, как и в монографии [1].

Пусть N — окрестность бесконечно удаленной точки, принадлежащая D и не содержащая критических точек функции U, отличных от $z = \infty$. Обозначим границу этой окрестности через γ. Пусть D_1 — область, полученная из D удалением замыкания $\bar{N}$ окрестности N, а $U_1(x, y)$ — функция, определенная значениями U в $\bar{D}_1$. Применяя введенные нами обозначения, запишем для функции $U(x, y)$, заданной в конечной области, основное соотношение (2.5):

$$M_1 - S_1 = 2 - \nu_1 + I_1. \tag{3.3}$$

Для доказательства теоремы выразим числа M_1, S_1, ν_1 и I_1, через M, S, ν и I. Прежде всего перепишем (3.3) в следующей форме:

$$M_1 - S_1 = 1 - \nu + I + I_\gamma, \tag{3.4}$$

где I_γ — привзнос граничного индекса I_1 от кривой γ. Дальнейшее доказательство разбивается на два подслучая.

I. Точка $z = \infty$ является логарифмическим полюсом функции U, т. е.

$$M_1 = M - 1, \quad S_1 = S. \tag{3.5}$$

Окрестности $z = \infty$ можно отнести координаты (x_1, y_1), в которых функция U представляется в виде

$$k \ln |z_1| + k \operatorname{Re}[F(z_1)],$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$, k — действительное число, а $F(z_1)$ — функция, аналитическая в точке $z_1 = \infty$. Производя далее взаимно однозначное и конформное преобразование

$$t = z_1 e^{F(z_1)}$$

окрестности $z_1 = \infty$, получим для U представление

$$k \ln |t|,$$

откуда заключаем, что ее линиями уровня в плоскости (t) являются окружности $|t| = \text{const}$. Если взять прообраз одной из этих окружностей в качестве границы γ окрестности N, то на γ функция U будет равна постоянному экстремальному значению и, следовательно, привзнос граничного индекса от γ будет равен нулю:

$$I_\gamma = 0. \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.4), (3.5) и (3.6) получаем (3.2).

II. Точка $z=\infty$ является внутренней седловой точкой кратности $n-1$ (для $n=1$ $z=\infty$ — обыкновенная точка), т. е.

$$M_1 = M, \quad S_1 = S - n + 1. \tag{3.7}$$

Окрестности точки $z=\infty$ можно отнести координаты (x_1, y_1), в которых функция U представляется в виде

$$\alpha + \operatorname{Re}\left[\frac{F(z_1)}{z_1^n}\right],$$

где α — действительное число, а $F(z_1)$ — функция, аналитическая в точке $z_1=\infty$, причем $F(\infty)\neq 0$. Если произвести взаимно однозначное и конформное преобразование

$$t = \frac{z_1}{\sqrt[n]{F(z_1)}}$$

окрестности $z_1=\infty$, где $\sqrt[n]{F}(z_1)$ — любая непрерывная однозначная ветвь корня n-й степени из $F(z_1)$, то функция U в достаточно малой окрестности точки $t=\infty$ окажется представленной в виде

$$\alpha + \operatorname{Re} t^{-n},$$

или в виде

$$\alpha + r^{-n}\cos n\theta,$$

где (r, θ) — полярные координаты плоскости (t). Для того чтобы вычислить привзнос I_γ, выберем в качестве γ прообраз окружности $|t|=R$ (где R достаточно велико). Из соотношений

$$\frac{\partial U(R, \theta)}{\partial \theta} = -nR^{-n}\sin n\theta,$$

$$\frac{\partial^2 U(R, \theta)}{\partial \theta^2} = -n^2 R^{-n}\cos n\theta,$$

$$\frac{\partial U(R, \theta)}{\partial r} = -nR^{-n-1}\cos n\theta$$

заключаем, что на окружности $|t|=R$ функция U имеет n точек входящего максимума и n точек выходящего минимума (относительно области $|t|<R$), откуда следует, что

$$I_\gamma = n. \tag{3.8}$$

Из (3.4), (3.7) и (3.8) получаем (3.2). Теорема доказана.

Совершенно так же, как в книге [1], можно определить в бесконечной области D и псевдоаналитические функции. Принимая во внимание определения настоящего параграфа, можно убедиться, что для таких функций справедливо соотношение (2.6) леммы 2.1, а следовательно, и теоремы о порядках [см. [1], теоремы 19.1, 20.1 и 24.2]. *

В дальнейшем будем считать, что область задания функций может быть как конечной, так и бесконечной. Мы будем обозначать эту область и ее границы так же, как и в § 2.

* Ибо, как указывалось в § 2, доказательство этих теорем опирается на соотношения (2.5) и (2.6).

§ 4. Наличие логарифмических и полярных особенностей

В настоящем параграфе мы будем рассматривать аналитические функции, имеющие помимо полюсов другие изолированные точки.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области G, за исключением конечного числа полюсов и логарифмических точек разветвления специального типа; именно, если $z = a$ — указанная точка разветвления, то в ее окрестности имеет место представление

$$f(z) = Ai \ln (z - a) + F(z),$$

если $z = a$ — конечная точка, или

$$f(z) = Ai \ln z + F(z),$$

если $z = a$ — бесконечно удаленная точка; здесь A — действительное число, а $F(z)$ — функция, голоморфная в окрестности $z = a$. Вместе с $f(z)$ мы будем рассматривать ее мнимую часть $V(x, y)$; функция $V(x, y)$ является гармонической во всех точках G, отличных от особых точек $f(z)$; логарифмические точки разветвления $f(z)$ являются логарифмическими полюсами $V(x, y)$, а прообразы точек ветвления $f(z)$ — внутренними седловыми точками $V(x, y)$ той же кратности.

Будем предполагать, что функция $V(x, y)$ удовлетворяет на границе (B) области G любым из граничных условий, указанных в § 2.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если I — граничный индекс функции $V(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ относительно границы (B) области G, то*

$$k + \sum_{j=1}^{l} (n_j + 1) - \mu = 2 - \nu + I, \tag{4.1}$$

где k — число логарифмических точек разветвления f в G, μ — число прообразов точек ветвления (с учетом их кратностей) f в G, l — число полюсов f в G, а n_j — кратности этих полюсов.

Докажем, прежде всего, следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. *Пусть $z = b$ — полюс $f(z)$ порядка n. Существует замкнутая кривая γ, ограничивающая достаточно малую окрестность $z = b$, такая, что привнос I_γ граничного индекса функции $V(x, y)$ от γ относительно области, не содержащей $z = b$, равен $-n$.*

Пусть точка $z = b$ не является бесконечно удаленной *. В окрестности $z = b$ функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z - b)^n}, \quad \Phi(b) \neq 0. \tag{4.2}$$

Произведем взаимно однозначное и конформное преобразование

$$t = \frac{z - b}{\Phi^{\frac{1}{n}}(z)} \tag{4.3}$$

окрестности $z = b$; ** тогда из (4.2) и (4.3) получаем соотношение

$$f(z) = t^{-n}, \tag{4.4}$$

* Исключенный случай исследуется совершенно аналогично.

** $\Phi^{\frac{1}{n}}(z)$ означает, как обычно, любую непрерывную однозначную ветвь корня n-й степени из $\Phi(z)$.

справедливое в достаточно малой окрестности точки $t = 0$. Отсюда в полярных координатах (r, θ) плоскости (t) для функции V выводим представление

$$-r^{-n}\sin n\theta. \tag{4.5}$$

Беря в качестве γ прообраз окружности $r = r_0$, где r_0 достаточно мало, убеждаемся в справедливости леммы непосредственным вычислением I_γ. Дальнейшее доказательство производится известным методом. Пусть M — число логарифмических полюсов, а S — число внутренних седловых точек (с учетом их кратностей) функции $V(x, y)$ в области G. Удалим из G окрестности полюсов $f(z)$, ограниченные кривыми леммы 4.1, так, чтобы в оставшейся области G_1 содержались все логарифмические полюсы и седловые точки $V(x, y)$. В области G_1 функция $V(x, y)$ гармонична (исключая логарифмические полюсы) и, следовательно, к ней применимо основное соотношение (1.5). Учитывая лемму 4.1, запишем это соотношение в виде

$$M - S = 2 - (\nu + l) + I - \sum_{j=1}^{l} n_j, \tag{4.6}$$

откуда получаем (4.1), ибо $M = k$, а $S = \mu$.

Аналогичные соотношения можно получить для аналитических функций $f(z)$, допускающих другие изолированные особенности; при этом необходимо лишь, чтобы функции $\operatorname{Im} f(z)$ (или $\operatorname{Re} f(z)$) были однозначными и удовлетворяли на контуре известным граничным условиям. Для получения указанных соотношений достаточно знать привзнос граничного индекса функции $\operatorname{Im} f(z)$ ($\operatorname{Re} f(z)$) от кривой, окружающей особую точку $f(z)$.

Ниже рассматриваются особые точки, в окрестностях которых функция $f(z)$ имеет вид

$$\frac{1}{z-a} - Ai\ln(z-a) + F(z), \tag{4.7}$$

если $z = a$ — конечная точка, или

$$z - Ai\ln z + F(z), \tag{4.7'}$$

если $z = a$ — бесконечно удаленная точка, A — действительное число, а $F(z)$ — функция, голоморфная в окрестности $z = 0$. Подобные особенности имеет, например, комплексный потенциал течения при наличии в потоке вихрей.

Мы разберем подробно случай, когда $z = a$ является бесконечно удаленной точкой; случай конечной точки сводится к указанному при помощи преобразования

$$t = \frac{1}{z-a}.$$

Итак, пусть в окрестности $|z| > R_0$ точки $z = \infty$ функция $f(z)$ имеет вид (4.7'), что можно записать также в форме

$$z - Ai\ln z + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)z^{-n}, \tag{4.8}$$

где a_n и b_n — действительные числа.

ЛЕММА 4.2. *Пусть I_γ — привзнос граничного индекса функции $V(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ от окружности $\gamma: |z| = R$ относительно области $|z| < R$. Существует достаточно большое число R^* такое, что $I_\gamma = -1$, как только $R > R^*$.*

Вводя в плоскости (z) полярные координаты (r, θ), запишем функцию $V(x, y)$ в виде

$$V(r, \theta) = r \sin\theta - A \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta).$$

Определим точки экстремума $V(r, \theta)$ на окружности $|z| = R > R_0$. Значения θ, соответствующие этим точкам, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial V(R, \theta)}{\partial \theta} = 0. \tag{4.9}$$

Непосредственные вычисления устанавливают справедливость тождества

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{Re} \Psi(re^{i\theta}), \tag{4.10}$$

где

$$\Psi(z) = z - \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + ib_n) z^{-n}. \ *$$

Из вида функции $\Psi(z)$ вытекает, что она однолистна в области $|z| > R_1$, если R_1 достаточно велико. Используя однолистность функции $\Psi(z)$, легко доказать **, что $\Psi(z)$ отображает любую окружность $|z| = R$ на выпуклую кривую Γ, если только R превосходит некоторое число R_2. Увеличивая, в случае необходимости, число R, всегда можно добиться, чтобы кривая Γ содержала внутри себя начало координат. Но тогда эта кривая будет пересекать мнимую ось плоскости (Ψ) в двух точках, или, что то же самое, функция $\operatorname{Re} \Psi(Re^{i\theta})$ будет обращаться в нуль для двух значений θ. А тогда из (4.10) следует, что для достаточно больших R уравнение (4.9) имеет два корня, откуда вытекает, что функция $V(r, \theta)$ имеет на $|z| = R$ одну точку минимума и одну точку максимума. ***

Для определения типа минимума и максимума необходимо знать знаки $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$ и $\frac{\partial V}{\partial r}$ в этих точках; с этой целью произведем некоторые оценки.

Пусть $\theta = \alpha$ — корень (4.9); из (4.9) имеем:

$$\cos\alpha = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} nR^{-n} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

откуда

$$|\cos\alpha| \leqslant \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} nR^{-n} (|a_n| + |b_n|).$$

---

* Сходимость ряда для $|z| > R_0$ очевидна.

** Доказательство основывается на свойстве однолистных функций класса $\sum$ [см. (8)].

*** Условие (4.9) является необходимым для существования экстремума $V(R, \theta)$, но в данном случае оно будет и достаточным, так как $V(R, \theta)$ имеет по крайней мере одну точку минимума и одну точку максимума.

Из неравенства Коши

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leqslant M\overline{R}^n,$$

где $\overline{R} > R_0$, а $M = \max\limits_{|z|=\overline{R}} \left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) z^{-n} \right|$ и очевидного неравенства

$$(|a_n| + |b_n|)^2 \leqslant 2(a_n^2 + b_n^2)$$

получаем:

$$R^{-n}(|a_n| + |b_n|) \leqslant \sqrt{2}M\left(\frac{\overline{R}}{R}\right)^n.$$

Таким образом,

$$|\cos\alpha| \leqslant \frac{\sqrt{2}M}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\overline{R}}{R}\right)^n = \frac{\sqrt{2}M\overline{R}}{R^2\left(1-\frac{\overline{R}}{R}\right)^2}, \tag{4.11}$$

если $R > \overline{R}$; из (4.11) легко находим:

$$|\sin\alpha| \geqslant \sqrt{1 - \frac{2M^2\overline{R}^2}{R^4\left(1-\frac{\overline{R}}{R}\right)^4}}. \tag{4.12}$$

Выпишем явные выражения для $\frac{\partial^2 V(R,\alpha)}{\partial\theta^2}$ и $\frac{\partial V(R,\alpha)}{\partial r}$:

$$\frac{\partial^2 V(R,\alpha)}{\partial\theta^2} = -R\sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 R^{-n}(a_n \sin n\alpha - b_n \cos n\alpha), \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial V(R,\alpha)}{\partial r} = \sin\alpha - \frac{A}{R} + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty} nR^{-n}(a_n \sin n\alpha - b_n \cos n\alpha). \tag{4.14}$$

Аналогично предыдущему получаем оценки:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 R^{-n}(a_n \sin n\alpha - b_n \cos n\alpha) \right| \leqslant \frac{2\sqrt{2}M\overline{R}}{\left(1-\frac{\overline{R}}{R}\right)^3}, \tag{4.15}$$

$$\left| -\frac{A}{R} + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty} nR^{-n}(a_n \sin n\alpha - b_n \cos n\alpha) \right| \leqslant \frac{1}{R}\left[|A| + \frac{\sqrt{2}M\overline{R}}{R\left(1-\frac{\overline{R}}{R}\right)^2} \right]. \tag{4.16}$$

Принимая во внимание (4.12), (4.15) и (4.16), убеждаемся, что знаки выражений (4.13) и (4.14) определяются при достаточно большом R их первыми слагаемыми. Отсюда следует, что (относительно $|z| < R$) минимум является входящим, а максимум — выходящим; таким образом,

$$I_\gamma = -1,$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 4.2 вытекает соотношение

$$k + \sum_{j=1}^{l} (n_j + 1) + 2n' - \mu = 2 - \nu + I, \tag{4.17}$$

где n' — число точек, в окрестностях которых функция $f(z)$ имеет разложение вида (4.7) или (4.7′).

Замечание. Результаты настоящего параграфа распространяются и на псевдоаналитические функции, в основу определения которых положены рассмотренные здесь аналитические функции.

§ 5. Граничные условия A* и A_∞

Произведем некоторые обобщения граничных условий A. Пусть U^i — функция, определенная значениями $U(x, y)$ на B_i.

Граничные условия A*. Функция U^i непрерывна во всех точках B_i; на B_i имеется конечное число дуг $\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_{n_i}^i$, на которых U^i постоянна; каждая из этих дуг имеет окрестность (относительно (x, y)-плоскости), где функция $U(x, y)$ псевдогармонична. Между дугами δ_1^i, $\delta_2^i, \ldots, \delta_{n_i}^i$ функция U^i изменяется монотонно.

Пусть δ — дуга B_i, на которой функция U^i равна постоянному значению c. Очевидно, имеются две возможности:

1) дуга δ изолирована среди точек своего уровня;

2) имеется конечное число точек δ, в каждой из которых оканчивается конечное число дуг уровня c*.

В случае 1) число c является относительным экстремальным значением функции U, поэтому дугу δ будем называть дугой относительного минимума (максимума).

В случае 2) относительная окрестность N дуги δ разделяется дугами уровня c на несколько связных областей (секторов). Если число n секторов, расположенных ниже c, не превосходит единицы, то δ называется обыкновенной дугой; если $n > 1$, то δ называется граничной седловой дугой кратности $n - 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если на кривой B_i контура (B) выполняются граничные условия* A*, *то привзнос I_i граничного индекса I от B_i равен*

$$s_i^* - m_i^*, \tag{5.1}$$

где s_i^* — число граничных седловых дуг, а m_i^* — число дуг относительного минимума на B_i; ** *при этом каждая граничная седловая дуга считается столько раз, какова ее кратность*

Для доказательства этой теоремы может быть применен метод, аналогичный тому, который используется в книге [1] при исследовании случая постоянных граничных значений (теорема 13.2). Именно, каждая граничная кривая B_i заменяется близкой простой замкнутой кривой B_i^* такой, что на B_i^* удовлетворяются граничные условия A; при этом для построения B_i^* изучается предварительно строение секторов относительной окрестности B_i. Помимо секторов, которые рассматриваются в [1], нам встретятся секторы и других типов, однако их строение исследуется аналогичным методом. Мы рассмотрим подробно лишь строение окрестности дуги относительного минимума; при рассмотрении других секторов ограничимся ссылками на монографию [1].

---

* Это следует из псевдогармоничности U в окрестности δ.

** В частном случае эти дуги могут вырождаться в точки.

Пусть δ — дуга относительного минимума, принадлежащая B_i; обозначим ее концы через M_1 и M_2. Пусть h_1 и h_2 — достаточно малые дуги B_i, оканчивающиеся в точках M_1 и M_2 соответственно, на которых функция U^i изменяется монотонно. Соединим концы этих дуг, не лежащие на уровне c, простой кривой k, расположенной в G. Пусть D — подобласть G, ограниченная контуром, состоящим из дуг h_1, δ, h_2 и k. Кривую k выберем настолько близко от δ, чтобы $\overline{D}$ не содержала точек уровня c, отличных от точек δ, и внутренних седловых точек функции $U(x, y)$.

Все точки кривой k, в том числе и ее концы (которые мы также относим к k), расположены выше уровня c, т. е.

$$U(x, y) > c, \quad (x, y) \in k.$$

Так как множество точек кривой k является замкнутым, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что будет иметь место соотношение

$$U(x, y) > c + \varepsilon, \quad (x, y) \in k,$$

откуда следует, что на уровне $c + \varepsilon_1$, где $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, имеются точно две точки Q_1 и Q_2 границы D, которые лежат соответственно на h_1 и h_2; но тогда линия уровня $c + \varepsilon_1$, расположенная в D, состоит из единственной простой дуги, оканчивающейся в этих точках. Из проведенных рассуждений следует существование относительной окрестности N дуги δ, замыкание которой допускает гомеоморфное отображение T на прямоугольник H такое, что дуга δ соответствует основанию H, а дуги уровня U, расположенные в N, — прямым, параллельным основанию. Учитывая это обстоятельство, можно заменить дугу δ кривой $\delta^* \in \overline{N}$ так, что на пересечении γ измененного контура B_i^* с $\overline{N}$ будут удовлетворяться условия А. Для этого в качестве δ^* достаточно взять кривую, образом которой при гомеоморфизме T является ломаная, состоящая из боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на $T(\delta)$, как на основании. Тогда легко установить, что функция $U(x, y)$ имеет на γ (относительно измененной области) две точки относительного минимума (точки M_1 и M_2) и одну седловую точку кратности 1 (прообраз вершины указанного треугольника). Если δ — дуга относительного максимума, то совершенно аналогично убеждаемся, что δ можно заменить кривой δ^* так, чтобы все точки γ были обыкновенными.

Аналогично исследуется строение секторов относительной окрестности N граничной седловой дуги δ. Все эти секторы можно разбить на две группы:

1) внутренние секторы, в границу которых не входят точки B_i, отличные от точек δ;

2) граничные секторы, в границу которых входят точки B_i, отличные от точек δ.

Внутренние секторы могут быть двух типов:

а) секторы типа V, которые расположены между дугами уровня, ведущими к одной точке δ;

б) секторы типа R, которые расположены между дугами уровня,

стремящимися к различным точкам δ; строение секторов типа V и R описано в ([1]), стр. 57—58.

Граничные секторы также могут быть двух типов:

а) секторы, в границу которых не входят внутренние точки δ [см. ([1]), стр. 38];

б) секторы, в границу которых входят внутренние точки δ; эти секторы исследуются аналогичным методом.

С топологической точки зрения все эти секторы можно считать одинаковыми, так как каждый из них допускает (подобно окрестности дуги относительного экстремума) гомеоморфное отображение на прямоугольник H, при котором граничные точки, расположенные на уровне c, соответствуют основанию H, а дуги других уровней — прямым, параллельным основаниям.

Учитывая это обстоятельство, легко заменить дугу δ такой кривой δ^*, чтобы привзнос граничного индекса от расположенной в $\overline{N}$ дуги новой границы равнялся числу внутренних секторов, расположенных выше c. Указанное число на единицу меньше числа всех секторов N, расположенных ниже c, т. е. совпадает с кратностью граничной седловой дуги δ.

Заменяя дуги $\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_{n_i}^i$ граничной кривой B_i описанными выше кривыми, получим новую граничную кривую B_i^* такую, что на B_i^* относительно измененной области $\overline{G^*}$ удовлетворяются условия A и G^* содержит все внутренние критические точки U. Применяя к функции U^*, определенной значениями U в G^*, основную теорему при граничных условиях A, убеждаемся в справедливости (5.1).

Во всех рассмотренных выше граничных условиях предполагалось, что функция U непрерывна во всех точках (B). Рассмотрим теперь граничные условия, при которых допускается конечное число точек разрыва U на (B).

Граничные условия A_∞. На кривой B_i имеется конечное число точек, в окрестности каждой из которых функция $U(x, y)$ псевдогармонична, а в самих точках имеет логарифмические полюсы. При приближении к указанным точкам как справа, так и слева, функция U^i стремится к $-\infty$ $(+\infty)$ монотонно. Во всех остальных точках B_i удовлетворяются граничные условия A^*.

Назовем граничные логарифмические полюсы функции U точками абсолютного минимума (максимума), если в этих точках функция U обращается в $-\infty$ $(+\infty)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если на кривой B_i контура (B) выполняются граничные условия A_∞, то привзнос I_i граничного индекса I от B_i равен*

$$s_i^* - m_i^* - \overline{m}_i, \tag{5.2}$$

где числа s_i^* и m_i^* означают то же, что и в теореме 5.1, *а $\overline{m}_i$ — число точек абсолютного минимума U на B_i.*

Каноническая окрестность точек абсолютного экстремума имеет точно такое же строение, как и каноническая окрестность точек относительного

экстремума (см. теорему 2.3). В этом легко убедиться, применяя метод, использованный при доказательстве указанной теоремы.*

Учитывая это обстоятельство, легко заменить кривую B_i достаточно близкой кривой B_i^*, на которой будут удовлетворяться граничные условия A*, после чего достаточно воспользоваться теоремой 5.1.

§ 6. Определение граничного индекса гармонической функции по граничным значениям соответствующей аналитической функции

Пусть гармоническая функция $u(x, y)$ есть вещественная часть аналитической функции $f(z)$. Будем считать, что нам заданы значения аналитической функции $f(z)$ на контуре области. Покажем, как вычислить граничный индекс гармонической функции по заданным контурным значениям соответствующей аналитической функции. Исследуя этот вопрос, мы, в основном, имеем в виду приложения к теории обратных краевых задач. Фактически речь будет итти об изучении свойств аналитической функции, а гармоническая функция будет служить лишь средством для этого изучения.

Область, в которой определены аналитическая функция $f(z)$ и гармоническая функция $u(x, y)$, будем, как и выше, считать многосвязной; граничные кривые будем предполагать гладкими. Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ (где s — дуга контура) — уравнения контуров и пусть

$$\varphi(s) + i\psi(s) = f[x(s) + iy(s)]$$

— контурное значение аналитической функции, причем $\varphi(s)$ есть, очевидно, контурное значение гармонической функции $u(x, y)$. Будем предполагать, что $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ имеют непрерывные производные, причем пока будем допускать, что $\varphi'(s)$ и $\psi'(s)$ не обращаются одновременно в нуль (отсутствуют точки нулевого градиента). Этот исключенный случай мы рассмотрим в следующем параграфе.

В силу непрерывной дифференцируемости граничных значений очевидно, что функция $u(x, y)$ имеет на контуре конечное число экстремумов (т. е. удовлетворяются условия A). Тогда, как указывалось в § 2, граничный индекс I гармонической функции $u(x, y)$ равен разности между числом t входящих точек относительного максимума ** и числом m входящих точек относительного минимума граничных значений функции $u(x, y)$, т. е. $\varphi(s)$.

Точки граничного максимума и минимума мы можем найти обычным способом, приравнивая $\varphi'(s)$ нулю и исследуя, в случае надобности, изменение знака $\varphi'(s)$ или знак $\varphi''(s)$, если последняя производная существует.

Чтобы выделить точки входящего экстремума нужно знать знак нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$. Эта производная не может быть определена по

---

* Подобным методом мы пользовались выше, при исследовании окрестности дуги относительного минимума.

** Эту величину здесь и в дальнейшем мы будем обозначать через t, а не через s, как раньше, чтобы отличить ее от дуги.

краевым значениям $\varphi(s)$, но легко может быть определена по значениям сопряженной функции $\psi(s)$.

Согласно уравнениям Коши — Римана, на контуре удовлетворяются равенства *

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}, \tag{6.1}$$

откуда будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{d\psi(s)}{ds}.$$

Следовательно, для точек входящего экстремума выполняется соотношение

$$\frac{d\psi(s)}{ds} < 0,$$

и, таким образом,

$$I = t - m, \tag{6.2}$$

где t есть число точек контура, для которых $\varphi'(s) = 0$, $\psi'(s) < 0$, $\varphi'(s)$ убывает (или $\varphi''(s) < 0$), а m — число точек, для которых $\varphi'(s) = 0$, $\psi'(s) < 0$, $\varphi'(s)$ возрастает (или $\varphi''(s) > 0$).

§ 7. Точки нулевого градиента

Рассмотрим исключенный выше случай точек нулевого градиента, т. е. точек, для которых

$$\varphi'(s) + i\psi'(s) = 0.$$

При этом будем предполагать, что контур (B) достаточно гладкий в окрестности этих точек, а функция $f(z)$ аналитична.

Пусть в точке $z_0 = x(s_0) + iy(s_0)$ контура (B) выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \varphi^{(k)}(s_0) + i\psi^{(k)}(s_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \varphi^{(n)}(s_0) + i\psi^{(n)}(s_0) \neq 0. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Легко показать, что в этом случае z_0 является для $f(z)$ критической точкой кратности $n-1$; для этого достаточно продифференцировать последовательно n раз тождество

$$\varphi(s) + i\psi(s) = f[x(s) + iy(s)]$$

и принять во внимание (7.1) и известное тождество

$$x'^2(s) + y'^2(s) = 1.$$

Для гармонической функции $u(x, y)$ точка z_0 является седловой. ** Для определения кратности t этой точки нам необходимо изучить строение ее относительной окрестности.

---

* Следует подчеркнуть, что удовлетворение уравнений Коши — Римана вовсе не влечет за собой аналитичности предельных значений. Соответствующие производные понимаются как предельные значения производных по соответствующим направлениям от гармонических функций внутри областей. Таким образом, уравнения (6.1) имеют место, если эти производные имеют непрерывные предельные значения.

** В частном случае $n = 1$ точка z_0 может быть обыкновенной; последнюю можно считать седловой точкой нулевой кратности.

Представление о строении полной окрестности точки $z = z_0$ дается теоремой 2.1. Используя метод этой теоремы, мы изучим не только линии уровня $u(x, y)$, но и линии уровня сопряженной функции $v(x, y)$, а также взаимное расположение этих линий уровня; это даст возможность изучить строение относительной окрестности z_0.

В окрестности $z = z_0$ функция $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n A(z) \quad (A(z_0) \neq 0), \tag{7.2}$$

где $A(z)$ аналитична в этой окрестности. Производя взаимнооднозначное и конформное (в окрестности z_0) преобразование

$$\zeta = (z - z_0) A^{\frac{1}{n}}(z), \tag{7.3}$$

получим

$$f(z) - f(z_0) = \zeta^n,$$

откуда, отделяя вещественную и мнимую части, находим:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = r^n \cos n\theta, \qquad v(x, y) - v(x_0, y_0) = r^n \sin \theta, \tag{7.4}$$

где (r, θ) — полярные координаты плоскости (ζ). Из (7.4) видно, что линии уровня $u(x, y) - u(x_0, y_0) = 0$ $(v(x, y) - v(x_0, y_0) = 0)$ в плоскости (ζ) соответствует совокупности $2n$ лучей, вдоль которых $\cos n\theta = 0$ $(\sin n\theta = 0)$. В дальнейшем для краткости мы будем опускать аргументы у функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, обозначая $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Рассмотрим круговую окрестность K_ρ: $|\zeta| \leqslant \rho$ точки $\zeta = 0$. Лучи $\cos n\theta = 0$ делят эту окрестность на $2n$ секторов, в каждом из которых разность $u - u_0 = \cos n\theta$ сохраняет определенный знак, причем для соседних секторов эти знаки различные. То же самое можно сказать и о лучах $\sin n\theta = 0$.

Совокупность лучей $\cos n\theta = 0$, $\sin n\theta = 0$ делит K_ρ на $4n$ секторов. Эти секторы можно разбить на два типа:

1. секторы типа VU — секторы, для которых

$$(u - u_0)(v - v_0) > 0;$$

2. секторы типа UV — секторы, для которых

$$(u - u_0)(v - v_0) < 0.$$

Отметим основное свойство этих секторов: дуга окружности $|\zeta| = \rho$, ограничивающая сектор типа VU (UV), начинается в точке уровня $v = v_0$ $(u = u_0)$ и оканчивается в точке уровня $u = u_0$ $(v = v_0)$; при этом предполагается, что окружность $|\zeta| = \rho$ ориентирована так, что K_ρ расположена слева от нее. Доказательство этого предложения очевидно.

Учитывая взаимную однозначность и конформность преобразования (7.3), нетрудно сделать вывод о поведении линий уровня $u = u_0$ и $v = v_0$ в окрестности N точки $z = z_0$.

Линия уровня $u = u_0$ $(v = v_0)$, проходящая через точку $z = z_0$, состоит из n простых гладких дуг, пересекающихся в z_0, причем каждая из дуг образует с соседней угол $\frac{\pi}{n}$; дуги уровня $u = u_0$ $(v = v_0)$ делят окрестность N точки z_0, ограниченную гладкой замкнутой кривой γ, на $2n$

секторов; в каждом из этих секторов разность $u-u_0(v-v_0)$ сохраняет определенный знак, причем для соседних секторов эти знаки различны. Мы будем называть эти секторы положительными или отрицательными в соответствии со знаками указанных разностей.

Совокупность дуг уровней $u=u_0$ и $v=v_0$ делит N на $4n$ секторов; будем называть эти секторы секторами типа $VU(UV)$, если в них $(u-u_0)(v-v_0)>0$ $((u-u_0)(v-v_0)<0)$. Основное свойство этих секторов дается следующей леммой.

ЛЕММА 7.1. *Дуга кривой γ, ограничивающая сектор типа $VU(UV)$, начинается в точке уровня $v=v_0$ $(u=u_0)$ и оканчивается в точке уровня $u=u_0$ $(v=v_0)$; при этом предполагается, что γ ориентирована так, что N расположена слева от γ.*

Выберем окрестность N так, чтобы:

а) контур (B) пересекал ее границу γ в двух точках;

б) контур (B) не пересекался с дугами уровней $u=u_0$ и $v=v_0$ ни в одной точке $z\in\overline{N}$, отличной от z_0.

Такой выбор всегда возможен при условиях, наложенных на (B) и функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$. Контур (B) разбивает окрестность N на две области, одна из которых лежит слева от (B); обозначим ее через N_1 и возьмем в качестве относительной окрестности точки z_0.

Относительная окрестность N_1 разбивается дугами уровня $u=u_0$ на секторы, два из которых примыкают к контуру. Число всех этих секторов на единицу больше числа дуг уровня, принадлежащих N_1. Возможны следующие три случая:

A. (B) не имеет общей касательной ни с одной из дуг уровня или (B) имеет общую касательную с дугой уровня, но располагается по разные стороны от последней; число дуг уровня, принадлежащих N_1, равно половине их общего числа, т. е. $-n$.

Если (B) имеет общую касательную с дугой уровня λ и располагается по одну сторону от λ, то число дуг уровня, принадлежащих N_1, равно:

B. $n-1$, если $\lambda\overline{\in}N_1$,

C. $n+1$, если $\lambda\in N_1$.

Установим один критерий принадлежности дуги λ к окрестности N_1, который понадобится нам для дальнейших рассуждений. Пусть α — пересечение (B) с N, α_1 и α_2 — две дуги α, на которые она разделяется точкой z_0, причем α_1 предшествует α_2 при положительном обходе α. Каждая из дуг α_1 и α_2 принадлежит целиком одному из секторов окрестности N, образованных дугами уровней $u=u_0$ и $v=v_0$, причем дуги λ, на которые λ разделяется точкой z_0, входят в состав границ этих секторов. Учитывая это обстоятельство и лемму 7.1, легко проверить справедливость следующего предложения.

ЛЕММА 7.2. *Пусть контур (B) имеет общую касательную с дугой λ уровня $u=u_0$ и располагается по одну сторону от λ. Тогда $\lambda\overline{\in}N_1$, если дуга α_1 расположена в секторе типа VU, а дуга α_2 — в секторе типа UV, и $\lambda\in N_1$, если дуга α_1 расположена в секторе типа UV, а дуга α_2 — в секторе типа VU.*

Приступим к определению кратности t граничной седловой точки z_0, т. е. к подсчету числа отрицательных секторов относительной окрест-

ности N_1. Мы рассмотрим все различные (с топологической точки зрения) случаи расположения дуги α относительно секторов окрестности N и установим, как ведут себя функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ для каждого случая; при этом окажется, что различным случаям будет соответствовать различное поведение $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, которое поэтому и может быть взято в качестве критерия этих случаев.

Предположим, что число n четно.

Случай A. Окрестность N_1 содержит n дуг уровня и состоит, следовательно, из $n+1$ секторов. Оба граничных сектора или положительны, или отрицательны (так как число всех секторов нечетно). В первом случае кратность седловой точки $t=\frac{n}{2}-1$, а $\varphi(s)$ имеет минимум; во втором случае $t=\frac{n}{2}$, а $\varphi(s)$ имеет максимум.

Случаи B и C. Число секторов окрестности N_1 равно n или $n+2$, и, следовательно, кратность седловой точки равна $\frac{n}{2}-1$ или $\frac{n}{2}$, смотря по тому, имеем ли мы случай B или случай C. В граничных секторах разность $u-u_0$ имеет противоположные знаки (число всех секторов четно) и поэтому z_0 не является точкой экстремума функции $\varphi(s)$; однако легко убедиться, что z_0 является точкой экстремума для функции $\psi(s)$.

Возможны следующие случаи поведения $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ в окрестности z_0:

1. $\varphi(s)$ растет, z_0 — точка максимума $\psi(s)$,
2. $\varphi(s)$ растет, z_0 — точка минимума $\psi(s)$,
3. $\varphi(s)$ убывает, z_0 — точка максимума $\psi(s)$,
4. $\varphi(s)$ убывает, z_0 — точка минимума $\psi(s)$.

На основании леммы 7.2 легко убедиться, что в случаях 1 и 4 $\lambda\overline{\in}N_1$ (случай B) и, следовательно, $t=\frac{n}{2}-1$, а в случаях 2 и 3 $\lambda\in N_1$ (случай C) и, следовательно, $t=\frac{n}{2}$.

Если n нечетно, то исследование производится совершенно аналогично, и поэтому мы его не приводим.

Если $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ дифференцируемы достаточное число раз, то определение их поведения можно проводить по известным правилам дифференциального исчисления.

Сформулируем окончательный результат в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть контур (B) является гладким в окрестности точки $z_0=z(s_0)$, а функция $f(z)$ аналитична в z_0. Если в этой точке выполняются соотношения*

$$\varphi^{(k)}(s_0)+i\psi^{(k)}(s_0)=0 \quad (k=1,2,\ldots,n-1),$$
$$\psi^{(n)}(s_0)+i\psi^{(n)}(s_0)\neq 0 \tag{7.1}$$

и если существует первая отличная от нуля производная $\varphi^{(p)}(s_0)$ $(p\geqslant n)$ функции $\varphi(s)$, то z_0 является граничной седловой точкой функции $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, кратность t которой определяется по следующей таблице:

	поведение функций	t	поведение функций	t
четно	$\varphi^{(p)}(s_0) > 0$	$\frac{n}{2} - 1$	$\varphi^{(p)}(s_0) < 0,\ \psi^{(n)}(s_0) < 0$	$\frac{n+1}{2}$
			$\varphi^{(p)}(s_0) > 0,\ \psi^{(n)}(s_0) < 0$	$\frac{n-3}{2}$
	$\varphi^{(p)}(s_0) < 0$	$\frac{n}{2}$	$\psi^{(n)}(s_0) > 0$	$\frac{n-1}{2}$
нечетно	$\varphi^{(p)}(s_0)\psi^{(n)}(s_0) > 0$	$\frac{n}{2}$	во всех случаях	$\frac{n-1}{2}$
	$\varphi^{(p)}(s_0)\psi^{(n)}(s_0) > 0$	$\frac{n}{2} - 1$		
p / n	четно		нечетно	

§ 8. Вычисление кратности неполного разветвленного элемента

Прежде всего приведем общую теорему о порядках, о которой мы упоминали в § 2.

Пусть $w = f(z)$ — функция, псевдоаналитическая (исключая полюсы) в G и непрерывная в точках границы (B). Обозначим через g_i образ граничной кривой B_i при отображении $w = f(z)$. Кривая g_i предполагается локально простой, т. е. является непрерывным и локально взаимно однозначным образом окружности [см. (1), граничное условие II]. Локально простая кривая обладает важными топологическими характеристиками — порядком относительно точки и угловым порядком; эти характеристики играют основную роль при исследовании псевдоаналитической функции $w = f(z)$.

Общая теорема о порядках [см. (1), теорема 24.2] состоит в выполнении следующего соотношения:

$$2n(a) = 2 - \nu + \mu + 2q(a) - p,$$

где $n(a)$ — число a-точек f в G, $q(a)$ — сумма порядков кривых g_i относительно точки $w = a$ (при этом предполагается, что кривые g_i не проходят через $w = a$), p — сумма угловых порядков кривых g_i, μ — число прообразов точек ветвления f в G с учетом их кратностей. При этом кратность прообразов точек ветвления, расположенных в G, определяется обычным способом. Если же прообразом точки ветвления является точка z_0 границы (B), то под его кратностью понимается кратность так называемого неполного разветвленного элемента функции f^{-1} в точке $f(z_0)$, который определяется следующим образом.

Определение I [см. (1), стр. 104]. Пусть W — $(m+1)$-кратно разветвленный элемент, каждый лист которого покрывает жорданову окрестность N точки w_0, принадлежащей w-плоскости. Пусть, далее, b — простая ориентированная дуга, проходящая через w_0 и разбивающая N на две подобласти, одна из которых N_1 лежит справа от b. Связную подобласть W, полученную из W удалением однолистно покрытого экземпляра N_1, назовем неполным разветвленным элементом кратности m.

В монографии [1] приводится случай, когда кратность неполного разветвленного элемента определяется по поведению функции $f(z)$ и граничной кривой B_i контура (B). Именно, пусть $f(z)$ аналитична в точке z_0, принадлежащей B_i, и z_0 является нулем n-го порядка для $f(z) - f(z_0)$. Если две гладкие дуги B_i, пересекающиеся в z_0, образуют в z_0 угол A и если

$$2\pi m < nA < 2\pi(m+1),$$

то m является кратностью неполного разветвленного элемента в точке $f(z_0)$. В частности, если B_i — гладкая в окрестности z_0 и $n = 2r+1$, то $m = r$. В настоящем параграфе мы дадим способ определения кратности неполного разветвленного элемента при тех же предположениях относительно $f(z)$ и B_i, но для случая, когда $nA = 2\pi m$; при этом попутно будет разобран также и случай, когда $nA \neq 2\pi m$. Не нарушая общности, мы будем считать, что $f(z_0) = 0$.

Учитывая указанные выше предположения, выберем достаточно малую окрестность D точки z_0, ограниченную замкнутой жордановой кривой γ, так, чтобы в D функция $f(z)$ была аналитична и представлялась в виде:

$$f(z) = (z - z_0)^n A(z), \tag{8.1}$$

где $A(z)$ не обращается в нуль для $z \in D$, а пересечение B_i с D не имеет угловых точек, отличных от z_0. Пусть D^* — пересечение D и G, т. е. относительная окрестность точки z_0. Нас будет интересовать образ окрестности D^* при отображении $w = f(z)$, который, как мы покажем, является неполным разветвленным элементом функции f^{-1} в смысле определения I.

Для удобства рассуждений произведем взаимно однозначное и конформное преобразование независимого переменного z:

$$\zeta = (z - z_0)\, A^{\frac{1}{n}}(z), \tag{8.2}$$

которым мы уже пользовались выше. Из соотношений (8.1) и (8.2) получаем:

$$w = f(z) = \zeta^n. \tag{8.3}$$

Таким образом мы свели исследование произвольного отображения $w = f(z)$ к исследованию элементарного отображения $w = \zeta^n$.

Чтобы избежать новых обозначений, будем попрежнему через D и D^* обозначать окрестности точки $\zeta = 0$ (соответственно полную и относительную), а через γ — границу D. Возьмем в качестве γ окружность $|\zeta| = \rho$, радиус ρ которой выберем столь малым, чтобы B_i пересекалась с γ в двух точках. Пусть β — пересечение B_i с $\overline{D}$, β'' и β' — дуги β, пересекающиеся в точке $\zeta = 0$, * причем β'' предшествует β' при положительном обходе β.

Функция $w = \zeta^n$ отображает окружность γ в окружность $|w| = \rho^n$; кривая β отображается в кривую b, состоящую из двух гладких дуг b'' и b' (прообразов β'' и β'), которые пересекаются в точке $w = 0$. Так как

* Из конформности преобразования (8.2) следует, что β'' и β' пересекаются под углом A.

кривая B_i предполагается локально простой, то кривую b можно считать простой, ибо этого мы всегда добьемся, выбирая ρ достаточно малым.

Помимо β', дуга b' имеет в круге $|\zeta| < \rho$ $n-1$ прообразов; все эти прообразы получаются из дуги β' путем ее поворота вокруг начала координат на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$.

Пусть $\beta'_0, \beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1}$ — упомянутые прообразы, занумерованные в таком порядке, в каком они встречаются при положительном обходе вокруг $\zeta = 0$; при этом $\beta'_0 = \beta'$. Дуги β'_k разбивают круг $|\zeta| < \rho$ на n связных подобластей (секторов), являющихся областями однолистности функции $w = \zeta^n$. Будем обозначать сектор, ограниченный дугами β'_k и β'_{k+1}, через $R_{k,k+1}$, а область, состоящую из прилегающих друг к другу секторов $R_{k,k+1}$, $R_{k+1,k+2}, \ldots, R_{j,j+1}$ — через $R_{k,j+1}$ (при этом надо считать $\beta'_n = \beta'_0$). Римановым образом области $R_{k,j+1}$ является $(j-k)$-кратно разветвленный элемент W_{j-k}, каждый лист которого покрывает круг N: $|w| < \rho^n$.

Так как кривая b является простой, то дуга β'' не может иметь общих точек (отличных от $\zeta = 0$) с дугами β'_k; таким образом, β'' располагается целиком в некотором секторе $R_{k,k+1}$ и, следовательно, относительная окрестность D^* является подобластью области $R_{0,k+1}$. Пусть D_1 — дополнение D^* до $R_{0,k+1}$, а δ — граница D_1, которая состоит из дуг β'', β'_{k+1} и дуги окружности γ.

Принятая нами ориентация на β'', β'_{k+1} и γ * создает ориентацию замкнутого контура δ, причем такую, что область D_1 располагается справа от δ. Из сказанного нетрудно заключить, что образом области D_1 является однолистно покрытый экземпляр подобласти N_1 круга N, расположенной справа от b. Отсюда следует, что риманов образ W^* области D^* может быть получен из риманового образа W_{k+1} области $R_{0,k+1}$ путем удаления из последнего однолистно покрытого экземпляра области N_1. Но тогда, согласно определению I, W^* есть неполный разветвленный элемент кратности k. Остается выразить k через данные числа n и A.

Если A не является кратным $\frac{2\pi}{n}$, т. е.

$$\frac{2\pi}{n} m < A < \frac{2\pi}{n}(m+1),$$

то дуга $\beta'' \in R_{m,m+1}$, и, следовательно, $k = m$. Если же $A = \frac{2\pi}{n} m$ то β'' касается дуги β'_m и поэтому имеются две возможности:

а) $\beta'' \in R_{m-1,m}$, $\quad k = m-1$,

б) $\beta'' \in R_{m,m+1}$, $\quad k = m$.

В случае а) угол в точке $\zeta = 0$ относительно области D_1 равен нулю, а в случае б) этот угол равен $\frac{2\pi}{n}$; отсюда вытекает, что кривая b имеет (в обоих случаях) в начале координат точку возврата — острие; при этом угол в точке $w = 0$ относительно области N_1 будет равен 0 или 2π, иначе говоря, острие будет расположено слева от b или справа от b, смотря по тому, имеем ли мы случай а) или б).

---

* Дуга β'_{k+1} считается ориентированной так же, как и дуга β', т. е. в направлении от точки $\zeta = 0$ к точке окружности γ.

Вывод. Пусть $w=(fz)$ аналитична в точке z_0 граничной кривой B_i и z_0 является нулем порядка n для $f(z)-f(z_0)$. Пусть, далее, в z_0 пересекаются две гладкие дуги B_i, образуя при этом угол A. Тогда в точке $w_0=f(z_0)$ кривой g_i (g_i — образ B_i) имеется неполный разветвленный элемент, кратность k которого определяется следующим образом:

1. $k=m$, если $\frac{2\pi}{n}m<A<\frac{2\pi}{n}(m+1)$;

2. если $A=\frac{2\pi}{n}m$, то кривая g_i имеет в точке w_0 острие; тогда $k=m-1$, если острие расположено слева от g_i, и $k=m$, если острие расположено справа от g_i.

§ 9. Многолистная область определения функции

В монографии Морса [1] так же, как и у нас во всех предшествующих рассуждениях, предполагалось, что область определения функции однолистна. В приложениях полученных результатов к обратным краевым задачам, которые будут рассмотрены в следующем параграфе, придется рассматривать функции с многолистной областью определения (но без точек ветвления). Покажем, что все полученные результаты справедливы, при некоторых ограничениях, и для такого рода областей.

Ограничимся для простоты рассуждения случаем одной граничной кривой B, которую будем считать локально простой. Относительно исследуемой области G сделаем такое предположение.

Область G может быть разбита конечным числом k жордановых кривых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ на $k+1$ однолистных областей $G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}$. При этом кривые δ_j не пересекаются между собою и оканчиваются в точках границы A_1, B_1; $A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$. Очевидно, это всегда будет иметь место, если граница достаточно гладкая. Нахождением точных условий, которым должна удовлетворять граница для того, чтобы сделанное предположение осуществлялось, мы заниматься не будем.

Пусть $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ — функция, заданная в G и принимающая на (B) значение $\varphi(s)+i\psi(s)$; предположим, что $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ имеют конечное число максимумов и минимумов. Выберем концы кривых δ_j — A_j, B_j в обыкновенных точках функции $u(x, y)$; кроме того, выберем δ_j так, чтобы она не проходила через особые и внутренние седловые точки функции $u(x, y)$. Это возможно, так как число всех исключительных точек конечно. Обозначим через u_{δ_j} функции, определенные значениями $u(x, y)$ на δ_j.

Так как жордановы кривые δ_j можно проводить внутри области совершенно произвольно (лишь бы только они не проходили через конечное множество исключительных точек функции $u(x, y)$), то их, очевидно, можно провести так, чтобы функции u_{δ_j} имели на этих кривых конечное число экстремумов *. Кроме того, будем считать, что u_{δ_j} возрастает при приближении к точкам A_j, B_j. Для того чтобы последнее условие выполнялось, достаточно кривые δ_j в окрестности точек A_j, B_j проводить через секторы, лежащие ниже уровня $u(A_j)$, $u(B_j)$.

* Для этого они должны иметь конечное число точек касания с линиями уровня функции $u(x, y)$.

Обозначим через m_{δ_j} число минимумов, а через M_{δ_j} — число максимумов функции u_{δ_j}, расположенных внутри δ_j. Тогда, очевидно,

$$m_{\delta_j} - M_{\delta_j} = 1.$$

Пусть $u_i(x, y)$ — функции, определенные значениями функции $u(x, y)$ в областях G_i $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$.

Обозначим в формуле (4.17) выражение

$$k + \sum_{j=1}^{l} (n_j + 1) - 2n' - \mu$$

через Q и выпишем формулу (4.17) для каждой из областей G_i:

$$Q_i + m_i - t_i = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Сложив все последние равенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{k+1} Q_i + \sum_{i=1}^{k+1} m_i - \sum_{i=1}^{k+1} t_i = k + 1. \tag{9.1}$$

Каждый минимум (максимум) функции u_{δ_j} считается один раз, так как для одной из двух областей, граничащих с кривой δ_j, он является входящим, а для другой — выходящим; точки A_j, B_j являются для функций u_j и u_{j+1} обыкновенными. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k+1} m_i = m + \sum_{j=1}^{k} m_{\delta_j}, \quad \sum_{i=1}^{k+1} t_i = t + \sum_{j=1}^{k} M_{\delta_j},$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k+1} m_i - \sum_{i=1}^{k+1} t_i = m - t + \sum_{j=1}^{k} (m_{\delta_j} - M_{\delta_j}) = m - t + k. \tag{9.2}$$

Из (9.1), (9.2) и очевидного соотношения $\sum_{i=1}^{k+1} Q_i = Q$ получаем:

$$Q + m - t = 1, \tag{9.3}$$

т. е. формула (4.17) остается справедливой и для многолистной области при сделанных относительно этой области ограничениях.

§ 10. Приложения к теории обратных краевых задач

Обратная краевая задача рассматриваемого далее типа была впервые поставлена в работе М. Т. Нужина ([3]). В простейшем своем виде это есть задача об отыскании области по заданным на искомом контуре области краевым значениям аналитической функции, конформно отображающей искомую область на некоторую заданную однолистную область (точную формулировку см. в ([4])). Таким образом в простейшем случае точки ветвления в заданной области отсутствуют, в силу требования конформности отображения.

Дальнейшее решение, указанное М. Т. Нужиным, заключается в конформном отображении заданной области на единичный круг, после чего решение обратной краевой задачи приводится к решению задачи Дирихле для круга. Логарифм производной функции, конформно отображающей круг на искомую область, определяется в явном виде интегралом Шварца. Доказывается единственность решения задачи с точностью до движения искомой области.

Поставим теперь обратную краевую задачу в общем виде:

Даны 2ν функций параметра s:

$$u = \varphi_k(s), \quad v = \psi_k(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

определяющих в плоскости комплексного переменного w ν кривых L_w^k (вообще говоря, самопересекающихся). Определить в плоскости комплексного переменного z ν замкнутых кривых L_z^k, ограничивающих некоторую конечную область D_z^+, вообще говоря, многолистную, но без точек ветвления, так, чтобы, считая параметр s длиной дуги искомого контура $L_z = L_z^1 + L_z^2 + \cdots + L_z^\nu$, выражение $\varphi_k(s) + i\psi_k(s)$ было краевым значением на контуре L_z^k функции $f(z)$, аналитической в области D_z^+, за исключением отдельных точек, где она может иметь особенности заданного типа (логарифмические или полярные) с заданной главной частью.

В наиболее общей постановке задачи функции $\varphi_k(s)$, $\psi_k(s)$ можно считать абсолютно непрерывными [см. ([4]), ([10])]. Здесь, имея в виду приложения изложенной выше теории, мы будем считать их непрерывно дифференцируемыми.

Некоторые частные случаи формулированной общей задачи рассматривались в работах Г. Г. Тумашева ([5]), М. А. Копырина ([6]), М. Т. Нужина ([7]), а также в работе С. Н. Андрианова ([9]). В работах ([5])—([7]) число и положение точек ветвления определялось, исходя из механических соображений. С. Н. Андрианов для случая аналитической в односвязной области функции, но с многолистной областью в плоскости w, указывает на возможность определения числа точек ветвления путем использования принципа аргумента.

Топологическая теория, развитая в книге Морса ([1]) с обобщениями, данными здесь, позволяет решить задачу об определении числа точек ветвления в формулированном общем случае *.

Решение вопроса дает формула (4.17) § 4:

$$\mu = K + \sum_{j=1}^{l} (n_j + 1) + 2n' - \nu + 2 - I,$$

где сохранены все прежние обозначения.

Хотя в данном случае область определения искомой функции $f(z)$ неизвестна, однако все величины правой стороны последней формулы могут быть определены. Величины ν, n_j, n' заданы в самой постановке задачи. Граничный индекс I может быть вычислен по заданным функциям $\varphi_k(s)$, $\psi_k(s)$, если предположить дополнительно, что они удовлетворяют условиям § 6, 7.

* С ограничением § 4.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда всюду на контуре

$$\varphi_k'(s) + i\psi_k'(s) \neq 0$$

(т. е. отсутствуют точки нулевого градиента). В этом случае граничный индекс определяется по правилам § 6, и вычисление его не нуждается в дальнейших пояснениях.

В том случае, когда имеются точки нулевого градиента исследуемой гармонической функции на контуре, т. е. имеются прообразы точек ветвления искомой аналитической функции на контуры искомой области, кратность граничной седловой точки определяется по правилам § 7. Применимость этих правил к обратной краевой задаче ограничивается тем, что в исследованиях § 7 контур области определения функции считается гладким. Поскольку здесь контур L_z является искомым, осуществимость этого условия нуждается в исследовании. Для простоты будем рассматривать случай одного граничного контура.

Пусть n — кратность нуля функции $f(z) - f(z_0)$, совпадающая с порядком первой, не обращающейся в нуль производной функции $\varphi(s) + i\psi(s)$ в точке нулевого градиента s_0, α_z — угол между дугами кривой L_z, встречающимися в точке z_0, α_w — угол между дугами данной кривой L_w. Согласно свойствам конформного отображения, мы будем иметь равенство:

$$\alpha_z n = \alpha_w + 2k\pi \quad (n > 1), \tag{10.1}$$

где k — некоторое целое положительное число. При этом, так как надо жено условие, что не только в искомой области, но и на ее контуре нет точек ветвления, то $k < n$. В последнем равенстве имеются две неизвестные величины: α_z и k. Для определенности постановки обратной краевой задачи одна из них должна быть задана. По смыслу постановки задачи нужно считать заданным целое число k. Это означает, что должны быть известны не только угол α_w проекции данного контура L_w на однолистную плоскость, который определяется по заданным контурным значениям $\varphi(s) + i\psi(s)$, но и листы римановой поверхности, на которых лежат дуги кривой L_w, встречающиеся в точке разветвления w_0, т. е. в окрестности точки w_0 должен быть задан элемент той римановой поверхности, на которой лежит контур L_w.

При предположениях, сделанных в § 7 относительно функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, точка w_0 будет для кривой L_w обыкновенной точкой (при n нечетном) или точкой возврата (при n четном). Таким образом, $\alpha_w = \pi$ для n нечетного и $\alpha_w = 2\pi$ — для n четного. Как указывалось выше, теория § 7 применима в том случае, когда кривая L_z — гладкая; следовательно, нужно положить $\alpha_z = \pi$. Отсюда вытекает, что целое число k должно быть равно $\frac{n}{2}$ для n четного и $\frac{n-1}{2}$ для n нечетного. Если это условие выполнено, то кратность граничной седловой точки нулевого градиента может быть определена по таблице § 7.

В случае, когда α_w — произвольный угол, $0 \leqslant \alpha_w \leqslant 2\pi$, и $k < n$ — любое целое положительное число, исследования § 7 неприменимы. Однако в этом случае можно решать задачу об определении числа точек ветвле-

ния для класса мероморфных функций. Для этого надо воспользоваться соотношением

$$2n(\infty) - \mu = 2 - \nu - p,$$

которое является частным случаем общей теоремы о порядках (см. § 8; здесь $a = \infty$). Кратности неполных разветвленных элементов, входящие в это соотношение, должны быть заданы. При этом число k формулы (10.1) и является кратностью неполного разветвленного элемента в точке w_0.

Итак, поставленная нами цель — дать способ определения числа точек ветвления искомой аналитической функции по ее значениям на неизвестном контуре — достигнута. Дальнейшее решение обратной краевой задачи не входит в предмет нашего исследования, однако в целях полноты укажем схематически на основные проблемы, стоящие на пути окончательного решения.

Первая проблема — конструирование той римановой поверхности, на которой контуры, задаваемые уравнениями $u = \varphi_k(s)$, $v = \psi_k(s)$, определяют область, подобную однолистной, т. е. такую, которая может быть взаимно однозначно и всюду, за исключением точек ветвления, конформно отображена на некоторую стандартную однолистную область, например, на плоскость с прямолинейными разрезами или с выключенными кругами. Данными проблемы являются: контур области, определяемый контурными значениями искомой функции точно, а также число и характер особенностей этой функции. Число точек ветвления, определяемое способом, указанным в настоящем параграфе, также нужно считать данным.

Первый вопрос, подлежащий решению, состоит в том, можно ли при заданных контурных значениях функции произвольно задавать особенности искомой функции. Простые примеры показывают, что ответ должен быть отрицательным. Данным контурным значениям можно поставить в соответствие минимальное число особенностей искомой функции. Число это можно определить по формуле (4.17), полагая в ней $\mu = 0$. Увеличивать число особенностей можно произвольно. (При этом будет увеличиваться и число точек ветвления.)

Если выбрано допустимое число особенностей и затем по формуле (4.17) — число точек ветвления, то принципиально возможно построить область, подобную однолистной, имеющую данный контур, данные особенности и данные точки ветвления. Однако это возможно не при всяком расположении особенностей и точек ветвления. Поэтому *второй вопрос*, возникающий здесь, — вопрос о допустимом расположении указанных точек. После того как область D_w построена, на основании общей теории конформных отображений и униформизации функций производится отображение ее на однолистную, для которой и решается затем обратная краевая задача.

Третий вопрос — о числе различных областей с заданным контуром, особенностями и точками ветвления. Это есть вопрос о числе решений обратной краевой задачи. Дело сводится к подсчету числа существенно различных областей, возникающих при различных способах скрепления листов римановой поверхности.

Все перечисленные вопросы в настоящее время не разрешены в общем виде и мы ограничимся сделанными указаниями. Для иллюстрации разработанных способов определения числа точек ветвления, а также общей схемы решения обратной краевой задачи, рассмотрим один пример.

Пример. Пусть краевые условия обратной задачи имеют вид (D_z^+ предполагается односвязной):

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda - \lambda\cos s, \\ \psi &= s - \lambda\sin s, \end{aligned} \quad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi) \tag{10.2}$$

где λ — положительный параметр; решение задачи ищется в классе функций, имеющих в D_z^+ логарифмическую точку разветвления.

Из условий (10.2) следует, прежде всего, что главная часть искомой функции $f(z)$ в указанной особой точке есть

$$\ln(z-a),$$

где a — аффикс этой точки.

Определим число критических точек функции $f(z)$. Для гармонической функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ справедливо основное соотношение

$$M - S = 2 - \nu + t - m \text{ *}. \tag{10.3}$$

Полагая в (10.3) $M = 1$, $\nu = 1$, получим:

$$S = m - t. \tag{10.4}$$

Числа m и t можно подсчитать, исходя из (10.2), на основании результатов § 6 и 7.

Из выражений $\varphi_s' = \lambda\sin s$, $\varphi_s'' = \lambda\cos s$ находим, что точка $s = 0$ есть точка минимума, а точка $s = \pi$ — точка максимума $\varphi(s)$. Для определения типа экстремума найдем знаки $\psi_s'(0)$ и $\psi_s'(\pi)$:

$$\psi_s'(0) = 1 - \lambda, \quad \psi_s'(\pi) = 1 + \lambda.$$

Так как $\lambda > 0$, то $\psi_s'(\pi) > 0$, откуда заключаем, что $s = \pi$ есть точка выхода и, следовательно, является обыкновенной для функции $u(x, y)$.

Знак $\psi_s'(0)$ зависит от λ; здесь возможны три случая:

1. $\lambda < 1$, $\psi_s'(0) > 0$; $s = 0$ — точка выхода. Таким образом, все точки $u(x, y)$ на L_z являются обыкновенными, т. е. $t = m = 0$.

2. $\lambda > 1$, $\psi_s'(0) < 0$; $s = 0$ — точка входа. Таким образом, функция $u(x, y)$ имеет на L_z одну точку относительного минимума, т. е. $m = 1$, $t = 0$.

3. $\lambda = 1$, $\psi_s'(0) = 0$; $s = 0$ — точка нулевого градиента; будем искать контур L_z так, чтобы он был гладким в точке $s = 0$ [см. (10.1)]. Тогда кратность этой точки нужно определять по таблице теоремы 7.1; полагая в этой таблице $n = 2$, $p = 2$, $\varphi_s^{(p)}(0) = \lambda > 0$, находим $t = \frac{n}{2} - 1 = 0$; таким образом, как и в случае 1, все точки $u(x, y)$ на L_z являются обыкновенными, т. е. $t = m = 0$.

Вывод. Функция $f(z)$ не имеет критических точек, если $\lambda < 1$; $f(z)$ имеет в D_z^+ одну критическую точку кратности 1, если $\lambda > 1$; при $\lambda = 1$

* Через t, как и выше, мы обозначаем число граничных седловых точек u на L_z.

имеется критическая точка $f(z)$ на L_z, которая соответствует значению $s = 0$.

Укажем, далее, путь решения поставленной обратной задачи. Отличие этой задачи от рассмотренной в работах ([3]) и ([4]) состоит в том, что в данном случае контур L_w, определенный соотношениями (10.2), является разомкнутым; однако ее решение может быть сведено к решению задачи, рассмотренной в работах ([3]) и ([4]).

Метод, которым мы будем пользоваться, был указан Г. Г. Тумашевым в предположении, что $f(z)$ не имеет критических точек в искомой области. Он состоит в следующем. В искомой области D_z^+ проводится разрез l, соединяющий логарифмическую точку разветвления с точкой контура L_z; этот разрез проводится вдоль линии уровня функции $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Разрезанная область D_0^+ отображается при помощи однозначной ветви функции $f(z)$ (эта ветвь определяется граничными значениями (10.2)) на бесконечную область D_w, ограниченную контуром L_w и образами l_w^+ и l_w^- берегов разреза l. Затем D_w отображается на конечную область, ограниченную простым замкнутым контуром, после чего решение производится обычным способом.

В случае отсутствия критических точек, образами l_w^+ и l_w^- берегов разреза l являются полупрямые, начинающиеся в концах L_w и направленные вдоль отрицательной вещественной оси; это следует из того, что $u(x, y)$ изменяется вдоль l монотонно. На рис. 1 изображена область D_w при $\lambda = 1$ (аналогичная картина будет и при $\lambda < 1$).

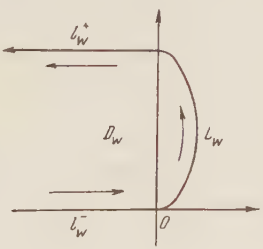


Рис. 1

Рассмотрим случай наличия критической точки $f(z)$ в D_z^+ ($\lambda > 1$). Положение указанной точки не определяется граничными значениями $f(z)$ и, следовательно, может быть выбрано произвольно. Мы будем предполагать, что эта точка расположена на разрезе l, причем ее аффикс обозначим через z_0 (число z_0 мы не фиксируем); пусть, далее, u^* — функция, определенная значениями u на l.

Учитывая строение линий уровня функции $u(x, y)$, проходящей через $z = z_0$, можно убедиться, что u^* не будет монотонной для всех точек l, как это было в случае $\lambda \leqslant 1$; именно, в точке $z = z_0$ функция u^* принимает относительное максимальное значение, величина которого составляет произвол решения. Мы будем решать задачу в предположении, что

$$0 < u^*_{|z=z_0} = A < \varphi(s_1),$$

где s_1 — отличный от нуля корень уравнения $s - \lambda \sin s = 0$. Учитывая сказанное, убеждаемся, что D_w имеет вид, изображенный на рис. 2.

Полученную область D_w можно отобразить на конечную область, применяя следующий прием. Дополним l_w и l_w^- так, чтобы получились раз-

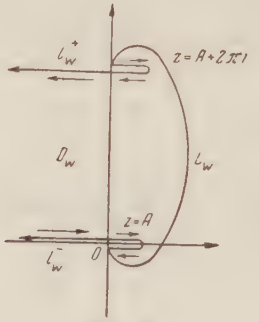


Рис. 2

резы, соединяющие точки $w = \infty$ с $w = A + 2\pi i$ и $w = \infty$ с $w = A$. Плоскость w с указанными разрезами можно рассматривать как четырехугольник с вершинами ∞, A, ∞, $A + 2\pi i$ (порядок, в котором выписаны эти вершины, определяет ориентацию границы четырехугольника). Отобразим указанный четырехугольник на верхнюю полуплоскость плоскости τ так, чтобы эти вершины преобразовались в точки 0, 1, ∞, -1.

Отображающая функция, получаемая по формуле Христофеля — Шварца, имеет вид:

$$w = 2 \ln \tau - \tau^2 + A + 1. \tag{10.5}$$

Эта функция отображает область D_w на конечную область D_τ, ограниченную образом L_τ контура L_w и отрезком вещественной оси $[-\tau_1, \tau_1]$, где τ_1 есть корень уравнения

$$2\pi i = 2 \ln \tau - \tau^2 + A - 1$$

(см. рис. 3). Применяя, наконец, отображение

$$\zeta = \tau^2, \tag{10.6}$$

получим область D_ζ, ограниченную простым замкнутым контуром L_ζ

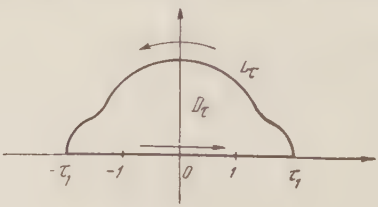


Рис. 3

(образом L_τ) и разрезанную вдоль отрезка вещественной оси $[0, \tau_1^2]$ (см. рис. 4).

Принимая во внимание (10.5) и (10.6), заключаем, что функция $\zeta = \zeta(z)$, определенная соотношением

$$f(z) = \ln\zeta - \zeta + A + 1, \tag{10.7}$$

производит взаимно однозначное отображение области D_z^* на область D_ζ.

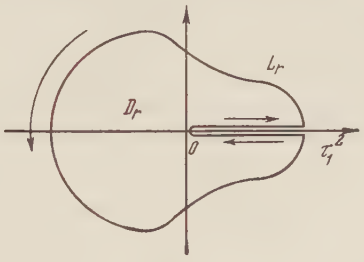


Рис. 4

Нетрудно показать, что отображение $\zeta = \zeta(z)$ останется взаимно однозначным, если из областей D_z^* и D_ζ удалить разрезы. Сформулируем результат: функция $\zeta = \zeta(z)$, определенная соотношением (10.7), производит взаимно однозначное и непрерывное отображение области D_z^+ на область, ограниченную простым, замкнутым контуром L_ζ; при этом отображении точки L_z и L_ζ соответствуют друг другу взаимно однозначно.

Пусть σ — дуга контура L_ζ, а $\zeta = \omega(\sigma)$ — уравнение L_ζ; из (10.2) и (10.7) получаем:

$$\lambda - \lambda\cos s + i(s - \lambda\sin s) = \ln\omega(\sigma) - \omega(\sigma) + A + 1. \tag{10.8}$$

Определяя из (10.8) s как функцию от σ, $s = s(\sigma)$, (существование и единственность решения $s = s(\sigma)$ следует из взаимно однозначного соответствия между L_z и L_ζ), мы приходим к обратной задаче в ее обычной постановке.

Приведем один частный случай, когда решение получается в явной форме. Именно, положим $A = \lambda - 1 - \ln\lambda$; уравнение (10.8) примет вид

$$is - \lambda e^{is} = \ln\frac{\omega(\sigma)}{\lambda} - \omega(\sigma). \tag{10.9}$$

Очевидно, что (10.9) будет удовлетворено, если положить

$$\omega(\sigma) = \lambda e^{is} \quad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi).$$

Отсюда видно, что L_ζ есть круг радиуса λ с центром в начале координат, но тогда

$$\omega(\sigma) = \lambda e^{i\frac{\sigma}{\lambda}}$$

и, наконец,

$$s = \frac{\sigma}{\lambda}. \tag{10.10}$$

Из (10.10) нетрудно убедиться, что искомая область D_z^+ есть круг единичного радиуса.

Поступило
10. IX. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, И. Л., 1951.

[2] Jenkins J. and Morse M., Contour equivalent pseudoharmonic functions, Amer. Journ. of Mathem., vol. 74, No. 1 (1952), 23—51.

[3] Нужин М. Т., О некоторых обратных краевых задачах и их применение к определению формы сечения скручиваемых стержней, Уч. Зап. Казанского гос. ун-та, т. 109, кн. 1 (1949), 97—120.

[4] Гахов Ф. Д., Об обратных краевых задачах, Доклады Ак. наук СССР, т. 86, № 4 (1952), 649—652.

[5] Тумашев Г. Г., Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления, Уч. Зап. Казанского гос. ун-та, т. 112, кн. 3 (1952), 3—42.

[6] Копырин М. А., Решение обратной задачи аэродинамики при наличии на контуре источников и стоков, Труды Казанского авиац. ин-та, т. 24 (1949), 128—138.

[7] Нужин М. Т., Об обтекании тел при наличии в потоке неподвижного вихря, Уч. Зап. Казанского гос. ун-та, т. 112, кн. 9 (1952), 39—50.

[8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.— Л., Г.Т.Т.И., 1952.

[9] Андрианов С. Н., О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций, Уч. Зап. Казанского ун-та, т. 113, кн. 10 (1953), 21—30.

[10] Гахов Ф. Д., Об обратных краевых задачах, Уч. Зап. Казанского гос. ун-та, т. 113, кн. 10 (1953), 9—20.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 241—252

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

Для нелинейной краевой задачи $y'' = f(x, y, y')$, $y(0) = y(\pi) = 0$ указываются новые условия существования решения. Для случая, когда краевая задача имеет нулевое решение, указываются условия существования второго ненулевого решения. Исследование проведено методами функционального анализа.

В работе рассматривается вопрос о существовании решения краевой задачи

$$y'' + f(x, y, y') = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{1}$$

Эта задача исследовалась С. Н. Бернштейном (1), Биркгофом и Келлогом (2), Чинквини, Тонелли и другими авторами (библиографию и формулировки основных результатов см. в (3), 109—119).

В настоящей работе мы показываем, как задача (1) может быть исследована общими методами нелинейного функционального анализа. В результате применения этих методов, с одной стороны, получаются теоремы о существовании по крайней мере одного решения задачи (1), с другой стороны, для случая $f(x, 0, 0) \equiv 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ получаются теоремы о существовании ненулевого второго решения.

Отметим, что применяемый прием носит общий характер; этот прием позволяет исследовать и другие аналогичные краевые задачи, например, для уравнения вида

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Всюду в работе предполагается, что функция $f(x, y, v)$ непрерывна по совокупности переменных в полосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y, v < \infty$ и удовлетворяет условиям:

$$f(x, y, v) \leqslant \sigma_1 |y| + \sigma_2 |v| + \psi(x) \qquad \text{при } y \geqslant 0, \tag{2}$$

$$f(x, y, v) \geqslant -\sigma_1 |y| - \sigma_2 |v| - \psi(x) \quad \text{при } y \leqslant 0, \tag{3}$$

где $\psi(x)$ суммируема:

$$\int_0^\pi \psi(x)\, dx = \int_0^\pi |\psi(x)|\, dx = a_0 < \infty,$$

а σ_1, σ_2 — неотрицательные числа, причем

$$\sigma_1 + \sigma_2 < 1. \tag{4}$$

В предположениях, аналогичных (2) и (3), задача (1) была исследована Тонелли (4), который предполагал, что любому (достаточно малому!) σ соответствует такая суммируемая функция $\psi(x)$, для которой условия (2) и (3) выполнены при $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Из доказательства, приведенного в (3), вытекает, что фактически следовало предполагать выполненным условие:

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leqslant \frac{1}{\pi(\pi+1)}.$$

Последнее предположение, конечно, более ограничительно, чем условие (4).

Отметим также, что в определенном смысле ограничение (4) нельзя ослабить, так как при $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ краевая задача (1) может не иметь решений. Примером может служить задача:

$$y'' + y + 3\cos 2x = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

решение которой, если бы оно существовало, имело бы вид:

$$y(x) = a\sin x + b\cos x + \cos 2x,$$

и краевые условия привели бы к противоречивым равенствам:

$$b + 1 = 0, \quad -b + 1 = 0.$$

1. Обозначим через r_0 число

$$r_0 = \frac{a_0\sqrt{\pi}}{2(1-\sigma_1-\sigma_2)}. \tag{5}$$

На протяжении всей работы мы будем доказывать теоремы о существовании решений $y(x)$ задачи (1), для которых

$$|y(x)| \leqslant \frac{r_0\sqrt{\pi}}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{6}$$

Но тогда из условий (2) и (3) будет следовать, что для этих решений

$$|y'(x)| \leqslant a_0 + (\sigma_1\pi + \sigma_2)\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{7}$$

В предположении противного (аналогичные по существу рассуждения см., например, в (3), стр. 116) найдется такая точка $x_0 \in [0, \pi]$, что

$$|y'(x_0)| > a_0 + (\sigma_1\pi + \sigma_2)\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2}, \tag{8}$$

причем без ограничения общности можно считать, что $y'(x_0) > 0$, $y(x_0) \geqslant 0$. Отсюда следует, что точка x_0 является левым концом некоторого сегмента $[x_0, \xi_2] \subset [0, \pi]$ такого, что $y'(\xi) > 0$ при $x_0 \leqslant \xi < \xi_2$, $y'(\xi_2) = 0$, $y(\xi) \geqslant 0$ при $x_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Из условия (2) вытекает:

$$y'(x_0) = -\int_{x_0}^{\xi_2} y''(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{x_0}^{\xi_2} f[\xi, y(\xi), y'(\xi)]\,d\xi \leqslant \sigma_1\int_{x_0}^{\xi_2} y(\xi)\,d\xi + \sigma_2\int_{x_0}^{\xi_2} y'(\xi)\,d\xi + \int_{x_0}^{\xi_2}\psi(\xi)\,d\xi.$$

т. е.

$$y'(x_0) \leqslant \sigma_1\pi\cdot\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2} + \sigma_2\cdot\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2} + a_0,$$

что противоречит (8).

В силу (6) и (7), нас могут интересовать значения функции $f(x, y, v)$ лишь при

$$|y| \leqslant \frac{r_0\sqrt{\pi}}{2}, \quad |v| \leqslant a_0 + (\sigma_1\pi + \sigma_2)\frac{r_0\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9}$$

Поэтому можно было с самого начала предполагать, что условия (2) и (3) выполнены лишь при y и v, удовлетворяющих неравенствам (9).

Более важный вывод из проведенных рассуждений заключается в том, что в дальнейшем мы можем без ограничения общности считать, что функция $f(x, y, v)$ равномерно ограничена во всей полосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y, v < \infty$:

$$|f(x, y, v)| \leqslant M. \tag{10}$$

В противном случае мы переопределили бы функцию $f(x, y, v)$ при y, v) не удовлетворяющих (9), и доказали бы теоремы существования для задачи (1) с переопределенной $f(x, y, v)$; эти решения, в силу (6) и (7), были бы решениями и первоначальной задачи.

2. Через $g_n(x)$, $e_n(x)$ ниже обозначаются следующие полные в $L^2([0, \pi])$ ортонормальные системы:

$$g_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. Через $G(x, s)$ обозначается функция Грина краевой задачи

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Как известно,

$$G(x, s) = \frac{1}{\pi}\begin{cases}(s - \pi)x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s,\\ (x - \pi)s & \text{при } s \leqslant x \leqslant \pi,\end{cases}$$

причем $G(x, s)$ представима абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$G(x, s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n(x)\,e_n(s)}{n^2}.$$

Введем в рассмотрение два линейных оператора:

$$A\varphi(x) = -\int_0^{\pi} G(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

и

$$H\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\varphi(s)\,e_n(s)\,ds\cdot e_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi, e_n)}{n}e_n(x).$$

Отметим следующие свойства операторов A и H, которые будут использованы в дальнейшем.

Оператор A действует из пространства L (суммируемых на $[0, \pi]$ функций) в пространство C (непрерывных на $[0, \pi]$ функций) и вполне непрерывен. Функции $A\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in L$) имеют непрерывные производные. Оператор A, если его рассматривать в L^2, положительно определен и вполне непрерывен, норма его равна единице.

Оператор H определен на L^2, причем

$$H^2\varphi = A\varphi \quad (\varphi \in L^2). \tag{11}$$

Наконец, оператор H действует из пространства L^2 в пространство C и вполне непрерывен. В доказательстве нуждается только последнее утверждение.

Из неравенства Буняковского и равенства Парсеваля следует:

$$\left|\sum_{n=k}^{p}\frac{(\varphi, e_n)}{n}e_n(x)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=k}^{p}\frac{e_n^2(x)}{n^2}}\cdot\sqrt{\sum_{n=k}^{p}|(\varphi, e_n)|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=k}^{p}\frac{e_n^2(x)}{n^2}}\cdot\|\varphi\|_{L^2}.$$

Поэтому ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi, e_n)}{n}e_n(x)$$

сходятся абсолютно и равномерно не только относительно $x \in [0, \pi]$, но и относительно $\varphi \in L^2$, $\|\varphi\| \leqslant 1$. Отсюда вытекает, что оператор H действует из L^2 в C и вполне непрерывен. Так как

$$|H\varphi(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi, e_n)}{n}e_n(x)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n^2(x)}{n^2}}\|\varphi\|_{L^2} = \sqrt{|G(x,x)|}\cdot\|\varphi\|_{L^2}$$

и

$$|G(x,x)| \leqslant \frac{\pi}{4},$$

то

$$\|H\varphi(x)\|_C \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\|\varphi\|_{L^2} \quad (\varphi \in L^2). \tag{12}$$

Из равномерной сходимости рассматривавшихся рядов вытекает также, что

$$H\varphi(0) = H\varphi(\pi) = 0 \qquad (\varphi \in L^2). \tag{13}$$

Пусть $g \in L$. Тогда скалярное произведение

$$(H\varphi, g) = \int_0^{\pi} H\varphi(x)\, g(x)\, dx \quad (\varphi \in L^2)$$

определяет на L^2 непрерывный функционал. Определим на L оператор H^* равенством

$$(H\varphi, g) = (\varphi, H^*g) \quad (\varphi \in L^2,\ g \in L).$$

Оператор H^* будет действовать из L в пространство L^2. Так как оператор H, если его рассматривать в L^2, самосопряжен, то

$$H^*g = Hg \quad (g \in L \cap L = L^2). \tag{14}$$

Из общей теории операторов следует, что оператор H^* вполне непрерывен вместе с оператором H.

Рассмотрим теперь оператор HH^*. Этот оператор определен на всем L, действует из L в C и непрерывен. В силу (14), оператор HH^* на плотном в L множестве принимает те же значения, которые принимает непрерывный оператор A. Поэтому на всем L операторы A и HH^* принимают

одинаковые значения:

$$HH^*\varphi = A\varphi \quad (\varphi \in L). \tag{15}$$

Представление (15) естественно называть расщеплением оператора A. Ряд общих теорем о расщеплении линейных интегральных операторов автор установил ранее в связи с другими задачами [см. (5), стр. 75].

3. Определим в L^2 изометрический оператор V формулой

$$V\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, e_n)\, g_n(x) \quad (\varphi \in L^2).$$

Ниже мы используем следующее свойство оператора V: если функция $H\varphi(x)$ $(\varphi \in L^2)$ имеет непрерывную производную, то

$$[H\varphi(x)]' = V\varphi(x). \tag{16}$$

Для доказательства разложим функцию $[H\varphi(x)]' = \psi(x)$ в ряд по $g_i(x)$:

$$[H\varphi(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi, g_n)\, g_n(x).$$

Равенства (13) позволяют вычислить коэффициенты (ψ, g_n) интегрированием по частям:

$$(\psi, g_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} [H\varphi(x)]'\, dx = 0$$

и

$$(\psi, g_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot [H\varphi(x)]'\, dx =$$

$$= n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} H\varphi(x) \cdot \sin nx\, dx = n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, e_k)}{k} e_k,\ e_n \right) = (\varphi, e_n).$$

Теперь равенство (16) очевидно.

4. Обозначим через E пространство вектор-функций $w = \{y(x), v(x)\}$, где $y(x) \in C$, $v(x) \in L^2$. Норму зададим равенством

$$\| w \|_E = \| y \|_C + \| v \|_{L^2}.$$

Определим оператор f равенством

$$fw = f[x, y(x), v(x)] \quad (y(x) \in C, \quad v(x) \in L^2).$$

В силу условия (10), оператор f действует из E в пространство L. Покажем*, что он непрерывен и ограничен**.

Пусть последовательность $w_n = \{y_n(x), v_n(x)\}$ сильно сходится в E к $w_0 = \{y_0(x), v_0(x)\}$. Покажем сначала, что функции fw_n сходятся по мере к функции fw_0.

Пусть заданы $\varepsilon, \eta > 0$. Можно указать такое множество $\mathcal{E} \subset [0, \pi]$, что $\operatorname{mes} \mathcal{E} < \frac{\varepsilon}{2}$ и что $|v_0(x)| \leqslant a$ $(x \overline{\in} \mathcal{E})$, где a — некоторая постоянная.

* Оператор f изучался многими авторами. Случай, когда он действует из E в L, кажется, не встречался.

** Оператор называется ограниченным, если ограничены в совокупности нормы его значений на каждом ограниченном множестве. Напомним, что для нелинейных операторов ограниченность из непрерывности не вытекает.

Функция $f(x, y, v)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|y| \leqslant \|y_0\|_C + 1$, $|v| \leqslant a + 1$ равномерно непрерывна, т. е. можно указать такое $\delta > 0$ ($\delta < 1$), что при $|y - y_0(x)| \leqslant \delta$, $|v - v_0(x)| \leqslant \delta$ будет справедливо неравенство:

$$|f(x, y, v) - f[x, y_0(x), v_0(x)]| < \eta \quad (x \overline{\in} \mathcal{E}). \tag{17}$$

Выберем N так, чтобы при $n \geqslant N$ имело место:

$$\|y_n(x) - y_0(x)\|_C < \delta, \quad \|v_n(x) - v_0(x)\|_{L^2} < \delta \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{18}$$

Через F_n ($n > N$) обозначим множество тех $x \in [0, \pi]$ $\mathcal{E}$, при которых $|v_n(x) - v_0(x)| \geqslant \delta$. Очевидно,

$$\|v_n(x) - v_0(x)\|_{L^2} \geqslant \sqrt{\int_{F_n} |v_n(x) - v_0(x)|^2 \, dx} \geqslant \delta \sqrt{\operatorname{mes} F_n},$$

откуда, в силу (18), $\operatorname{mes} F_n < \frac{\varepsilon}{2}$. При $x \overline{\in} F_n + \mathcal{E}$

$$|y_n(x) - y_0(x)| < \delta, \quad |v_n(x) - v_0(x)| < \delta,$$

откуда, в силу (17), при $x \overline{\in} F_n + \mathcal{E}$

$$|f[x, y_n(x), v_n(x)] - f[x, y_0(x), v_0(x)]| < \eta.$$

Так как $\operatorname{mes}(F_n + \mathcal{E}) < \varepsilon$, то сходимость по мере доказана.

Непрерывность оператора f в точке w_0 означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi |f[x, y_n(x), v_n(x)] - f[x, y_0(x), v_0(x)]| \, dx = 0.$$

Мы показали, что подинтегральные функции сходятся по мере к нулю. Предельный переход под знаком интеграла обоснован, так как подинтегральные функции, в силу (10), ограничены числом $2M$.

Ограниченность оператора f также следует из (10).

5. Определим еще один оператор:

$$B\varphi(x) = H^* f[x, H\varphi(x), V\varphi(x)].$$

Из установленных выше свойств операторов H, H^*, V и f непосредственно вытекает, что *оператор B действует в пространстве L^2 и вполне непрерывен.*

6. Обозначим через S сферу радиуса r_0 (см. п. 1) пространства L^2. В силу (2) и (3), при $\varphi \in S$

$$(B\varphi, \varphi) = (H^* f[x, H\varphi, V\varphi], \varphi) = (f[x, H\varphi, V\varphi], H\varphi) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_1(H\varphi, H\varphi) + \sigma_2(|H\varphi|, |V\varphi|) + (\psi, |H\varphi|).$$

Очевидны следующие неравенства:

$$(H\varphi, H\varphi) = (A\varphi, \varphi) \leqslant \|\varphi\|^2_{L^2} = r_0^2 = \frac{\pi a_0^2}{4(1 - \sigma_1 - \sigma_2)^2},$$

$$(|H\varphi|, |V\varphi|) \leqslant \|H\varphi\|_{L^2} \cdot \|V\varphi\|_{L^2} \leqslant r_0^2 = \frac{\pi a_0^2}{4(1 - \sigma_1 - \sigma_2)^2},$$

$$(\psi, |H\varphi|) \leqslant \|H\varphi\|_C \|\psi\|_L \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} r_0 \cdot a_0 = \frac{\pi a_0^2}{4(1 - \sigma_1 - \sigma_2)}.$$

В первом из них знак равенства имеет место лишь в случае, когда

$$\varphi(x) = r_0 e_1(x) = r_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x,$$

но тогда, как легко видеть, во втором нет знака равенства. Поэтому

$$(B\varphi, \varphi) < (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\pi a_0^2}{4(1-\sigma_1-\sigma_2)^2} + \frac{\pi a_0^2}{4(1-\sigma_1-\sigma_2)} = \frac{\pi a_0^2}{4(1-\sigma_1-\sigma_2)^2},$$

т. е.

$$(B\varphi, \varphi) < (\varphi, \varphi) \quad (\varphi \in S). \tag{19}$$

Значит, векторное поле $B\varphi - \varphi$ не имеет на S нулевых векторов. Вычислим вращение этого поля. Определение вращения вполне непрерывного векторного поля и основные его свойства см., например, в ([5]), стр. 82. Понятие вращения векторного поля на границах областей эквивалентно понятию топологической степени Лере — Шаудера ([6]) отображений областей в банаховых пространствах.

ЛЕММА 1. *Вращение поля $B\varphi - \varphi$ на S равно единице.*

Доказательство. В силу (19), функция

$$\Phi(\varphi, \lambda) = \lambda B\varphi - \varphi \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \varphi \in S)$$

не принимает нулевых значений. Она осуществляет гомотопный переход от поля $B\varphi - \varphi$ к полю $-\varphi$. Поэтому вращение поля $B\varphi - \varphi$ на S равно вращению на S поля $-\varphi$, которое равно единице.

Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает, что *уравнение $\varphi = B\varphi$ имеет по крайней мере одно решение $\varphi_0 \in L^2$, $\|\varphi_0\|_{L^2} < r_0$.*

7. Применяя к равенству $\varphi_0 = B\varphi_0$ оператор H, получим:

$$H\varphi_0(x) = HH^* f[x, H\varphi_0(x), V\varphi_0(x)].$$

Из свойств оператора f (см. п. 4) следует, что

$$f[x, H\varphi_0(x), V\varphi_0(x)] \in L.$$

Отсюда, в силу (15),

$$H\varphi_0(x) = Af[x, H\varphi_0(x), V\varphi_0(x)].$$

Поэтому функция $H\varphi_0(x)$ имеет непрерывную производную и, в силу (16),

$$V\varphi_0(x) = [H\varphi_0(x)]'.$$

Следовательно,

$$H\varphi_0 = Af[x, H\varphi_0(x), [H\varphi_0(x)]'].$$

Введем обозначение $H\varphi_0(x) = y_0(x)$. Тогда

$$y_0(x) = Af[x, y_0(x), y_0'(x)],$$

т. е.

$$y_0(x) = -\int_0^\pi G(x, s) f[s, y_0(s), y_0'(s)]\, ds,$$

откуда

$$y_0''(x) = -f[x, y_0(x), y_0'(x)], \quad y_0(0) = y_0(\pi) = 0.$$

Значит, $y_0(x) = H\varphi_0(x)$ является решением задачи (1). Нами доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция* $f(x, y, v)$ *непрерывна по совокупности переменных* $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y, v < \infty$ *и удовлетворяет условиям*

$$f(x, y, v) \leqslant \sigma_1 |y| + \sigma_2 |v| + \psi(x) \quad \text{при} \quad y \geqslant 0, \tag{2}$$

$$f(x, y, v) \geqslant -\sigma_1 |y| - \sigma_2 |v| - \psi(x) \quad \text{при} \quad y \leqslant 0, \tag{3}$$

где $\psi(x) \in L$, *а* σ_1, σ_2 — *неотрицательные числа, причем*

$$\sigma_1 + \sigma_2 < 1. \tag{4}$$

Тогда краевая задача

$$y'' + f(x, y, y') = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{1}$$

имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство теоремы 1 проводилось в предположении, что выполнено условие (10). Это условие, как было показано в п. 1, не ограничивало общности выводов, если решение $y_0(x)$ удовлетворяло неравенству (6). Справедливость (6) вытекает из (12):

$$|y_0(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|\varphi_0\|_{L^2} < \frac{\sqrt{\pi}}{3} r_0.$$

Заметим, что решений, не удовлетворяющих (6), задача (1) не имеет.

Теорема 1 могла быть доказана проще. Можно было оператор f рассматривать как оператор, действующий из E в L^2, а оператор B записывать в виде

$$B\varphi = Hf[x, H\varphi, V\varphi].$$

Существенную роль примененные усложнения играют в доказательстве теоремы 2.

8. Предположим дополнительно, что существуют производные $f'_y(x, y, v)$, $f'_v(x, y, v)$, непрерывные по совокупности переменных $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-a \leqslant y, v \leqslant a$, где a — некоторое число. Определим на E оператор g равенством

$$gw(x) = f'_y(x, 0, 0)\, y(x) + f'_v(x, 0, 0)\, v(x) \quad (w(x) = \{y(x), v(x)\}).$$

Оператор g, очевидно, действует из E в L и непрерывен.

Докажем, что *оператор* g *является производной Фреше оператора* f *в точке* θ:

$$\lim_{\|w\|_E \to 0} \frac{\|fw - f\theta - gw\|_L}{\|w\|_E} = 0.$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем число $\delta\ (0 < \delta < a)$ так, что при $|y| < \delta$, $|v| < \delta$

$$|f'_y(x, y, v) - f'_y(x, 0, 0)| < \frac{\varepsilon}{\pi} \tag{20}$$

$$|f'_v(x, y, v) - f'_v(x, 0, 0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}. \tag{21}$$

Через $v_\delta(x)$ будем обозначать функции, определенные по функциям $v(x) \in L^2$ равенством

$$v_\delta(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } |v(x)| < \delta, \\ 0, & \text{если } |v(x)| \geqslant \delta. \end{cases}$$

Пусть $y(x) \in C(\|y\|_C < \delta)$, $v(x) \in L^2$. Тогда существует такая функция $\theta(x)$, $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$, что

$$f[x, y(x), v_\delta(x)] - f(x, 0, 0) =$$
$$= f_y'[x, \theta(x) y(x), \theta(x) v_\delta(x)] y(x) + f_v'[x, \theta(x) y(x), \theta(x) v_\delta(x)] v_\delta(x).$$

Функцию $\theta(x)$, между прочим, всегда можно считать измеримой (если ее значения определять, например, как наименьшее θ из $[0,1]$, при котором справедлива формула Лагранжа).

Запишем разность $fw - f\theta - gw$ $(w(x) = \{y(x), v(x)\}$, $\theta = \{\theta, \theta\})$ в виде

$$fw - f\theta - gw = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x),$$

где

$$I_1(x) = f[x, y(x), v(x)] - f[x, y(x), v_\delta(x)],$$
$$I_2(x) = \{f_y'[x, \theta(x) y(x), \theta(x) v_\delta(x)] - f_y'(x, 0, 0)\} y(x),$$
$$I_3(x) = \{f_v'[x, \theta(x) y(x), \theta(x) v_\delta(x)] - f_v'(x, 0, 0)\} v_\delta(x),$$
$$I_4(x) = f_v'(x, 0, 0)[v_\delta(x) - v(x)].$$

Оценим каждое $I_k(x)$ отдельно. Из (10) следует, что

$$|I_1(x)| \leqslant \frac{2M}{\delta^2} v^2(x),$$
$$\|I_1(x)\|_L \leqslant \frac{2M}{\delta^2} \|v\|_{L^2}^2.$$

Из (20) и (21) вытекает:

$$|I_2(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} |y(x)|,$$

$$\|I_2(x)\|_L \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi |y(x)|\, dx \leqslant \varepsilon \|y\|_C$$

и

$$|I_3(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} |v(x)|,$$

$$\|I_3(x)\|_L \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi |v(x)|\, dx \leqslant \varepsilon \|v\|_{L^2}.$$

Через $\mathcal{E}$ обозначим множество тех $x \in [0, \pi]$, в которых $v_\delta(x) \neq v(x)$. Так как

$$\|v\|_{L^2} = \left\{\int_0^\pi |v(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \delta \sqrt{\operatorname{mes} \mathcal{E}},$$

то

$$\|v - v_\delta\|_L = \int_{\mathcal{E}} |v(x)|\, dx \leqslant \sqrt{\operatorname{mes} G} \cdot \|v\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\delta} \|v\|_{L^2}^2,$$

откуда

$$\|I_4 x\|_L \leqslant b \|v\|_{L^2}^2,$$

где

$$b = \frac{1}{\delta} \max_{[0,\pi]} |f_v'(x, 0, 0)|.$$

Таким образом,

$$\| fw - f0 - gw \|_L \leqslant \sum_{k=1}^{4} \| I_k(x) \|_L \leqslant \varepsilon \| w \|_E + \left(\frac{2M}{\delta^2} + b \right) \| w \|_E^2,$$

откуда

$$\overline{\lim_{\|w\|_E \to 0}} \frac{\| fw - f0 - gw \|_L}{\| w \|_E} \leqslant \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то доказательство завершено.

9. Рассмотрим оператор B_1:

$$B_1\varphi = H^* g(H\varphi, V\varphi) =$$
$$= H^* [f_u'(x, 0, 0) H\varphi(x)] + H^* [f_v'(x, 0, 0) V\varphi(x)].$$

Этот линейный оператор, очевидно, действует в пространстве L^2. Покажем, что B_1 *является производной Фреше в точке* 0 *оператора* B, *также действующего в* L^2.

Доказательство очевидно:

$$\lim_{\|\varphi\|_{L^2} \to 0} \frac{\| B\varphi - B0 - B_1\varphi \|_{L^2}}{\| \varphi \|_{L^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \| H^* \| \cdot \lim_{\|\varphi\|_{L^2} \to 0} \frac{\| f(H\varphi, V\varphi) - f0 - g(H\varphi, V\varphi) \|_L}{\| H\varphi \|_C + \| V\varphi \|_{L^2}} \cdot \frac{\| H\varphi \|_C + \| V\varphi \|_{L^2}}{\| \varphi \|_{L^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \| H^* \| \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 \right) \lim_{\|w\|_E \to 0} \frac{\| fw - f0 - gw \|_L}{\| w \|_E} = 0.$$

10. Будем предполагать дополнительно, что $f(x, 0, 0) \equiv 0$. Тогда задача (1) будет иметь тривиальное нулевое решение. Нулевая функция $\varphi_0(x) \equiv 0$ будет решением и уравнения $\varphi = B\varphi$. Вычислим индекс [см. (5), стр. 85] этого решения.

Для простоты ограничимся случаем, когда $f_u'(x, 0, 0) \equiv \alpha \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$. В этом случае оператор B_1 имеет вид

$$B_1\varphi = \alpha A\varphi + H^* [f_v'(x, 0, 0) \cdot V\varphi(x)].$$

ЛЕММА 2. *Пусть* α *принадлежит одному из интервалов*

$$(4k^2 - 4k + 1, \ 4k^2) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

а функция $f_v'(x, 0, 0)$ *настолько мала* (*например, тождественный нуль*), *что*

$$|f_v'(x, 0, 0)| < \left| 1 - \frac{\alpha}{n^2} \right| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Тогда индекс нулевого решения уравнения $\varphi = B\varphi$ *равен* -1.

Доказательство. При выполнении условия (22)

$$\| B_1\varphi - \alpha A\varphi \|_{L^2} < \| \alpha A\varphi - \varphi \|_{L^2} \quad (\varphi \in L^2,\ \| \varphi \| > 0), \tag{23}$$

так как

$$\| \alpha A\varphi - \varphi \|^2_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n^2}\right)^2 |(\varphi, e_n)|^2 \geqslant \min_n \left(1 - \frac{\alpha}{n^2}\right)^2 \cdot \| \varphi \|^2_{L^2}$$

и

$$\| H^* [f'_v(x, 0, 0)\ V\varphi] \|_{L^2} \leqslant \| f'_v(x, 0, 0) \cdot V\varphi \|_{L^2} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{[0,\pi]} |f'_v(x, 0, 0)| \cdot \| \varphi \|_{L^2}.$$

Поэтому 1 не является собственным числом оператора B. Значит [см. (6), также (5), стр. 86], индекс нулевого решения уравнения $\varphi = B\varphi$ равен вращению на единичной сфере $S_0 \subset L^2$ линейного поля $B_1\varphi - \varphi$.

Из (23) вытекает, что все векторы

$$\Phi(\varphi, \lambda) = \alpha A\varphi + \lambda H^* [f'_v(x, 0, 0)\, H\varphi(x)] - \varphi \quad (\varphi \in S_0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

отличны от нуля. Следовательно, поле $B_1\varphi - \varphi$ гомотопно на S_0 полю $\alpha A\varphi - \varphi$ и искомый индекс равен индексу нулевого решения уравнения $\varphi = \alpha A\varphi$. Этот индекс, в свою очередь, равен $(-1)^\beta$, где β — сумма кратностей собственных значений оператора A, больших, чем $\frac{1}{\alpha}$. Таких собственных значений нечетное число (так как α лежит в одном из интервалов $(4k^2 - 4k + 1, 4k^2)$) и все они простые). Поэтому $(-1)^\beta = -1$.

Лемма доказана.

11. В условиях леммы 1 вращение поля $B\varphi - \varphi$ на сфере S радиуса r_0 равно 1. Если внутри сферы S есть единственное решение уравнения $\varphi = B\varphi$, то индекс этого решения также равен единице. Поэтому, если индекс нулевого решения равен -1, то внутри S, кроме нулевого решения $\varphi_0(x)$, есть по крайней мере еще одно ненулевое решение $\tilde{\varphi}(x)$. Функция $\tilde{y}(x) = H\tilde{\varphi}(x)$ будет ненулевым решением задачи (1).

Эти рассуждения и лемма 2 приводят нас к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть производные* $f'_y(x, y, v)$, $f'_v(x, y, v)$ *непрерывны по совокупности переменных* $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-a \leqslant y$, $v \leqslant a$, *где* a — *некоторое положительное число. Пусть, наконец, число* $\alpha \equiv f'_y(x, 0, 0)$ *принадлежит одному из интервалов* $(4k^2 - 4k + 1, 4k^2)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *а функция* $f'_v(x, 0, 0)$ *настолько мала, что*

$$|f'_v(x, 0, 0)| < \left|1 - \frac{\alpha}{n^2}\right| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Тогда краевая задача (1) *имеет, кроме нулевого, по крайней мере одно ненулевое решение.*

Поступило
29. XI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Об уравнениях вариационного исчисления, Успехи матем. наук, вып. VIII (1940), 32—74.
[2] Birkhoff G. D., Kellog O. D., Invariant points in function space, Trans. Amer. Math. Soc., 23 (1922), 96—115.
[3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения. II, ИЛ, 1954.
[4] Tonelli L., Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$, Ann. delle R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), 8 (1939), 75—88.
[5] Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа, Успехи матем. наук, т. IX, вып. 3 (1954), 57—114.
[6] Лерей Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, Успехи матем. наук, т. I, вып. 13—14 (1946), 71—95.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 253–274

Ю. М. СМИРНОВ

О СИЛЬНО-ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ *

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе исследуются топологические (в частности, метрические) пространства, удовлетворяющие условию сильной паракомпактности (во всякое открытое покрытие можно вписать звездно-конечное открытое покрытие), выясняются связи между сильной паракомпактностью и другими основными топологическими свойствами (аксиома счетности, финальная компактность и др.), а также с отображениями данного пространства в пространства типа Бэра.

В последнее время под компактностью в широком смысле этого слова стали понимать свойство топологического пространства иметь ко всякому своему открытому покрытию вписанное в него открытое покрытие того или иного рода: это могут быть и конечные покрытия — тогда пространство называется бикомпактным **, и покрытия не более чем счетные, — тогда пространство называется финально-компактным, и, ставшие уже употребительными, локально-конечные покрытия *** — в этом случае пространство называется паракомпактным.

Целью настоящей работы является исследование компактности особого рода, основанной на таких покрытиях, каждый элемент которых пересекается лишь с конечным числом элементов данного покрытия, т. е. имеет лишь конечное число соседей; такие покрытия называют звездно-конечными, а пространства — сильно-паракомпактными или же S-пространствами.

Итак, *топологическое пространство называется сильно-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое звездно-конечное покрытие.*

Так как всякое звездно-конечное открытое покрытие оказывается локально-конечным, то каждое сильно-паракомпактное пространство является паракомпактным. Роль паракомпактных пространств в абстрактной топологии все более и более возрастает: они составляют достаточно широкий класс топологических пространств, охватывающий как биком-

---

* Результаты этой работы были получены мною еще в 1951 г. и составляли первую и третью части моей кандидатской диссертации «Проблема метризации и смежные вопросы топологии», первая часть которой напечатана в Успехах математических наук [см. (1)].

** Возможность вписать в открытое покрытие γ пространства R покрытие данной мощности эквивалентна возможности выбирать из покрытия γ подпокрытие той же мощности.

*** Покрытие топологического пространства называется локально-конечным, если каждая точка имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным видом элементов данного покрытия.

пактные, так и метрические пространства [см. (1), стр. 109]; многие важные результаты абстрактной топологии, например, результаты, связанные с размерностью, с классификацией отображений [см. (2)], и другие, справедливые для бикомпактных пространств, распространяются на пространства паракомпактные. Поэтому представляет интерес и изучение того более узкого класса топологических пространств, которому посвящена настоящая работа.

В первом параграфе в основном рассматриваются сильно-паракомпактные топологические пространства, во втором – сильно-паракомпактные метрические пространства. Основным результатом первого параграфа является характеристика сильно-паракомпактных регулярных пространств посредством замкнутых звездно-конечных, а также звездно-счетных как замкнутых, так и открытых покрытий.

Естественно назвать систему множеств топологического пространства R звездно-счетной, если каждый ее элемент пересекается не более чем со счетным числом других элементов данной системы. Звездно-счетную (соответственно звездно-конечную) систему множеств назовем замкнутой в том лишь случае, когда сумма *любого* числа ее элементов является замкнутым множеством.

Теорема 1 утверждает, что *для любого регулярного пространства возможность вписать в любое открытое его покрытие покрытие одного из только что названных видов эквивалентна сильной паракомпактности.* Все остальные теоремы первого параграфа являются следствиями этой.

Теорема 2 утверждает, что *всякое регулярное финально-компактное пространство сильно-паракомпактно.*

Далее оказывается, что *в случае связных метрических пространств сильная паракомпактность эквивалентна наличию счетной базы* (теорема 3), *а в случае локально-связных метрических пространств сильная паракомпактность эквивалентна локальной аксиоме счетности**(теорема 4)**.

В конце первого параграфа приводятся примеры, показывающие, что в общем случае ни локальная аксиома счетности, ни некоторые другие аналогичные свойства не эквивалентны сильной паракомпактности.

Второй параграф посвящен поискам не связанной с покрытиями какой-нибудь теоретико-множественной характеристики сильной паракомпактности метрических пространств. Лишь первая теорема этого параграфа выходит из этих рамок, относясь по существу к уже напечатанной части диссертации [см. (1)]: в ней дается *необходимое и достаточное условие для того, чтобы топологическое T_1-пространство было метризуемым пространством размерности нуль (определенной с помощью покрытий).* Таким условием является наличие базы, распадающейся на не более чем счетное число покрытий кратности 1.

Далее рассматривается обобщенное бэровское пространство B^{τ} веса τ, состоящее из последовательностей $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$, элементами которых являются элементы какого-либо множества данной мощности τ: рас-

* Говорят, что пространство удовлетворяет локальной аксиоме счетности, если у каждой его точки имеется окрестность со счетной базой [см. (3), стр. 86].

** Замечание при корректуре. После сдачи работы в печать выяснилось, что теоремы 2, 3, 4 были доказаны ранее Морита [см. (6)].

стояние между любыми двумя его последовательностями λ и λ' равно $\frac{1}{k}$, где k есть наименьшее из таких индексов, для которых $\lambda_k \neq \lambda'_k$. В силу первой теоремы, B^τ нульмерно, а потому и сильно-паракомпактно. Оказывается, что *всякое сильно-паракомпактное метрическое пространство можно так непрерывно отобразить в некоторое* B^τ, *чтобы прообраз каждой точки* $y \in B^\tau$ *обладал счетной базой* (теорема 5).

Назовем для краткости всякое непрерывное отображение пространства R в B^τ, при котором прообраз каждой точки $y \in B^\tau$ обладает счетной базой, S-отображением.

Итак, *всякое сильно-паракомпактное метрическое пространство имеет* S-*отображение.*

Второй пример, приведенный в конце параграфа, показывает, что S-отображения могут быть и у не сильно-паракомпактных метрических пространств. Однако *если метрическое пространство имеет замкнутое* S-*отображение, то оно сильно-паракомпактно* (теорема 6). Тем не менее приведен пример сильно-паракомпактного метрического пространства без замкнутых S-отображений. Теорема 6 является следствием теоремы 6*, утверждающей, что *если метрическое пространство* R *можно так замкнуто и непрерывно отобразить в некоторое* B^τ, *чтобы полный прообраз каждой точки* $y \in B^\tau$ *был сильно-паракомпактным, то сильно-паракомпактным будет и все* R.

Работа кончается приложением, в котором доказывается следующая вспомогательная, но имеющая и самостоятельный интерес лемма 4:

Пусть R *— метрическое пространство, а* M *— какое-нибудь лежащее в нем множество; тогда всякую звездно-конечную (соответственно, локально-конечную в* M*) систему* γ', *состоящую из открытых в* M *множеств* Γ'_α, *можно подобно продолжить в звездно-конечную (соответственно, в локально-конечную в* $\bigcup \Gamma_\alpha$*) систему* γ *открытых в* R *множеств* Γ *в том смысле, что для любого* Γ'_α *пересечение* $M \cap \Gamma_\alpha = \Gamma'_\alpha$ *и что схемы пересечений у* γ *и у* γ' *одинаковы.*

Тема этой работы в свое время была мне предложена П. С. Александровым, которого я сердечно благодарю за неизменное внимание и поддержку.

§ 1

Пусть R означает сначала произвольное данное множество, в котором еще нет никакой топологии. Пусть дана система γ некоторых его подмножеств Γ. Как обычно, т е л о м системы γ назовем сумму всех множеств системы γ.

Ц е п о ч к о й с и с т е м ы γ назовем конечную последовательность $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ множеств Γ_i из γ, в которой рядом стоящие множества имеют непустое пересечение.

Систему γ назовем с в я з н о й, если для любой пары множеств Γ и Γ' из γ существует цепочка (системы γ), в которой первым элементом является Γ, а последним — Γ'.

Наконец, для любой системы γ к о м п о н е н т о й этой системы назовем каждую такую связную подсистему γ' системы γ, что всякая другая подсистема системы γ, объемлющая γ', не является связной.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 1. *Всякая система γ подмножеств Γ данного множества R единственным образом распадается на компоненты γ_λ: $\gamma = \bigcup_\lambda \gamma_\lambda$. При этом тела различных компонент не пересекаются.*

Назовем систему γ подмножеств Γ множества R звездно-счетной (соответственно, звездно-конечной), если любой элемент Γ системы γ пересекается не более, чем со счетным (соответственно, лишь с конечным) числом элементов системы γ.

ЛЕММА 2. *Всякая связная звездно-счетная система γ подмножеств Γ данного множества R не более чем счетна.*

Доказательство. Предположим, что дана непустая связная звездно-счетная система γ подмножеств $\Gamma \subseteq R$. Возьмем для начала подсистему γ_1 системы γ, состоящую из одного какого-нибудь произвольно выбранного элемента Γ_1 системы γ. В силу наших предположений существует непустая не более чем счетная подсистема γ_2 системы γ, состоящая из всех тех элементов системы γ, которые пересекаются с Γ_1. Далее, по тем же причинам найдется непустая, не более чем счетная подсистема γ_3 системы γ, состоящая из всевозможных элементов системы γ, пересекающихся хотя бы с одним элементом подсистемы γ_2. Этот процесс приводит к построению возрастающих не более чем счетных подсистем γ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, системы γ. В силу связности системы γ, каждый ее элемент войдет в некоторую из подсистем γ_i. Стало быть,

$$\gamma = \bigcup_i \gamma_i.$$

Значит, система γ является не более чем счетной системой.

Пусть теперь R — уже топологическое пространство. Назовем звездно-счетную (соответственно, звездно-конечную) систему α замкнутой, если сумма любого числа множеств $A_\lambda \in \alpha$ является замкнутым в R множеством.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого регулярного топологического пространства R эквивалентны следующие свойства:*

А) *во всякое открытое покрытие пространства R можно вписать открытое звездно-счетное покрытие;*

Б) *во всякое открытое покрытие пространства R можно вписать открытое звездно-конечное покрытие;*

В) *во всякое открытое покрытие пространства R можно вписать замкнутое звездно-конечное покрытие;*

Г) *во всякое открытое покрытие пространства R можно вписать замкнутое звездно-счетное покрытие.*

Доказательство. 1°. *Всякое регулярное пространство, обладающее свойством* А), *нормально.*

Пусть Φ_0 и Φ_1 — два непересекающихся замкнутых множества пространства R. В силу регулярности пространства R, для каждой точки $x \in \Phi_0$ существует такая окрестность $0x$, что

$$[0x] \subseteq R \setminus \Phi_1,$$

а для каждой точки $x \in R \setminus \Phi_0$ существует такая окрестность $0x$, что

$$[0x] \subseteq R \setminus \Phi_0.$$

В полученное таким образом открытое покрытие $\{0x\}$ пространства R впишем открытое звездно-счетное покрытие γ. Обозначим через γ_α компоненты покрытия γ, а через H_α — тела этих компонент. В силу леммы 1, множества H_α являются попарно не пересекающимися открытыми множествами и в сумме дают все R. Значит, каждое H_α не только открыто но и замкнуто в пространстве R, следовательно, и множества

$$\Phi_{\alpha 0} = H_\alpha \cap \Phi_0 \quad \text{и} \quad \Phi_{\alpha 1} = H_\alpha \cap \Phi_1$$

являются замкнутыми попарно не пересекающимися множествами пространства R. Для каждого α система γ_α, в силу леммы 2, является счетным или конечным открытым покрытием подпространства H_α.

Рассмотрим, далее, две подсистемы компоненты γ_α: подсистему $\gamma_{\alpha 0}$, состоящую из множеств $\Gamma^0_{\alpha i}$, пересекающихся с $\Phi_{\alpha 0}$, и подсистему $\gamma_{\alpha 1}$, состоящую из множеств $\Gamma^1_{\alpha i}$, пересекающихся с $\Phi_{\alpha 1}$. В силу специального выбора окрестностей $0x$ и того, что покрытие γ вписано в $\{0x\}$, получаем, что замыкание каждого элемента системы $\gamma_{\alpha 0}$ не пересекается с Φ_1, а значит, для каждого i

$$[\Gamma^0_{\alpha i}] \subseteq H_\alpha \setminus \Phi_{\alpha 1}.$$

Аналогично, замыкание каждого элемента системы $\gamma_{\alpha 1}$ не пересекается с Φ_0, стало быть, для каждого i

$$[\Gamma^1_{\alpha 1}] \subseteq H_\alpha \setminus \Phi_{\alpha 0}.$$

Отсюда видно, что системы $\gamma_{\alpha 0}$ и $\gamma_{\alpha 1}$ не имеют общих элементов. Применим известное построение П. С. Александрова: для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$U^0_{\alpha k} = \Gamma^0_{\alpha k} \setminus \bigcup_{i \leqslant k} [\Gamma^1_{\alpha i}] \quad \text{и} \quad U^1_{\alpha k} = \Gamma^1_{\alpha k} \setminus \bigcup_{i \leqslant k} [\Gamma^0_{\alpha i}].$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{\alpha 0} \subseteq U_{\alpha 0} = \bigcup_k U^0_{\alpha k}, \quad \Phi_{\alpha 1} \subseteq U_{\alpha 1} = \bigcup_k U^1_{\alpha k}$$

и что $U_{\alpha 0} \cap U_{\alpha 1} = \Lambda$. Так как $U_{\alpha 0}$ и $U_{\alpha 1}$ являются открытыми попарно не пересекающимися множествами подпространства H_α, а множества H_α являются открытыми попарно не пересекающимися множествами пространства R, то множества

$$U_0 = \bigcup_\alpha U_{\alpha 0} \quad \text{и} \quad U_1 = \bigcup_\alpha U_{\alpha 1}$$

являются открытыми попарно не пересекающимися множествами в R. Таким образом, имеем:

$$U_0 \cap U_1 = \Lambda, \quad \Phi_0 \subseteq U_0, \quad \Phi_1 \subseteq U_1.$$

Этим нормальность пространства R доказана.

2°. *Во всякое открытое покрытие регулярного пространства R, обладающего свойством* А), *можно вписать открытое звездно-счетное покрытие, каждый элемент которого имеет тип F_σ.*

Пусть ω — произвольное открытое покрытие пространства R. В силу наших предположений о пространстве R, существует такое открытое

звездно-счетное покрытие γ пространства R, что система замыканий элементов этого покрытия γ вписана в покрытие ω. Рассмотрим компоненты $\gamma_\alpha = \{\Gamma_{\alpha i}\}$ покрытия γ и тела H_α этих компонент. Так так каждое H_α является замкнутым в R множеством, то для любых α и i

$$[\Gamma_{\alpha i}] \subseteq H_\alpha.$$

Так как замыкание $[\Gamma_{\alpha i}]$ любого $\Gamma_{\alpha i} \in \gamma_\alpha$ целиком лежит в некотором элементе $O_{\lambda(\alpha i)}$ покрытия ω, то, в силу только что доказанной нами нормальности пространства R, для любых α и i существует открытое множество $\Gamma'_{\alpha i}$ типа F_σ такое, что

$$[\Gamma_{\alpha i}] \subseteq \Gamma'_{\alpha i} \subseteq H_\alpha \cap O_{\lambda(\alpha i)}.$$

Покажем, что покрытие $\gamma' = \{\Gamma'_{\alpha i}\}$ является искомым. Для этого, очевидно, надо только доказать, что γ' есть звездно-счетная система.

Обозначим через γ'_α систему множеств $\Gamma'_{\alpha i}$ при каждом фиксированном α. Легко видеть, что телом каждой такой подсистемы γ'_α покрытия γ' является множество H_α. Так как каждая система γ'_α не более чем счетна, и так как множества H_α попарно не пересекаются, то, действительно, покрытие

$$\gamma' = \bigcup_\alpha \gamma'_\alpha$$

оказывается звездно-счетным, чем доказательство утверждения 2° завершено.

3°. *Всякое регулярное пространство R, обладающее свойством* А), *обладает и свойством* Б).

Для доказательства этого предложения нам потребуется интересная и сама по себе

ЛЕММА 3. *В любое счетное покрытие $\gamma = \{\Gamma_n\}$ нормального пространства R, каждый элемент Γ_n которого имеет тип F_σ, можно вписать счетное звездно-конечное покрытие.*

Доказательство. В силу наших предположений, существуют такие непрерывные функции $\varphi_n(x)$, что $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$ для любого $x \in R$ и

$$\mathcal{C}\{x \in R,\ \varphi_n(x) = 0\} = R \setminus \dot{\Gamma}_n.$$

Построим непрерывную функцию

$$\varphi(x) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)}{2^n}.$$

Она определена на всем пространстве R, причем ясно, что всюду в R имеют место неравенства $0 < \varphi(x) \leqslant 1$. Поэтому счетная последовательность открытых множеств

$$H_k = \mathcal{C}\left\{x \in R,\ \varphi(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

является покрытием пространства R. Кроме того, для каждого k мы определяем

$$\Phi_k = \mathcal{C}\left\{x \in R,\ \varphi(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Покажем, что тогда для любого k имеет место включение:

$$\Phi_k \subseteq \bigcup_{i \leqslant k} \Gamma_i. \qquad (*)$$

Предположим, что $x \notin \bigcup_{i \leqslant k} \Gamma_i$; тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n \geqslant k+1} \frac{\varphi_n(x)}{2^n} \leqslant \sum_{n \geqslant k+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{k}.$$

Значит, $x \notin \Phi_k$, чем включение $(*)$ доказано.

Пусть теперь $\Phi_0 = \Lambda$ и $U_{kj} = \Gamma_j \cap (H_{k+1} \setminus \Phi_{k-1})$, где $j = 1, \ldots, k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Покажем, что система $\omega = \{U_{kj}\}$ — искомая. Очевидно, что система ω вписана в γ. Пусть $x \in R$. Возьмем k такое, что $x \in \Phi_k \setminus \Phi_{k-1}$, а потом такое $j \leqslant k$, что $x \in \Gamma_i$. Тогда

$$x \in \Gamma_j \cap (\Phi_k \setminus \Phi_{k-1}) \subset U_{kj}.$$

Значит, ω является покрытием пространства R. Остается доказать, что ω — звездно-конечное покрытие. Пусть U_{ni} — произвольный элемент покрытия ω. Так как при любом $k \geqslant n+2$ имеем

$$U_{ni} \subseteq H_{n+1} \subseteq \Phi_{k-1},$$

то U_{ni} не пересекается ни с каким U_{kj} при $k \geqslant n+2$. Это значит, что U_{ni} может пересекаться лишь с такими U_{kj}, у которых $k \leqslant n+1$, а таких U_{kj} в ω только конечное число. Лемма доказана.

Докажем теперь утверждение 3°, являющееся основной частью доказательства теоремы 1. Пусть дано произвольное открытое покрытие η пространства R, обладающее свойством А). Нужно доказать, что в η можно вписать открытое звездно-конечное покрытие. Для этого впишем в покрытие η звездно-счетное покрытие γ, каждый элемент которого имеет тип F_σ; возможность этого нами была доказана в 2°. Обозначим, как обычно, через γ_α компоненты покрытия γ, а через H_α — тела этих компонент. В силу леммы 2, каждая компонента γ_α является счетным покрытием подпространства H_α пространства R. Так как H_α замкнуто в R и пространство R нормально (что мы доказали в 1°), то и каждое H_α нормально. Так как каждый элемент счетного покрытия γ_α подпространства H_α имеет тип F_σ в R, то, по лемме 3, существует вписанное в γ_α звездно-конечное покрытие ω_α подпространства H_α. Так как каждое H_α открыто в R, то система $\omega = \bigcup_\alpha \omega_\alpha$ является покрытием пространства R, состоящим из открытых в R множеств. Очевидно, покрытие ω звездно-конечно и вписано в покрытие γ, а стало быть, и в η, чем доказательство предложения 3° окончено.

4°. *Всякое регулярное пространство, обладающее свойством* Б), *обладает и свойством* В).

Пусть дано регулярное сильно-паракомпактное пространство R и в нем произвольное открытое покрытие ω. В силу наших предположений, в ω можно вписать открытое звездно-конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$. Из утверждения 1° вытекает, что R нормально. Так как открытое звездно-конечное покрытие γ локально-конечно, то в него можно вписать покрытие $\gamma' = \{\Gamma'_\lambda\}$ так, чтобы замыкание $[\Gamma'_\lambda]$ каждого $\Gamma'_\lambda \in \gamma'$ целиком содержалось в соответствующем $\Gamma_\lambda \in \gamma$ [см. (1), лемма 2, стр. 107]. Система

$\alpha = \{[\Gamma'_\lambda]\}$ является замкнутым покрытием пространства R, вписанным в ω [см. ([1]), лемма 1, стр. 104].

5°. *Всякое регулярное пространство, обладающее свойством* Г), *обладает и свойством* А).

Пусть R — регулярное пространство, обладающее свойством Г), а $\omega = \{U_\mu\}$ — какое-нибудь его открытое покрытие. Впишем в него замкнутое звездно-счетное покрытие α. В силу лемм 1 и 2 заключаем, что покрытие α распадается на компоненты α_λ, каждая из которых не более ием счетна. Обозначим через $A_{\lambda n}$ элементы покрытия α, принадлежащие компоненте α_λ. Так как тела $H_\lambda = \bigcup\limits_n A_{\lambda n}$ разных компонент α_λ попарно не пересекаются (лемма 1), то из определения замкнутости звездно-счетного покрытия α вытекает, что каждое H_λ является и открытым и замкнутым в R множеством. Взяв для каждого $A_{\lambda n}$, целиком лежащего в теле H_λ своей компоненты α_λ, некоторый элемент $U_{\mu(\lambda n)} \in \omega$, содержащий $A_{\lambda n}$, и положив

$$\Gamma_{\lambda n} = H_\lambda \cap U_{\mu(\lambda n)},$$

получим открытое звездно-счетное покрытие $\gamma = \{\Gamma_{n\lambda}\}$ пространства R, вписанное в ω. Так как из свойства В) всегда следует свойство Г), то теорема 1 доказана.

Как уже говорилось во введении, если во всякое открытое покрытие пространства R можно вписать счетное или конечное покрытие, то оно называется финально-компактным*. Всякое финально-компактное пространство R, таким образом, обладает свойством Г). Значит, справедливо

Следствие 1. *Всякое регулярное финально-компактное пространство сильно-паракомпактно.*

Далее, воспользовавшись теоремой П. С. Александрова о том, что всякое метрическое пространство, удовлетворяющее локальной аксиоме счетности **, можно представить в виде суммы попарно не пересекающихся открытых множеств, каждое из которых является пространством со счетной базой [см. ([3]), гл. 5, § 3, теорема 9], получаем

Следствие 2. *Всякое метрическое пространство, удовлетворяющее локальной аксиоме счетности, сильно-паракомпактно.*

ТЕОРЕМА 2. *В случае связных метрических пространств сильная паракомпактность эквивалентна наличию счетной базы.*

Доказательство. Из первого следствия теоремы 1 сразу вытекает, что всякое пространство со счетной базой сильно-паракомпактно. Поэтому здесь нам нужно только доказать, что всякое *связное* сильно-паракомпактное *метрическое* пространство имеет счетную базу. Действительно, из сильной паракомпактности пространства R легко следует, что в R существует последовательность звездно-конечных $\frac{1}{n}$-покрытий γ_n

---

* Обычно финально-компактные пространства определяют как такие пространства, в которых из каждого открытого покрытия можно выбрать счетное или конечное подпокрытие [см. ([3]), стр. 23]. Оба этих определения эквивалентны.

** Говорят, что пространство R удовлетворяет локальной аксиоме счетности, если каждая его точка имеет окрестность, являющуюся пространством со счетной базой [см. ([3]), гл. 5, § 3, определение 1].

(т. е. диаметр каждого элемента покрытия γ_n не превосходит $\frac{1}{n}$). Объединение $\gamma = \bigcup_n \gamma_n$ всех этих покрытий является базой пространства R. Из связности пространства R вытекает, что каждое покрытие γ_n является связным (в смысле определения, данного в самом начале этой главы), следовательно, на основании леммы 2, каждое покрытие γ_n не более чем счетно. Поэтому база $\gamma = \bigcup_n \gamma_n$ является счетной базой пространства R, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. *В случае локально-связных метрических пространств сильная паракомпактность эквивалентна локальной аксиоме счетности.*

Доказательство. Из второго следствия теоремы 1 вытекает, что всякое метрическое пространство, удовлетворяющее локальной аксиоме счетности, сильно-паракомпактно. Итак, нам остается только доказать, что всякое *локально-связное* сильно-паракомпактное метрическое пространство удовлетворяет локальной аксиоме счетности. Действительно, известно, что всякое локально-связное пространство R является суммой попарно не пересекающихся связных открытых, а стало быть, и замкнутых множеств H_α. Легко видеть, что если R сильно-паракомпактно, то и каждое H_α сильно-паракомпактно. Если же пространство R метрическое, то, по только что доказанной теореме, каждое из множеств H_α обладает счетной базой. Значит, все пространство R удовлетворяет локальной аксиоме счетности, что и требовалось доказать.

Перейдем к примерам.

1. Пример хаусдорфова финально-компактного, но не сильно-паракомпактного пространства H. Точками пространства H являются точки обыкновенной прямой L. Открытые множества пространства H получаются из открытых множеств прямой L вычитанием счетных или конечных множеств. Легко видеть, что пространство H будет хаусдорфовым, но не регулярным пространством. Столь же легко убедиться и в том, что пространство H финально компактно (и даже наследственным образом). Если бы пространство H было сильно-паракомпактным, то, будучи хаусдорфовым, оно было бы и нормальным пространством [см. (1), § 4, теорема Дьедонне], чего на самом деле нет.

2. Пример нормального, удовлетворяющего локальной аксиоме счетности, но не сильно-паракомпактного пространства. Таким примером является пространство T_{ω_1} всех порядковых чисел $<\omega_1$. Легко видеть, что T_{ω_1} удовлетворяет локальной аксиоме счетности. Нормальность пространства T_{ω_1} известна. Так как T_{ω_1} локально-метризуемо, но не метризуемо в целом, то оно не паракомпактно [см. (1), теорема 3, стр. 109] и, тем более, не сильно-паракомпактно. Вставив между «соседними» точками пространства T_{ω_1} по интервалу, мы получим *связное*, также удовлетворяющее локальной аксиоме счетности, но не сильно-паракомпактное пространство S_{ω_1}.

3. Пример метрического сильно-паракомпактного пространства, не удовлетворяющего локальной аксиоме счетности. Построим сначала некоторое связное, но не сильно-паракомпактное метрическое пространство $\mathcal{E}$. Оно состоит из всех точек

обыкновенной плоскости, из которых выделена некоторая точка o. Для любых двух точек пространства $\mathfrak{E}$, лежащих на прямой, проходящей через o, расстояние совпадает с обычным. Для любой другой пары точек a и b пространства $\mathfrak{E}$ расстояние определяется формулой

$$\rho(a, b) = \rho(a, o) + \rho(o, b).$$

Очевидно, пространство $\mathfrak{E}$ является связным метрическим пространством без счетной базы, а следовательно, по теореме 2, пространство $\mathfrak{E}$ не сильно-паракомпактно. Интересующее нас пространство $\mathfrak{E}_0$ определяется как подпространство пространства $\mathfrak{E}$, состоящее из точки o и из точек, лежащих на расстояниях $\frac{1}{n}$ от «центральной» точки o, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, пространство $\mathfrak{E}_0$ не удовлетворяет локальной аксиоме счетности. Однако легко видеть, что оно нульмерно, а следовательно, сильно-паракомпактно.

Естественно возникает вопрос, не эквивалентно ли для метрических пространств свойство сильной паракомпактности требованию, чтобы всякая компонента (или квази-компонента) * данного пространства обладала счетной базой. Однако это не так, как показывает следующий пример.

4. Пример метрического не сильно-паракомпактного пространства, все компоненты которого совпадают с квази-компонентами и удовлетворяют второй аксиоме счетности. Это пространство $\mathfrak{E}_1$ является подмножеством ранее построенного метрического пространства $\mathfrak{E}$. Разобьем каким-нибудь способом систему S всех лучей L пространства $\mathfrak{E}$, исходящих из точки o, на счетное число попарно не пересекающихся подсистем S_n, каждая из которых несчетна. Из каждого луча системы S_n выколем счетное число точек, лежащих от центра o на расстоянии $\frac{1}{k}$, где $k = n, n+1, n+2, \ldots$. Точки, оставшиеся после этого выкалывания, и составляют искомое пространство $\mathfrak{E}_1$. Легко видеть, что квази-компоненты пространства $\mathfrak{E}_1$ суть конечные или бесконечные интервалы лучей L вида $\left(\frac{1}{n}; \infty\right)$ или $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right)$; наконец, оставшаяся точка o также является квази-компонентной. Очевидно, каждая квази-компонента пространства $\mathfrak{E}_1$ является в то же время и компонентой и имеет счетную базу.

Итак, нам осталось только доказать, что пространство $\mathfrak{E}_1$ не сильно-паракомпактно. Для этого нам достаточно показать, что никакое открытое ε-покрытие пространства $\mathfrak{E}_1$ не является звездно-конечным. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем некоторое открытое ε-покрытие γ пространства $\mathfrak{E}_1$. Обозначим через Γ_0 какой-нибудь элемент этого покрытия, содержа-

* Компонентой пространства R называется такое связное множество пространства R, которое не содержится ни в каком другом связном множестве пространства R. Квази-компонентой пространства R в точке x называется пересечение всевозможных открыто-замкнутых множеств, содержащих точку x. Все компоненты данного пространства R попарно не пересекаются и составляют замкнутое покрытие β пространства R. Все квази-компоненты данного пространства R также попарно не пересекаются и составляют замкнутое покрытие α пространства R. Легко видеть, что покрытие β вписано в α, т. е. что квази-компоненты, вообще говоря, «крупнее», чем компоненты.

щий точку o. Выберем такое целое число k, чтобы сферическая окрестность $O\left(o, \frac{1}{k}\right)$ точки o целиком лежала в Γ_o. Тогда бесконечные интервалы I_α вида $\left(\frac{1}{k}; \infty\right)$ каждого из лучей L_α системы S_k пересекаются с Γ_o. Возьмем на каждом из этих лучей L_α по точке p_α так, чтобы $\rho(p_\alpha, o) = \varepsilon$, и покажем, что для каждого фиксированного α любой элемент покрытия γ, содержащий точку p_α, целиком лежит в луче L_α. Действительно, если бы некоторое множество из покрытия γ, наряду с точкой $p_\alpha \in L_\alpha$, содержало точку q из луча L_β, отличного от L_α, то диаметр такого множества был бы $\geqslant \rho(p_\alpha, q) > \varepsilon$, чего не может быть. Выберем, далее, для каждого α по множеству Γ_α из покрытия γ, содержащему точку p_α. Так как каждый интервал вида $\left(\frac{1}{k}; \varepsilon\right) \subseteq I_\alpha$ луча L_α пересекается и с Γ_o и с Γ_α, то каждое множество Γ_α можно соединить с Γ_o цепочкой элементов покрытия γ. Значит, каждое Γ_α содержится в той же компоненте γ_o покрытия γ, что и множество Γ_o. Это значит, что компонента γ_o является несчетной. Следовательно, по лемме 2, получаем, что покрытие γ не звездно-конечно, что и требовалось доказать.

§ 2

Назовем *обобщенным бэровским пространством* B^τ *веса* $\tau \geqslant \aleph_0$ следующим образом определенное метрическое пространство: пусть θ — какое-нибудь множество мощности τ, элементы которого условимся называть индексами и обозначать через λ, μ, ...; точками пространства B^τ являются всевозможные последовательности

$$x = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$$

индексов $\lambda_n \in \theta$ (где n — натуральные числа); для любых двух различных точек

$$x = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$$

и

$$y = \{\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots\}$$

определяем расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \frac{1}{k(x, y)},$$

где $k(x, y)$ есть наименьшее из таких натуральных чисел k, для которых $\lambda_k \neq \mu_k$.

Из трех аксиом метрического пространства требует доказательства лишь аксиома треугольника. Пусть x, y и z — три произвольные точки из B^τ. Для них имеет место неравенство

$$k(x, z) \geqslant \min(k(x, y), k(y, z)),$$

откуда получаем:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{k(x, z)} \leqslant \frac{1}{\min(k(x, y), k(y, z))} \leqslant \frac{1}{k(x, y)} + \frac{1}{k(y, z)} = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Естественную базу пространства B^τ составляют множества $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, каждое из которых состоит из всевозможных точек $x = \{\lambda_k\}$, у которых первые n индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ фиксированы. Каждое множество $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ в одно и то же время является открытой сферической $\frac{1}{n}$-окрестностью и замкнутой $\frac{1}{n+1}$-окрестностью любой своей точки. Стало быть, каждое

множество $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ и открыто и замкнуто в B^τ. Заметим еще, что для каждого фиксированного n множества $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ попарно не пересекаются и в сумме дают все B^τ; значит, система ω_n множеств $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ при фиксированном n является покрытием пространства B^τ кратности 1. Отсюда следует, что $\dim B^\tau = 0$, так как справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы топологическое T_1-пространство R было метризуемым пространством размерности* * *нуль, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало счетное или конечное множество покрытий кратности* 1, *объединение которых является базой пространства R.*

Доказательство. Пусть R — метрическое пространство размерности нуль. Так как R имеет сколь угодно малые (по диаметру) локально-конечные открытые покрытия, то в нем найдутся и сколь угодно малые покрытия кратности 1 [см. (2), теорема 3.5, стр. 211]. Объединение счетного числа таких $\frac{1}{n}$-покрытий является базой R.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть $\{\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}\}$ — счетное или конечное число покрытий кратности 1, объединение которых γ является базой пространства R. Прежде всего заметим, что элементы γ_n являются открыто-замкнутыми множествами. Отсюда вытекает, что T_1-пространство R является регулярным, следовательно, в силу метризационной теоремы [см. (1), теорема 1, стр. 103], получаем, что R метризуемо. Таким образом, остается лишь доказать, что $\dim R = 0$. Для этого достаточно показать, что $\operatorname{Ind} R = 0$, т. е. что для любого замкнутого множества Φ и любой его окрестности $O\Phi$ пространства R существует открыто-замкнутая окрестность $U\Phi$, лежащая в $O\Phi$. Для каждой точки x множества Φ берем некоторую открыто-замкнутую окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$, целиком лежащую в $O\Phi$, а для каждой точки x дополнения $R \setminus \Phi$ берем некоторую открыто-замкнутую окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$, не пересекающуюся с Φ. При каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ множества

$$G_n = \bigcup_{x \in \Phi} \Gamma_{n\alpha(x)}$$

и множества

$$H_n = \bigcup_{x \notin \Phi} \Gamma_{n\alpha(x)}$$

являются пересекающимися открыто-замкнутыми множествами. При этом каждое G_n лежит в $O\Phi$, а каждое H_n — в $R \setminus \Phi$. Положим теперь

$$U_n = G_n \setminus \bigcup_{k \leqslant n} H_k \quad \text{и} \quad V_n = H_n \setminus \bigcup_{k \leqslant n} G_k.$$

Каждое U_n и каждое V_n снова открыто-замкнуты, причем

$$\Phi \subseteq U\Phi = \bigcup_n U_n \subseteq O\Phi.$$

Докажем, что $U\Phi$ — открыто-замкнутое множество. Для этого положим $V = \bigcup_n V_n$ и покажем, что $U\Phi = R \setminus V$. Так как очевидно, что

---

* Под размерностью здесь понимается размерность, определенная посредством покрытий так, что условие $\dim R = 0$ означает, что во всякое конечное открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие кратности 1.

$$U\Phi \cap V = \Lambda,$$

то остается доказать, что

$$U\Phi \cup V = R.$$

Пусть $x \in R$. Из нашего построения вытекает, что x содержится или в некотором G_m, или в некотором H_n. Если $x \in G_m$ и не принадлежит ни одному из множеств H_n, то $x \in U_m$. Если $x \in H_n$ и не принадлежит ни одному из множеств G_m, то $x \in V_n$. В оставшемся случае обозначим через $m(x)$ наименьшее из таких m, что $x \in G_m$, а через $n(x)$ — наименьшее из таких n, что $x \in H_n$. Так как всегда

$$G_n \cap H_n = \Lambda,$$

то $m(x) \neq n(x)$; пусть, например, $m(x) < n(x)$, тогда $x \in U_{m(x)}$; в противном случае $x \in V_{n(x)}$. Этим мы показали, что

$$U\Phi = R \setminus V,$$

а значит, окрестность $U\Phi$ множества Φ является открыто-замкнутым множеством. Так как замкнутое множество Φ и его окрестность $O\Phi$ были взяты произвольно, то тем самым теорема 4 доказана.

Заметим мимоходом, что даже для случая метрических пространств со счетною базой для высших размерностей утверждение, аналогичное утверждению теоремы 4, не верно, так как в любом таком пространстве существует счетная последовательность покрытий, объединение которых является базой пространства и каждое из которых состоит всего из двух множеств.

Вернемся опять к пространству B^τ. Легко видеть, что B^τ гомеоморфно топологическому произведению счетного числа пространств θ_n, каждое из которых состоит из τ изолированных точек.

ТЕОРЕМА 5. *Всякое сильно-паракомпактное метрическое пространство R можно так непрерывно отобразить в обобщенное бэровское пространство B^τ, чтобы прообраз каждой точки $y \in B^\tau$ был пространством со счетной базой.*

Доказательство. Пусть R — сильно-паракомпактное метрическое пространство. Возьмем в нем последовательность звездно-конечных $\frac{1}{n}$-покрытий γ_n, последовательно вписанных друг в друга. Обозначим через η_n систему тел компонент покрытия γ_n. Каждая система η_n, очевидно, является покрытием пространства R и состоит из попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств. Пусть τ — наименьшее из кардинальных чисел, превосходящих мощность каждого из покрытий η_n, а θ — множество «индексов» λ, μ, ... мощности τ. Легко видеть, что покрытия η_n также последовательно вписаны друг в друга. Поэтому, считая элементы покрытия η_{n-1} уже занумерованными $n-1$ индексами нужным образом, можно элементы покрытия η_n (т. е. тела компонент покрытия γ_n) обозначить n индексами $\lambda_i \in \theta$ так, чтобы у каждого множества H из η_n первые $n-1$ индексов были теми же, что и у множества $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}$, содержащего H. Соответственным образом мы обозначим и компоненты $\gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ покрытия γ_n.

Таким образом, каждой точке $x = \{\lambda_i\}$ пространства B^τ такой, что для любого n имеется множество $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ из η_n, обозначенное первыми n ин-

дексами из последовательности x, мы поставим в соответствие убывающую последовательность

$$H_{\lambda_1} \supseteq H_{\lambda_1\lambda_2} \supseteq \ldots \supseteq H_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \supseteq \ldots$$

открыто-замкнутых множеств $H_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, а также и пересечение F_x этих множеств. Множества F_x являются замкнутыми попарно не пересекающимися множествами и в сумме дают все R. Поставив в соответствие каждой точке $\xi \in R$ ту точку $x = \{\lambda_i\}$ пространства B^τ, которой обозначено (единственное) множество F_x, содержащее точку ξ, мы получим искомое отображение f пространства R в B^τ.

Легко видеть, что для любого множества $U_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ пространства B^τ, имеющего непустое пересечение с $f(R)$, полный прообраз

$$f^{-1}(U_{\lambda_1\ldots\lambda_n}) = H_{\lambda_1\ldots\lambda_n}.$$

Значит, отображение f непрерывно. Покажем, что прообраз F_x любой точки $x \in f(R)$ является пространством со счетной базой. Так как множество $F_x = F_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ldots$ содержится в каждом из множеств $H_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, то каждая компонента $\gamma_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ покрытия γ_n покрывает множество F_x. Так как каждая компонента $\gamma_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ состоит из счетного или конечного числа множеств, по диаметру не превосходящих $\frac{1}{n}$, то совокупность пересечений множества F_x с элементами компонент $\gamma_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ (где $\lambda_1\ldots\lambda_n$ - первые n индексов последовательности x) является базой, счетной базой множества F_x, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 6. *Если метрическое пространство R можно непрерывно и замкнуто отобразить в обобщенное бэровское пространство B^τ так, чтобы прообраз каждой точки $y \in B^\tau$ имел счетную базу, то R сильно-паракомпактно.*

Эта теорема вытекает из нижеследующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6*. *Если метрическое пространство R можно непрерывно и замкнуто отобразить в обобщенное бэровское пространство B^τ так, чтобы полный прообраз каждой точки $y \in B^\tau$ был сильно-паракомпактным пространством, то и все R будет сильно-паракомпактным пространством.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

ЛЕММА. *Для любого множества M метрического пространства R и для любой звездно-конечной системы γ', состоящей из открытых в R множеств Γ'_α, существуют такие открытые в R множества Γ_α, что $M \cap \Gamma_\alpha = \Gamma'_\alpha$ и система $\gamma = \{\Gamma_\alpha\}$ подобна системе γ'.*

Доказательство этой леммы будет дано в приложении.

Доказательство теоремы 6*. Пусть нам дано метрическое пространство R и непрерывное замкнутое отображение f пространства R в B^τ такое, что прообраз F_x каждой точки $x \in f(R)$ сильно-паракомпактен. Докажем, что и все R сильно-паракомпактно. Для этого возьмем произвольное покрытие ω пространства R. Так как каждое из множеств F_x сильно-паракомпактно, то, в силу только что сформулированной леммы, существуют звездно-конечные системы $\gamma_x = \{\Gamma_{x\alpha}\}$, состоящие из

открытых множеств $\Gamma_{x\alpha}$, покрывающие соответственно множества F_x (т. е. $\Gamma_x = \bigcup_\alpha \Gamma_{x\alpha} \supseteq F_x$) и вписанные в покрытие ω. Здесь удобно будет элементы $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ естественной базы пространства B^τ обозначить по-иному. Именно, все множества $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, обозначенные ровно n индексами, станем теперь обозначать всего двумя индексами: натуральным числом n и индексами λ, позволяющими множества $U_{n\lambda}$ различать между собой. Уже было сказано о том, что все множества $U_{n\lambda}$ при фиксированном n образуют покрытие пространства B^τ и попарно не пересекаются. В силу замкнутости отображения f, для каждой пары множеств F_x и $\Gamma_x = \bigcup_\alpha \Gamma_{x\alpha} \supseteq F_x$ существует такая окрестность $U_{n(x)\,\lambda(x)}$ точки $x \in f(R)$, что

$$F_x \subseteq O_{n(x)\,\lambda(x)} = f^{-1}(U_{n(x)\,\lambda(x)}) \subseteq \Gamma_x$$

[см. (4), лемма 2, стр. 59]. Значит, множества $O_{n(x)\,\lambda(x)}$ покрывают все R. Так как f непрерывно, то каждое множество $O_{n(x)\,\lambda(x)}$ и открыто и замкнуто. Поэтому множества

$$H_n = \bigcup_{n(x)=n} O_{n(x)\,\lambda(x)}$$

также будут открыто-замкнутыми множествами, покрывающими все R.

Рассмотрим множества $V_n = H_n \setminus \bigcup_{k<n} H_k$. Они являются попарно не пересекающимися открытыми множествами и в сумме также дают все R. Но тогда и множества

$$V_{n(x)\,\lambda(x)} = O_{n(x)\,\lambda(x)} \cap V_{n(x)}$$

попарно не пересекаются, открыты и

$$\bigcup_{x \in f(R)} V_{n(x)\,\lambda(x)} = R.$$

Наконец, для каждого $x \in f(R)$ и для каждого α положим

$$G_{x\alpha} = \Gamma_{x\alpha} \cap U_{n(x)\,\lambda(x)}.$$

Система $\beta = \{G_{x\alpha}\}$ множеств $G_{x\alpha}$ является искомым звездно-конечным покрытием пространства R, вписанным в ω. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 6 верна для любых регулярных пространств, так как при ее доказательстве, которое можно в этом более общем случае провести по той же схеме, не нужно пользоваться леммой. Вместо этого можно сразу взять счетные открытые покрытия γ_x множеств F_x, вписанные в произвольно данное открытое покрытие ω. В процессе доказательства мы придем к звездно-счетному открытому покрытию $\beta = \{G_{x\alpha}\}$, вписанному в ω. В силу теоремы 1, это означает, что пространство R сильно-паракомпактно.

Перед тем как перейти к примерам, назовем для краткости всякое непрерывное отображение f пространства R в B^τ, при котором прообраз каждой точки $y \in B^\tau$ является пространством со счетной базой, S-отображением.

1. **Метрическое пространство, не имеющее S-отображений.** Примером метрического пространства, не имеющего S-отображений, может служить любое связное метрическое пространство без счетной базы (например, пространство $\mathcal{C}$ из § 1).

2. Метрическое не сильно-паракомпактное пространство, имеющее S-отображение. Таким пространством является пространство $\mathcal{E}_1$, рассмотренное в § 1. Построим S-отображение f пространства $\mathcal{E}_1$ в B^τ. Обозначим для каждого n через Σ_n сумму всех лучей L, не принадлежащих ни одному из первых n множеств S_k (см. определение пространства $\mathcal{E}_1$). Пусть, далее, каждое из покрытий η_n пространства $\mathcal{E}_1$ состоит из открыто-замкнутого множества

$$H_n = O\left(o, \frac{1}{n}\right) \cup \Sigma_n$$

и из всех компонент связности пространства $\mathcal{E}_1$, лежащих в дополнительном к H_n множестве $\mathcal{E}_1 \setminus H_n$. Таким образом, мы получаем последовательность последовательно вписанных друг в друга покрытий η_n пространства $\mathcal{E}_1$, каждое из которых состоит из пересекающихся открыто-замкнутых множеств. Проводя то же построение, какое мы делали в доказательстве теоремы 5 с покрытиями η_n, мы и получим искомое отображение f пространства $\mathcal{E}_1$ в B^τ. Полные прообразы F_x точек $x \in f(\mathcal{E}_1$ при отображении f суть компоненты связности пространства $\mathcal{E}_1$, а каждая из них, очевидно, есть пространство со счетной базой, что и требовалось доказать.

3. Метрическое сильно-паракомпактное пространство $\mathcal{D}_1$, не имеющее замкнутых S-отображений. Пространство $\mathcal{D}_1$ является подпространством некоторого другого метрического пространства $\mathcal{D}$, которое мы сейчас и определим. Точками пространства $\mathcal{D}$ являются все точки обычной плоскости, в которой введена прямоугольная система координат. Для любых двух точек $a = (x, y)$ и $b = (u, v)$ в случае $x = u$ положим

$$\rho(a, b) = |y - v|,$$

а в случае $x \neq u$ положим

$$\rho(a, b) = |y| + |x - u| + |v|.$$

Пространство $\mathcal{D}$ является связным метрическим пространством. Выкинем из него все точки вида $\left(x, \frac{1}{n}\right)$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Оставшееся подпространство и есть искомое метрическое пространство $\mathcal{D}_1$. *Покажем, что* $\mathcal{D}_1$ *сильно-паракомпактно.* Пусть $\omega = \{u_\alpha\}$ — произвольное покрытие пространства $\mathcal{D}_1$. Обозначим через L ось абсцисс нашей плоскости (из точек которой составлено пространство $\mathcal{D}$). Очевидно, эта прямая L изометрически вложена в $\mathcal{D}_1$. Так как L сильно-паракомпактна, то существует звездно-конечное счетное покрытие $\gamma' = \{\Gamma'_s\}$ прямой L, состоящее из открытых в L множеств Γ'_s, замыкания $[\Gamma'_s]$ которых компактны, и такое, что система этих компактов $[\Gamma'_s]$ вписана в ω. Далее, для каждого Γ'_s возьмем в покрытии ω некоторое

$$U_{\alpha(s)} \supseteq [\Gamma'_s].$$

При естественном предположении, что ни одно из множеств $U_{\alpha(s)}$ не совпадает со всем $\mathcal{D}_1$, можно для каждого s определить на прямой L непрерывную функцию

$$f_s(a) = \rho(a, \mathcal{D}_1 \setminus U_{\alpha(s)}).$$

Так как для всякого $a \in [\Gamma'_s]$ функция $f_s(a)$ положительна, то, в силу компактности множества $[\Gamma'_s]$, существует такое n_s, что

$$f_s(a) \geqslant \frac{1}{n_s}$$

для любого $a \in [\Gamma'_s]$. Рассмотрим открытое во всем $\mathscr{D}_1$ множество Γ_s, состоящее из всевозможных точек $a = (x, y)$, для которых $(x, 0) \in \Gamma'_s$ и $|y| < \frac{1}{n_s}$. Имеем:

$$\Gamma_s \cap L = \Gamma'_s.$$

Заметим, что система $\gamma = \{\Gamma_s\}$ подобна системе γ', а потому является звездно-конечной системой, покрывающей прямую L, и что каждое $\Gamma_s \subseteq U_{\alpha(s)}$. Значит, система γ вписана в ω.

Возьмем произвольную вертикальную прямую L_x (состоящую из всевозможных точек (x, y) при фиксированном x). Точка $(x, 0) \in L_x$ принадлежит конечному числу множеств Γ'_s, пусть, например, множествам $\Gamma'_{s_1}, \ldots, \Gamma'_{s_k}$. Положим,

$$n(x) = \max\{n_{s_1}, \ldots, n_{s_k}\}$$

и возьмем открыто-замкнутое в $\mathscr{D}_1$ множество $I_x \subseteq L_x$, состоящее из всех точек (x, y), у которых $|y| > \frac{1}{n(x)}$. Множество I_x имеет счетную базу, а потому (см. следствие 1 теоремы 1) сильно-паракомпактно. Поэтому существует звездно-конечное покрытие $\gamma_x = \{\Gamma_{x\lambda}\}$ множества I_x, состоящее из открытых в I_x, а значит, и в $\mathscr{D}_1$, множеств $\Gamma_{x\lambda}$, вписанное в ω. Объединение γ^* всех систем γ_x и системы γ является искомым звездно-конечным покрытием пространства $\mathscr{D}_1$, вписанным в ω, что и требовалось доказать.

Докажем, что не существует замкнутых S-отображений пространства $\mathscr{D}_1$ в B^τ ни при каком $\tau \geqslant \aleph_0$. Допустим, вопреки этому, что существует некоторое замкнутое S-отображение f пространства $\mathscr{D}_1$ в некоторое B^τ. Возьмем точку $o = (0, 0)$ на прямой L и полный прообраз $F = f^{-1}(q)$ точки $q = f(o)$. Пусть U_n — счетная последовательность открыто-замкнутых множеств пространства B^τ, составляющих базу точки q в пространстве B^τ. Тогда, в силу замкнутости отображения f, последовательность открыто-замкнутых множеств $H_n = f^{-1}(U_n)$ будет составлять базу множества F в пространстве $\mathscr{D}_1$ (т. е. для любой окрестности OF существует некоторое $H_n \subseteq OF$ *). Так как $o \in F$ и так как прямая L связна, то

$$L \subseteq \bigcap_n H_n = F.$$

Обозначим через A множество всех тех точек $a = (x, 0)$ прямой L, для каждой из которых множество $A_x = F \cap L_x$ состоит всего из одной точки $(x, 0)$. Для каждого n построим на прямой L непрерывную положительную функцию

$$\varphi_n(a) = \rho(a, \mathscr{D}_1 \setminus H_n).$$

* Это следует из уже упоминавшейся выше леммы П. С. Александрова о замкнутых отображениях [см. (4), лемма 2, стр. 59].

Тогда для каждого отрезка вида $[(-k, 0); (k, 0)]$ прямой L и для каждой функции φ_n найдется натуральное число h_{kn} такое, что

$$\varphi_n(a) > \frac{1}{h_{kn}}$$

для всякой точки a отрезка $[(-k, 0); (k, 0)]$. Можно считать, что числа h_{kn} выбраны так, что при каждом фиксированном k с ростом n (а также при каждом фиксированном n с ростом k) числа h_{kn} монотонно возрастают. Рассмотрим окрестность U прямой L, состоящую из всех точек (x, y) пространства $\mathscr{L}_1$, удовлетворяющих условию: если $|x| < k$, то $|y| < \frac{1}{h_{kk}}$. Положим, далее,

$$OF = U \cup \bigcup_{(x, 0) \notin A} L_x.$$

Очевидно, OF есть окрестность множества F. Так как f является S-отображением, то F имеет счетную базу. Отсюда вытекает, что множество $L \setminus A$ не более чем счетно. Поэтому сколь угодно далеко от точки $o = (0, 0)$ на прямой L имеются точки множества A, откуда заключаем, что никакая из окрестностей H_n множества F не лежит целиком в OF, вопреки тому, что они образуют базу пространства $\mathscr{L}_1$ относительно множества F. Полученное противоречие доказывает, что наше исходное предположение о наличии замкнутых S-отображений пространства $\mathscr{L}_1$ в B^τ не верно, что и требовалось доказать.

Приложение

До сих пор мы имели дело в основном со звездно-конечными (а иногда и с локально-конечными) открытыми покрытиями. Здесь же приводится такой результат, который в некоторой степени справедлив и для открытых покрытий более широкого класса, чем класс локально-конечных покрытий, а именно, для класса точечно-конечных * открытых покрытий.

Пусть в пространстве R дано множество M и какое-нибудь его открытое (в M) покрытие γ'. Скажем, что покрытие γ' можно *подобно продолжить*, если для каждого элемента $\Gamma \in \gamma'$ можно подобрать открытое в R множество Γ так, что

1) $\Gamma \cap M = \Gamma'$ и

2) для каждой конечной системы множеств $\Gamma' \in \gamma'$ с пустым пересечением соответствующие множества Γ также имеют пустое пересечение **.

---

* Открытое покрытие топологического пространства R называется точечно-конечным, если каждая точка $x \in R$ принадлежит самое большее конечному числу элементов данного покрытия.

** В данном определении условие 1) есть собственно условие продолжения, а условие 2) — условие подобия, сформулированное только наполовину, так как условие, обратное условию 2), вытекает непосредственно из 1). Заметим, что в определении подобия фигурируют лишь конечные системы множеств $\Gamma' \in \gamma'$ и $\Gamma \in \gamma$, тогда как казалось бы естественным потребовать выполнения этого условия для любых, а не только для конечных, систем. Однако в случае точечной конечности обеих систем γ' и γ, как это и имеет место в основном утверждении леммы 4, такое усиленное условие подобия отличается от данного лишь формально.

Целью настоящего приложения является следующая

ЛЕММА 4. *Для любого метрического пространства R и любого его множества M всякое открытое точечно-конечное, соответственно локально-конечное или звездно-конечное покрытие множества M можно подобно продолжить в открытое, соответственно локально-конечное или звездно-конечное открытое покрытие некоторой окрестности множества M.*

Доказательство. Докажем сначала самую слабую часть леммы, а именно, что всякое открытое точечно-конечное покрытие γ' множества M можно подобно продолжить в открытое покрытие некоторой окрестности множества M. В самом деле, пусть $\gamma' = \{\Gamma'\}$ — точечно-конечное открытое покрытие множества M. Для каждой точки $x \in M$ определим действительное положительное число $\alpha(x)$ следующим равенством:

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \min_{x \in \Gamma'} \{\rho(x, M \setminus \Gamma')\}$$

(в котором минимум достигается именно в силу точечной конечности открытого в M покрытия γ'). После этого для каждой точки $x \in M$ обозначим через Ox $\alpha(x)$-окрестность точки x, взятую относительно всего метрического пространства R. Наконец, для каждого $\Gamma' \in \gamma'$ положим

$$\Gamma' = \bigcup_{x \in \Gamma'} Ox.$$

Очевидно, каждое полученное таким образом множество Γ открыто в R, а стало быть, открыто в R и $U = \bigcup \Gamma$. Покажем, что выполнено условие 1). Прежде всего, запишем следующие очевидные соотношения для каждого $\Gamma' \in \gamma'$:

$$\Gamma' \subseteq \Gamma \cap M = \bigcup_{x \in \Gamma'} (Ox \cap M).$$

В силу определения числа $\alpha(x)$, для любой точки $x \in \Gamma'$ имеем:

$$Ox \cap M \subseteq \Gamma'.$$

Стало быть,

$$\bigcup_{x \in \Gamma'} (Ox \cap M) \subseteq \Gamma',$$

а потому и

$$\Gamma' = \Gamma \cap M,$$

что и требовалось доказать. Из доказанного вытекает, что

$$M \subseteq U = \bigcup \Gamma.$$

Покажем, что выполнено и условие 2) в следующей эквивалентной форме: если множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ (взятые в любом конечном числе) пересекаются, то пересекаются и соответствующие множества $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_k'$ покрытия γ'.

Действительно, пусть

$$x \in \bigcap_{i \leqslant k} \Gamma_i.$$

Тогда в каждом соответствующем множестве $\Gamma_i' \in \gamma'$ найдется по такой

точке x_i, что $x \in Ox_i$, т. е. что

$$\rho(x, x_i) < \alpha(x_i).$$

Предположим для простоты, что

$$\alpha(x_1) \leqslant \alpha(x_2) \leqslant \ldots \leqslant \alpha(x_k).$$

Отсюда, в силу аксиомы треугольника, для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, получаем, что

$$\rho(x_1, x_i) \leqslant \rho(x_1, x) + \rho(x, x_i) < \alpha(x_1) + \alpha(x_i) \leqslant 2\alpha(x_i) \leqslant \rho(x_i, M \setminus \Gamma_i'),$$

откуда вытекает, что $x_1 \in \Gamma_i'$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно,

$$\bigcap_{i \leqslant k} \Gamma_i' \neq \Lambda,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим сразу третий случай, когда покрытие γ' звездно-конечно. В этом случае из подобия покрытия γ' и построенного только что указанным способом его продолжения $\gamma = \{\Gamma\}$ непосредственно вытекает, что γ есть звездно-конечное покрытие окрестности U.

Наконец, перейдем ко второму случаю, когда покрытие γ' локально-конечно. В этом случае для каждой точки $x \in M$ множество

$$F_x = \bigcup_{x \notin M[\Gamma']} M[\Gamma']$$

замкнуто в M [см. ([1]), лемма 1, стр. 104]. Поэтому снова можно определить на M действительную положительную функцию

$$\tilde{\alpha}(x) = \frac{1}{2} \min_{x \in \Gamma'} \{\rho(x, M \setminus \Gamma'), \rho(x, F_x)\},$$

после чего так же, как и в первом случае, полагаем

$$\tilde{O}x = O_{\tilde{\alpha}(x)}\, x$$

для каждого $x \in M$ и

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{x \in \Gamma'} \tilde{O}x$$

для каждого $\Gamma' \in \gamma'$. Заметим, что для каждого $x \in M$ всегда $\tilde{\alpha}(x) \leqslant \alpha(x)$ и что поэтому для каждого $\Gamma' \in \gamma'$

$$\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma \text{ и } \Gamma' \subseteq \tilde{\Gamma}.$$

Поэтому из того, что для множеств Γ выполнены условия 1) и 2) (как это было доказано в первой части доказательства), следует, что эти же условия выполнены и для множеств $\tilde{\Gamma}$. Остается доказать, что покрытие $\tilde{\gamma} = \{\tilde{\Gamma}\}$ окрестности $\tilde{U} = \bigcup \tilde{\Gamma}$ множества M локально-конечно в $\tilde{U}$.

В самом деле, пусть

$$y \in \tilde{U} = \bigcup \tilde{\Gamma}.$$

Это значит, что некоторое множество $\tilde{\Gamma} \ni y$, т. е. что в некотором Γ' содержится такая точка x, для которой $y \in \tilde{O}x$. Покажем, что открытая

в R окрестность $Ux = \tilde{O}x$ точки y пересекается лишь с конечным числом множеств $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\gamma}$. Так как покрытие γ' локально-конечно, то каждая точка $x \in M$ принадлежит лишь конечному числу множеств Γ' и даже конечному числу замыканий $M[\Gamma']$ этих множеств. Поэтому для нашей цели достаточно доказать, что окрестность $\tilde{O}x$ пересекается лишь с теми множествами $\tilde{\Gamma}$, для которых замыкания соответствующих множеств Γ' содержат x. Допустим, вопреки этому, что $\tilde{O}x \cap \tilde{\Gamma} \neq \Lambda$ и что в то же время $x \notin M[\Gamma']$. Тогда существует такая точка x' в соответствующем множестве Γ', что $\tilde{O}x \cap \tilde{O}x' \neq \Lambda$. Поэтому

$$\rho(x,\ x') < \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\alpha}(x').$$

Тут возможны два случая:

$$\tilde{\alpha}(x) \leqslant \tilde{\alpha}(x') \text{ и } \tilde{\alpha}(x) > \tilde{\alpha}(x').$$

В первом из них

$$\rho(x,\ x') < \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\alpha}(x') \leqslant 2\tilde{\alpha}(x') \leqslant \rho(x',\ M \setminus \Gamma'),$$

откуда следует, что $x \in \Gamma'$, а это противоречит нашему допущению.

Во втором случае из того, что $x \in M[\Gamma']$, следует:

$$\rho(x,\ x') < \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\alpha}(x') < 2\tilde{\alpha}(x) \leqslant \rho(x,\ F_x) \leqslant \rho(x,\ M[\Gamma']),$$

откуда вытекает, что $x' \in M \setminus M[\Gamma']$, это противоречит тому, что точка x' была выбрана именно из множества Γ'. Таким образом, наше допущение оказалось ложным. Следовательно, если $\tilde{O}x \cap \Gamma \neq \Lambda$, то $x \in M[\Gamma']$, а отсюда, как мы уже знаем, вытекает, что покрытие $\tilde{\gamma}$ окрестности $\tilde{U}$ локально-конечно в U. Лемма доказана полностью.

Заметим, что для конечных открытых покрытий множества M настоящая лемма была доказана Э. Чехом даже в случае наследственной нормальности* пространства R [см. (5), гл. 3, § 21].

Легко привести пример такого счетного открытого локально-конечного покрытия интервала (0; 1), которое нельзя подобно продолжить в покрытие какого-нибудь бо́льшего множества, локально-конечное относительно всего пространства R, за которое в данном случае можно принять отрезок [0; 1].

Хотелось бы иметь пример такого метрического пространства R, такого лежащего в нем множества M и такого точечно-конечного открытого покрытия γ' множества M, которое нельзя было бы продолжить в точечно-конечное покрытие никакой окрестности множества M.

Поступило
2. II. 1955

* Топологическое пространство называется наследственно нормальным, если всякое лежащее в нем множество нормально.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смирнов Ю., О метризации топологических пространств, Успехи матем. наук, 6, 6(46) (1951), 100—111.

[2] Dowker C. H., Mapping Theorems for non-compact Spaces, Amer. J. Math., 69, No 2 (1947), 200—242.

[3] Александров П. и Урысон П., О компактных топологических пространствах, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, 31, 1950.

[4] Смирнов Ю., К теории финально-компактных пространств, Украинский матем. журнал, 3, № 1 (1951), 52—60.

[5] Cech E., Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, Fund. Math., 19 (1932), 149—183.

[6] Morita K., Star-finite coverings and the star-finite property, Math. Jap., 1(1948), 60—68.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 275—288

Г. Е. ХУХУНАЙШВИЛИ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБРАЗЫ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе исследуются непрерывные образы гильбертова пространства. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять метрическое пространство для того, чтобы оно могло быть непрерывным образом гильбертова пространства.

Задача изучения непрерывных образов гильбертова пространства была впервые поставлена П. С. Александровым на одном из заседаний Московского математического общества.

Первый результат в этом направлении был получен Р. Ю. Мацкиной ([1]) и состоял в следующем. Известно, что гильбертово пространство есть связное метрическое сепарабельное пространство типа G_δ не F_σ *. Поэтому его непрерывный образ, лежащий в метрическом пространстве, будет связным сепарабельным метрическим пространством, дескриптивная структура которого не сложнее, чем A-множество.

Р. Ю. Мацкина доказала, что непрерывный образ гильбертова пространства может быть A-множеством, содержащим замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное произвольному A-множеству. В частности, можно построить непрерывное отображение гильбертова пространства в эвклидову плоскость, содержащее в качестве замкнутого подмножества множество, гомеоморфное любому A-множеству, лежащее на эвклидовой прямой.

После того как изучена дескриптивная структура непрерывных образов гильбертова пространства, естественно поставить вопрос об изучении топологических свойств тех множеств, на которые гильбертово пространство можно отобразить непрерывно. Этой задаче посвящена настоящая работа.

Начнем изучение вопроса с исследования необходимых условий, которым должно удовлетворять множество для того, чтобы оно могло быть непрерывным образом гильбертова пространства.

Определение. Множество E назовем *линейно связным*, если для любых его двух точек существует соединяющая их простая дуга, лежащая в E.

---

* Всегда, когда не отмечается особо, E-множество (A-множество) считается метрически абсолютным, т. е. оно является B-множеством (A-множеством) в любом содержащем его полном метрическом пространстве.

Заметим, во-первых, что метрическое пространство E только тогда может быть непрерывным образом гильбертова пространства, когда оно сепарабельно.

Во-вторых, гильбертово пространство есть множество типа G_δ, поэтому его непрерывный образ будет A-множеством.

В-третьих, гильбертово пространство линейно связно, а линейная связность сохраняется при непрерывном отображении. Поэтому множество E только тогда может быть непрерывным образом гильбертова пространства, когда оно линейно связно.

Приведенные выше условия не являются достаточными. Это доказывает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим канторово совершенное множество P на сегменте $[0,1]$ оси OX эвклидовой плоскости XOY. Обозначим через K множество, состоящее из отрезка $[0,1]$ оси OX и топологического произведения множества P на отрезок $[0,1]$ оси OY.

Множество K удовлетворяет вышеприведенным необходимым условиям, но не может быть непрерывным образом гильбертова пространства. В самом деле, в противном случае открытое в K множество, которое состоит из несчетного множества компонент, имело бы в качестве прообраза открытое в гильбертовом пространстве множество, состоящее из несчетного множества компонент, что невозможно.

Мы можем сформулировать еще одно необходимое условие:

для того, чтобы множество E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо, чтобы произвольное открытое в E множество содержало не более чем счетное множество компонент.

Покажем, что вышеприведенные необходимые условия не являются достаточными. Для этого заметим, что в локально связном пространстве со счетной базой любое открытое множество содержит не более чем счетное множество компонент. Поэтому достаточно построить линейно и локально связное A-множество со счетной базой, на которое нельзя непрерывно отображать гильбертово пространство.

Воспользуемся построенным Кнастером и Куратовским [2] примером связного множества, которое не представимо в виде суммы двух непересекающихся нетривиальных * связных множеств. Множество Кнастера и Куратовского строится следующим образом. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ оси x плоскости XOY канторово совершенное множество C и точку $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Обозначим через P множество точек первого рода, а через Q — множество точек второго рода множества C. Обозначим отрезок, соединяющий точку A с точкой $c \in C$, через $L(c)$. Через S_1 обозначим множество всех точек множеств $L(p)$, $p \in P$, которые имеют рациональную ординату, а через S_2 — множество всех тех точек множеств $L(q)$, $q \in Q$, которые имеют иррациональную ординату. Как доказано в [2], множество $S = S_1 \cup S_2$ есть искомое множество. Пусть S' — множество, симметричное относительно оси x множеству S. Множество $S \cup S'$, как показано в [2], разбивает плоскость (т. е. в дополнительном к $S \cup S'$ множестве не вся-

* Тривиальным связным множеством называется пустое множество или множество, состоящее из одной точки.

кие две точки можно соединить континуумом, не пересекающимся с $S \cup S'$). Следовательно, дополнительное к $S \cup S'$ множество тем более не является линейно связным.

Сейчас мы можем построить нужный нам пример.

Пример 2. Пусть S^* — множество, дополнительное к $S \cup S'$ относительно четырехугольника, вершинами которого служат точки:

$$O(0,0), \quad A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B(1,0), \quad A'\left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}\right).$$

Обозначим через E множество, состоящее из топологического произведения множества S^* на отрезок $[0,1]$ оси OZ и четырехугольника, лежащего в плоскости $z = 1$, вершинами которого служат точки

$$(0,0,1), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad (1,0,1) \text{ и } \left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Можно показать, что множество E есть линейно и локально связное A-множество, но на него гильбертово пространство нельзя отобразить непрерывно.

Легко установить, что множество E есть множество второго класса в классификации Бэра.

Линейная связность множества E также очевидна, а локальная связность множества E вытекает из локальной связности множества S^*. Покажем, что множество S^* связно и локально связно. Связность множества S^* следует из (2), но мы проведем доказательство связности, так как из него будет следовать и локальная связность.

Рассмотрим треугольники, основанием которых служат смежные интервалы множества C, а вершиной — точка A или A'. На границе каждого такого треугольника лежат точки множества S^*. Присоединим эти точки к соответствующим треугольникам и назовем полученное множество *смежным треугольником*. *Смежными четырехугольниками* назовем четырехугольники, полученные объединением симметричных относительно оси x смежных треугольников. Предположим, что множество S^* не связно. Тогда существует представление множества S^* в виде

$$S^* = M \cup N,$$

где M и N — непустые подмножества множества S^*, и имеет место равенство:

$$[M] \cap N \cup M \cap [N] = \Lambda. \tag{1}$$

Очевидно, что каждый четырехугольник содержится или в M или в N и что каждое из множеств M, N содержит хотя бы один четырехугольник. Пусть смежный четырехугольник $K_1 \subset M$ и смежный четырехугольник $K_2 \subset N$ и пусть K_1 лежит левее K_2. Легко видеть, что между K_1 и K_2 лежат как четырехугольники, принадлежащие M, так и четырехугольники, принадлежащие N. Поэтому существует $q_0 \in Q$ такое, что $L(q_0) \subset [M]$ и $L(q_0) \subset [N]$. Но так как на $L(q_0)$ лежат точки мно-

жества S^*, то хотя бы одно слагаемое в (1) не пусто. Следовательно, S^* связно.

Заменяя в предыдущих рассуждениях смежные четырехугольники пересечением смежных четырехугольников со сферической окрестностью произвольной точки множества S^*, мы докажем, что множество S^* локально связно.

Как уже было указано, не всякие две точки множества S^* соединимы простой дугой. Покажем, что две точки множества S^* тогда и только тогда можно соединить простой дугой, лежащей в S^*, когда они принадлежат одному и тому же смежному четырехугольнику. Достаточность условия очевидна. Для доказательства необходимости нужно рассмотреть несколько случаев. Мы рассмотрим тот случай, к которому можно привести все остальные. Предположим, что точки x и y принадлежат разным четырехугольникам и соединимы простой дугой, лежащей в S^*. Без ограничения общности можно предполагать, что обе рассматриваемые точки лежат в верхней полуплоскости. Если простая дуга, соединяющая точки x и y, лежит в верхней полуплоскости, то, рассматривая симметричную ей относительно оси x простую дугу и соединяя точки x с x и y с y' (где x' и y' — точки, симметричные относительно OX точкам x и y) простыми дугами, лежащими в соответствующих смежных четырехугольниках, мы получим замкнутый контур K, принадлежащий множеству S^*. Следовательно, существуют хотя бы две точки связного множества $S \cup S'$ и континуум K, разбивающий плоскость между этими двумя точками*, который не имеет общей точки с $S \cup S'$. Но это противоречит связности множества $S \cup S'$ **. Таким образом, точки x и y нельзя соединить простой дугой, лежащей в S^*, откуда следует, что связное и локально связное множество S^* не являются непрерывным образом гильбертова пространства.

Остается доказать, что гильбертово пространство нельзя непрерывно отобразить на множество E. Предположим противное, т. е. что существует непрерывное отображение $y = f(x)$ гильбертова пространства H на множество E. Рассмотрим произвольную точку

$$y_0 \in S^* \cap L(q),$$

где $q \in Q$, и открытое в E множество G диаметра меньше 1, содержащее точку y_0. Прообраз множества G в H есть открытое множество, которое имеет не более чем счетное множество компонент. В гильбертовом пространстве произвольное связное открытое множество линейно связно, поэтому прообраз множества G есть сумма не более чем счетного числа линейно связных множеств. Отсюда следует, что множество G тоже должно обладать этим свойством, но G этим свойством не обладает, так

---

* Множество E разбивает плоскость между двумя точками, которые ему не принадлежат, если всякий континуум, содержащий эти точки, пересекается с E.

** Кнастер и Куратовский [2] доказали (теорема XXXIX), что ограниченное множество E связно тогда и только тогда, когда всякий континуум, который разбивает плоскость между двумя точками множества E, имеет общую точку с E.

как оно пересекается с несчетным числом отрезков, восстановленных из точек

$$y \in S^* \cap L(q), \quad q \in Q,$$

а точки множества G, принадлежащие разным отрезкам такого типа, не соединимы в G простой дугой, так как в противном случае были бы соединимы простой дугой в S^* их проекции.

Отсюда следует еще одно необходимое условие: для того чтобы множество E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо, чтобы произвольное открытое в E множество можно было представить в виде суммы не более чем счетного числа линейно связных множеств.

Мы покажем, что это условие вместе с некоторыми ранее рассмотренными является и достаточным.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА 1.* *Пусть в метрическом пространстве R задано множество B, гомеоморфное бэровскому пространству. Тогда B можно представить в виде*

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1 \ldots n_k} G_{n_1 \ldots n_k},$$

где $G_{n_1 \ldots n_k}$ — открытые в R множества, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $G_{n_1 \ldots n_k} \supset G_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$;

2) *множества одного и того же ранга попарно не пересекаются;*

3) *диаметры множеств $G_{n_1 \ldots n_k}$ равномерно стремятся к нулю, когда $k \to \infty$;*

4) *для любой последовательности $n_1, n_2, \ldots$ натуральных чисел множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n_1 \ldots n_k}$ состоит только из одной точки.*

Эта лемма непосредственно следует из одной леммы, доказанной в ([3]) (стр. 15) и из того, что существует представление множества B в виде:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1 \ldots n_k} \Delta_{n_1 \ldots n_k},$$

где $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ — открытые в B множества, удовлетворяющие условиям леммы.

Докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы метрическое пространство E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *E было линейно связным, сепарабельным, абсолютным A-множеством;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ E было представимо в виде суммы не более чем счетного числа линейно связных множеств, диаметры которых меньше ε.*

Доказательство необходимости. Пусть метрическое пространство E есть непрерывный образ гильбертова пространства. Тогда

* После того как лемма 1 была нами доказана, Ю. М. Смирнов сообщил простое доказательство более общей леммы, которое потом было опубликовано в работе К. А. Ситникова ([3]). Поэтому мы доказательство опускаем.

очевидно, что E есть линейно связное, сепарабельное, абсолютное A-множество. Чтобы доказать, что E удовлетворяет условию 2), заметим, что E можно покрыть счетным числом открытых множеств G_i, $i = 1, 2, \ldots$, диаметр которых меньше ε, т. е.

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Прообраз в гильбертовом пространстве каждого множества G_i содержит не более чем счетное число компонент. Компонента открытого множества в гильбертовом пространстве есть открытое множество, следовательно, линейно связна. Рассматривая образы этих компонент, мы получим разбиение каждого G_i на сумму не более чем счетного числа линейно связных множеств.

Доказательство достаточности. Пользуясь теоремой П. С. Урысона о голоморфном вложении метрических сепарабельных пространств в гильбертово [см. (4)], без ограничения общности можно предполагать, что E есть подмножество гиперплоскости H_1 ($x_2 = x_4 = \ldots = x_{2n} = \ldots = 0$) гильбертова пространства H. Так как E есть A-множество, то в гильбертовом пространстве H можно построить множество B, гомеоморфное бэровскому пространству, проекция которого на гиперплоскости H_1 есть E; это можно сделать так же, как строится плоское множество, гомеоморфное бэровскому пространству, проекция которого есть заранее заданное линейное A-множество [см. (5)]. При этом можно предполагать, что B задано в виде:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1 \ldots n_k} G_{n_1 \ldots n_k},$$

где $G_{n_1 \ldots n_k}$ — открытые в H множества, удовлетворяющие условиям леммы 1. Кроме того, предположим, что диаметры множеств $G_{n_1 \ldots n_k}$ ранга k меньше ε_k, где $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$ и $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_k > \ldots$.

Представим множество B в специальном виде. По условию 2), множество E можно представить в виде

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^k,$$

где E_i^k ($i = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$) — линейно связные подмножества E, диаметры которых (при фиксированном k) меньше ε_k. Каждому множеству E_i^k поставим в соответствие множество E_i^{k*} всех точек гильбертова пространства H, проекции которых на H_1 составляют множество E_i^k.

Рассмотрим множества

$$B \cap G_{n_1} \cap E_i^{1*} \quad (n_1 = 1, 2, \ldots; \ i = 1, 2, \ldots)$$

и перенумеруем полученные непустые множества, обозначив их через B_m, $m_1 = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, что каждое B_{m_1} есть подмножество некоторого G_{n_1}, поэтому диаметры множеств B_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \ldots$, меньше ε_1. Любые две точки, принадлежащие проекции на H_1 множества B_{m_1}, соединимы в E простой дугой, диаметр которой меньше ε_1, и $B = \bigcup\limits_{m_1=1}^{\infty} B_{m_1}$.

Пусть построены непустые множества $B_{m_1\ldots m_i}$ ранга i $(i=1,2,\ldots,k)$ так, что каждое $B_{m_1\ldots m_i}$ есть подмножество некоторого множества $G_{n_1\ldots n_i}\cap B$. Любые две точки, принадлежащие проекции на H_1 множества $B_{m_1\ldots m_i}$, соединимы в E простой дугой, диаметр которой меньше ε_i. Кроме того,

$$B_{m_1\ldots m_i}\supset B_{m_1\ldots m_i\,m_{i+1}}\quad (i=1,2,\ldots,k-1;\quad m_{i+1}=1,2,\ldots)$$

и

$$B_{m_1\ldots m_i}=\bigcup_{m_{i+1}=1}^{\infty}B_{m_1\ldots m_i\,m_{i+1}}\quad (i\leqslant k).$$

Для построения множеств $B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}$ ранга $k+1$ рассмотрим произвольное множество $B_{m_1\ldots m_k}$. Так как $B_{m_1\ldots m_k}$ — непустое подмножество некоторого множества $B\cap G_{n_1\ldots n_k}$ и

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^{(k+1)^*}\supset B,$$

то хоть одно из множеств

$$E_i^{(k+1)^*}\cap B_{m_1\ldots m_k}\cap G_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\quad (i=1,2,\ldots;\ n_{k+1}=1,2,\ldots)\qquad (2)$$

не пусто. Перенумеруем непустые множества из системы (2), обозначив их через $B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}$, $m_{k+1}=1,2,\ldots$ (может быть, с повторениями). Очевидно, что

$$B_{m_1\ldots m_k}\supset B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}\quad (m_{k+1}=1,2,\ldots)$$

и

$$B\cap G_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\supset B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}\text{ для некоторого }n_{k+1}.$$

Кроме того, проекции на H_1 любых двух точек множества $B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}$ соединимы в E простой дугой, диаметр которой меньше ε_{k+1}, и, наконец,

$$B_{m_1\ldots m_k}=\bigcup_{m_{k+1}=1}^{\infty}B_{m_1\ldots m_k m_{k+1}}.$$

Легко видеть, что

$$B=\bigcup_{m_1 m_2\ldots}\bigcap_{k=1}^{\infty}B_{m_1\ldots m_k}.$$

По построению, для каждой последовательности $m_1, m_2,\ldots$ натуральных чисел существует такая последовательность $n_1, n_2,\ldots$ натуральных чисел, что

$$G_{n_1\ldots n_k}\supset B_{m_1\ldots m_k},$$

и так как последовательность $n_1, n_2,\ldots$ определяет единственную точку $y=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_{n_1\ldots n_k}$ множества B, то имеем:

$$y=\bigcap_{k=1}^{\infty}[B_{m_1\ldots m_k}].$$

Следовательно, множество B можно записать и в виде:

$$B=\bigcup_{m_1 m_2\ldots}\bigcap_{k=1}^{\infty}[B_{m_1\ldots m_k}].$$

Пусть нам даны два «экземпляра» гильбертова пространства H^* и H. Мы будем непрерывно отображать пространство H^* на множество E, которое лежит в гиперплоскости H_1 пространства H. Известно [см. (6)], что во всяком A-множестве не F_σ существует замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству. Такое замкнутое множество в пространстве H^* строится так же, как в работе (1): берется счетная система точек M_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих следующим требованиям: все координаты точки M_{m_1}, за исключением координаты с индексом m_1, равны нулю, а координата с индексом m_1 равна 1. Если построены точки $M_{m_1 \ldots m_k}$ для любых натуральных $m_1, \ldots, m_k$, то точки $M_{m_1 \ldots m_k m_{k+1}}$ определяем следующим образом: все координаты точки $M_{m_1 \ldots m_k m_{k+1}}$, за исключением координаты с индексом m_{k+1}, совпадают с соответствующими координатами точки $M_{m_1 \ldots m_k}$, а координата с индексом m_{k+1} больше соответствующей координаты точки $M_{m_1 \ldots m_k}$ на $\frac{1}{4^k}$. После этого вокруг точек $M_{m_1 \ldots m_k}$ описываются концентрические шары с радиусами, равными соответственно $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}$ и $\frac{7}{4^3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}$. Внутренности этих шаров обозначаются через $Q_{m_1 \ldots m_k}$ и $\tilde{Q}_{m_1 \ldots m_k}$. Очевидно, что

$$Q_{m_1 \ldots m_k} \supset [\tilde{Q}_{m_1 \ldots m_k}]. \tag{3}$$

Кроме того, легко проверить, что

$$\tilde{Q}_{m_1 \ldots m_k} \supset [Q_{m_1 \ldots m_k m_{k+1}}], \quad m_{k+1} = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и что

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m_1 \ldots m_k} Q_{m_1 \ldots m_k} = \bigcup_{m_1 m_2 \ldots} \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{m_1 \ldots m_k}$$

есть замкнутое множество. Из (3) и (4) следует, что множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{m_1 \ldots m_k}$ состоит только из одной точки.

Отобразим множество $Q \subset H^*$ на множество $B \subset H$ следующим образом. Каждая точка $x \in Q$ определяется единственной последовательностью $m_1, m_2, \ldots$ натуральных чисел; но каждая последовательность $m_1, m_2, \ldots$ определяет единственную точку в B. А именно, если

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{m_1 \ldots m_k},$$

то

$$y = \bigcap_{k=1}^{\infty} [B_{m_1 \ldots m_k}].$$

Поставим в соответствие точке x точку y. Заметим, что образ множества $Q \cap Q_{m_1 \ldots m_k}$ при этом отображении есть подмножество множества $[B_{m_1 \ldots m_k}]$. Легко проверить, что полученное отображение непрерывно.

Построенное нами отображение множества Q на множество B дополним до отображения всего пространства H^* на множество B', полученного из B присоединением счетного числа простых дуг. При этом нам нужно

будет позаботиться, чтобы проекция на H_1 множества B' была множеством E. Покажем, как это делается.

Заметим, что если точки M_1' и M_2' гильбертова пространства H проектируются на гиперплоскость H_1 в точки M_1 и M_2 и дуга l диаметра δ соединяет точки M_1 и M_2 в H_1, то существует дуга l', соединяющая точки M_1' и M_2' и проектирующаяся на l. Кроме того, можно добиться, чтобы диаметр δ' дуги l' был не больше, чем $\delta + \rho(M_1', M_2')$.

Перейдем к построению множества B'. Пусть P_0 — произвольная точка, принадлежащая множеству B. В каждом множестве $B_{m_1 \dots m_k}$ возьмем по одной точке $P_{m_1 \dots m_k}$. Проекции на H_1 точек P_0 и P_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \dots$, принадлежат множеству E, и так как E линейно связно, то, по сделанному выше замечанию, точку P_0 можно соединить с точками P_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \dots$, простыми дугами l_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \dots$, которые проектируются в E. Затем каждую точку $P_{m_1 \dots m_k}$ можно соединить простыми дугами $l_{m_1 \dots m_k m_{k+1}}$ с точками $P_{m_1 \dots m_k m_{k+1}}$, $m_{k+1} = 1, 2, \dots$, так, чтобы их проекции лежали в E и диаметры были меньше $2\varepsilon_k$. Это следует из того, что точки $P_{m_1 \dots m_k}$ и $P_{m_1 \dots m_k m_{k+1}}$, $m_{k+1} = 1, 2, \dots$, принадлежат множеству $B_{m_1 \dots m_k}$ и, следовательно, расстояние между ними меньше ε_k. Кроме того, проекции этих точек соединимы в E простой дугой, диаметр которой меньше ε_k.

Прибавляя простые дуги $l_{m_1 \dots m_k}$ ($m_1 = 1, 2, \dots$; $m_k = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$) к множеству B, мы получим множество B', которое проектируется на E и на которое гильбертово пространство можно отобразить непрерывно. Так как множество B' проектируется на E, то отсюда следует возможность непрерывного отображения гильбертова пространства на множество E.

Построим отображение пространства H^* на B'. Мы имеем отображение множества $Q \subset H^*$ на множество $B \subset B'$. Множество точек пространства H^*, не принадлежащих ни одному множеству Q_{m_1}, $m_1 = 1, 2, \dots$, отобразим в точку P_0. Затем множество точек, не принадлежащих ни одному шару $Q_{m_1 m_2}$, $m_2 = 1, 2, \dots$, и принадлежащих множеству $[\tilde{Q}_{m_1}]$, т. е. множество

$$[\tilde{Q}_{m_1}] \setminus \bigcap_{m_2=1}^{\infty} Q_{m_1 m_2},$$

отобразим в точку P_{m_1}, а множество

$$[Q_{m_1}] \setminus \tilde{Q}_{m_1}$$

— на простую дугу l_{m_1}. Это можно сделать, например, следующим образом. Сперва множество $[Q_{m_1}] \setminus \tilde{Q}_{m_1}$ отобразим на отрезок $[0,1]$ при помощи формулы

$$t = \frac{\rho(\xi, \sigma_{m_1})}{\rho(\xi, \sigma_{m_1}) + \rho(\xi, \tilde{\sigma}_{m_1})}, \tag{5}$$

где σ_{m_1} и $\tilde{\sigma}_{m_1}$ — поверхности шаров Q_{m_1} и $\tilde{Q}_{m_1}$, а ξ — переменная точка. Затем отобразим отрезок $[0,1]$ гомеоморфно на простую дугу l_{m_1} так, чтобы точке 0 соответствовала точка P_0, а точке 1 — точка P_{m_1}.

Для любого k множество

$$[\tilde{Q}_{m_1 \dots m_k}] \setminus \bigcup_{m_{k+1}=1}^{\infty} Q_{m_1 \dots m_{k+1}}$$

отобразим в точку $P_{m_1 \dots m_k}$, а множество

$$[Q_{m_1 \dots m_k}] \setminus \tilde{Q}_{m_1 \dots m_k}$$

— на простую дугу $l_{m_1 \dots m_k}$. При этом граница шара $Q_{m_1 \dots m_k}$ переходит в точку $P_{m_1 \dots m_{k-1}}$, а граница шара $\tilde{Q}_{m_1 \dots m_k}$ переходит в точку $P_{m_1 \dots m_k}$.

Таким образом мы получим отображение f гильбертова пространства H^* на множество B'. Покажем, что отображение f непрерывно.

Непрерывность отображения f в точках, не принадлежащих множеству H^*, очевидна. Непрерывность отображения $y = f(x)$ в точках $x \in Q$ следует из того, что диаметр образа множества $Q_{m_1 \dots m_k}$ при этом отображении меньше, чем $5\varepsilon_k$. Действительно, образ множества $Q \cap Q_{m_1 \dots m_k}$, как мы видели, есть подмножество множества $[B_{m_1 \dots m_k}]$, диаметр которого меньше, чем ε_k. А так как множество $Q_{m_1 \dots m_k} \setminus Q \cap Q_{m_1 \dots m_k}$ отображается на сумму простых дуг, которые имеют общие точки с $B_{m_1 \dots m_k}$ и диаметр каждой из которых меньше, чем $2\varepsilon_k$, то диаметр образа множества $Q_{m_1 \dots m_k}$ меньше, чем $5\varepsilon_k$.

Этим теорема 1 доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы метрическое пространство E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *E было линейно связным сепарабельным абсолютным A-множеством;*

2) *произвольное открытое в E множество можно было представить в виде суммы не более чем счетного числа линейно связных множеств.*

Так как всякое связное и локально связное множество типа G_δ является линейно связным множеством [см. (7)] так же, как и всякое его связное открытое подмножество, то из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Всякое связное локально связное метрическое сепарабельное абсолютное G_δ является непрерывным образом гильбертова пространства.* *

Из доказанной теоремы можно сделать некоторые выводы, которые кажутся нам интересными. Предварительно сделаем несколько замечаний.

Мы уже отметили (лемма 1), что если метрическое пространство E содержит множество B, гомеоморфное бэровскому пространству, то B можно представить в виде:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m_1 \dots m_k} G_{m_1 \dots m_k}, \tag{6}$$

где $G_{m_1 \dots m_k}$ — открытые в E множества, удовлетворяющие условиям леммы 1. Легко доказать, что *если в условиях леммы 1 множество B замкнуто в E, то можно построить такое представление* (6), *что множество*

---

* Отметим, что уже для множества типа F_σ связность и локальная связность не являются достаточными для того, чтобы на него можно было непрерывно отобразить гильбертово пространство. Это следует из примера Мура (8) связного и локально связного F_σ, которое не содержит простой дуги.

$\bigcup_{m_1 \dots m_k} [G_{m_1 \dots m_k}]$ *замкнуто, множества* $[G_{m_1 \dots m_k}]$ *одного и того же ранга не пересекаются и для каждого* $G_{m_1 \dots m_k}$ *существует такое* $\tilde{G}_{m_1 \dots m_k}$, *что*

$$G_{m_1 \dots m_k} \supset [\tilde{G}_{m_1 \dots m_k}]$$

и

$$\tilde{G}_{m_1 \dots m_k} \supset \bigcup_{m_{k+1}=1} [G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}}].$$

В самом деле, так как $G_{m_1 \dots m_k} \cap B$ — замкнутое множество, то существует открытое множесто

$$G \supset G_{m_1 \dots m_k} \cap B$$

такое, что

$$G_{m_1 \dots m_k} \supset [G].$$

Заменяя каждое $G_{m_1 \dots m_k}$ соответствующим G, мы получим множества $G_{m_1 \dots m_k}$, замыкания которых не пересекаются. Предположим, что $G_{m_1 \dots m_k}$ такими и являются и покажем, что множества $G_{m_1 \dots m_k}$ можно подобрать так, чтобы $\bigcup_{m_1 \dots m_k} [G_{m_1 \dots m_k}]$ было замкнуто. Так как B — замкнутое множество, то его можно представить в виде:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k \supset V_{k+1},$$

где V_k — открытые в E множества. Для простоты мы покажем, что множества G_{m_1} первого ранга можно подобрать так, чтобы множество $\bigcup_{m_1=1}^{\infty} [G_{m_1}]$ было замкнуто. Можно предполагать, что $V_k \supset [G_k]$. Тогда никакая последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, где $x_k \in [G_k]$, не имеет предельной точки. Действительно, так как $x_k \in V_k$, то такая предельная точка должна принадлежать множеству B. Но тогда она принадлежит некоторому G_{k_0} и, следовательно, лежит в некоторой сфере, не содержащей точек x_k, $k \neq k_0$, и не может быть предельной для последовательности $x_1, x_2, \dots$.

Аналогичное утверждение можно доказать для любого ранга.

Наконец, легко можно добиться того, чтобы для каждого $G_{m_1 \dots m_k}$ существовало такое $\tilde{G}_{m_1 \dots m_k}$, что

$$G_{m_1 \dots m_k} \supset [\tilde{G}_{m_1 \dots m_k}] \text{ и } \tilde{G}_{m_1 \dots m_k} \supset \bigcup_{m_{k+1}=1} [G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}}].$$

Для этого заменяем $G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}}$ открытым множеством, содержащим множество $G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}} \cap B$ и содержащимся со своим замыканием в $G_{m_1 \dots m_k}$ так, что:

$$G_{m_1 \dots m_k} \supset [G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}}], \quad m_{k+1} = 1, 2, \dots,$$

и затем, пользуясь тем, что множество $\bigcup_{m_{k+1}=1}^{\infty} [G_{m_1 \dots m_k\, m_{k+1}}]$ замкнуто, легко находим нужное нам $\tilde{G}_{m_1 \dots m_k}$.

Пользуясь доказанным предложением и рассуждая так же, как при доказательстве основной теоремы, можно показать, что:

1) *условия, наложенные в теореме* 1 *на множество* E, *являются необходимыми и достаточными для того, чтобы оно было непрерывным*

образом произвольного связного, локально связного метрического сепарабельного абсолютного G_δ не F_σ;

2) *условия, наложенные на множество E, являются достаточными для того, чтобы оно было непрерывным образом произвольного метрического сепарабельного абсолютного A-множества не F_σ.*

Это следует из того, что такое A-множество содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное бэровскому пространству [см. (6)].

Необходимость в первом случае очевидна.

Достаточность (в обоих случаях) доказывается совершенно так же, как для гильбертова пространства H^*, с тем изменением, что здесь замкнутое множество задано в виде (6) и поэтому шары $Q_{m_1 \dots m_k}$ и $\bar{Q}_{m_1 \dots m_k}$ придется заменять соответственно множествами $G_{m_1 \dots m_k}$ и $\bar{G}_{m_1 \dots m_k}$ из (6) а формулу (5), вообще говоря, придется заменить формулой

$$t = \frac{\rho(\xi, (E \setminus G_{m_1}))}{\rho[\xi, (E \setminus G_{m_1})] + \rho(\xi, \bar{G}_{m_1})}$$

(здесь формула написана для первого ранга). Вместо отображения на $_{m_1 \dots m_k}$ (во втором случае) иногда имеет место отображение в $l_{m_1 \dots m_k}$.

Из предыдущего следует, что такие пространства, как, например, пространство C всех непрерывных на сегменте $[0,1]$ функций, пространство $L_p\,(p \geqslant 2)$ всех суммируемых с p-й степенью функций на $[0,1]$, являются непрерывными образами одно другого. Действительно, все эти пространства являются абсолютными G_δ не F_σ.

Укажем еще одну форму необходимого и достаточного условия.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы метрическое пространство E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *E было линейно связным сепарабельным абсолютным A-множеством;*

2) *E было представимо в виде:*

$$E = \bigcup_{n_1 n_2 \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k},$$

где $E_{n_1 \dots n_k} \supset E_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, множества $E_{n_1 \dots n_k}$ линейно связны и их диаметры равномерно стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Доказательство этой теоремы легко выводится из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Если метрическое пространство E для любого $\varepsilon > 0$ представимо в виде*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{\varepsilon},$$

где E_i^{ε} — линейно связные множества, диаметры которых меньше ε, то оно представимо в виде:

$$E = \bigcup_{n_1 n_2 \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k},$$

где $E_{n_1 \dots n_k}$ — линейно связные множества, диаметры которых равномерно стремятся к нулю, когда $k \to \infty$ и $E_{n_1 \dots n_k} \supset E_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$.

Доказательство. Зададим последовательность положительных чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$. По условию, для любого числа $\frac{1}{2^n}$ суще-

ствует представление множества E в виде

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^n,$$

где E_i^n — линейно связные множества, диаметры которых меньше $\frac{1}{2^n}$. Каждому множеству E_i^n $(i = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ поставим в соответствие новое множество следующим образом. Присоединим к множеству E_i^n все те множества из системы E_i^{n+1}, $i = 1, 2, \ldots$, которые пересекаются с E_i^n. К полученному множеству присоединим все те множества из системы E_i^{n+2}, $i = 1, 2, \ldots$, которые пересекаются с последним, и т. д. Очевидно, что полученные множества будут линейно связными и их диаметры не превосходят (для заданного n) числа $\frac{3}{2^n}$.

Обозначим через E_{n_1}, $n_1 = 1, 2, \ldots$, все множества, поставленные в соответствие множествам E_i^1, $i = 1, 2, \ldots$ (очевидно, нумерация может быть с повторениями). Легко видеть, что

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} E_{n_1}.$$

Пусть для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ перенумерованы все множества, поставленные в соответствие множествам E_i^j, $i = 1, 2, \ldots$. Они обозначены через $E_{n_1 \ldots n_j}$, где $n_1 \ldots n_j$ принимают всевозможные значения из натурального ряда чисел. Нумерация проведена таким образом, что

$$E_{n_1 \ldots n_j} \supset E_{n_1 \ldots n_j n_{j+1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Очевидно, что

$$E = \bigcup_{n_1 \ldots n_j} E_{n_1 \ldots n_j}, \quad j \leqslant k.$$

Для построения множеств $E_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ рассмотрим произвольное множество $E_{n_1 \ldots n_k}$ и перенумеруем через $E_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$, $n_{k+1} = 1, 2, \ldots$ (вообще говоря, с повторениями) все те множества из системы множеств, которые поставлены в соответствие множествам E_i^{k+1} $(i = 1, 2, \ldots)$ и являются подмножествами множества $E_{n_1 \ldots n_k}$ (такие множества, очевидно, существуют). Проделав такую операцию над каждым множеством $E_{n_1 \ldots n_k}$, мы, очевидно, перенумеруем все множества, поставленные в соответствие всевозможным множествам E_i^{k+1}, $i = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, что

$$E = \bigcup_{n_1 n_2 \ldots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \ldots n_k}.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22.VI.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мацкина Р. Ю., О непрерывных образах гильбертова пространства, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 95—101.

[2] Knaster B. et Kuratowski C., Sur les ensembles connexes, Fund. Math., 2 (1921), 206—255.

[3] Ситников К. А., Комбинаторная топология незамкнутых множеств. 1, Матем. сборн., т. 34 (76) : 1 (1954), 3—54.

[4] Урысон П. С., Гильбертово пространство как прообраз метрических пространств, Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М. — Л. (1951), 147—150.

[5] Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А., Теория A-множеств, Успехи матем. наук, V, вып. 5 (39) (1950), 45—103.

[6] Hurewics W., Relativ perfecte Teile von Punktmengen und Mengen (A), Fund. Math., 12 (1928), 78—109.

[7] Whyburn G. Th., Analytic topology, Amer. Math. Soc. colloqu. publications, XXVIII, 1942, N. Y.

[8] Moore R. L., A connected and regular point set which contains no arc, Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1926), 331—332.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 289—302

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Даны новые теоремы, позволяющие получать оценки сумм вида

$$\sum_{0<x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)}, \qquad f(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x,$$

где x пробегает или числа натурального ряда, или же простые числа. Преимущественно имеется в виду случай, когда знаменатели $q_n, \ldots, q_2$ рациональных приближений к $A_n, \ldots, A_1$, надлежащим образом выбранные, не превосходят P.

Обозначения. θ — число с условием $|\theta| \leqslant 1$, c — положительное постоянное, ε — произвольно малое положительное постоянное, C — целое постоянное.

При $B > 0$ обозначение $A \ll B$ показывает, что $|A| \leqslant cB$.

n — целое постоянное число с условием $n \geqslant 12$; $\nu = \frac{1}{n}$.

$A_n, \ldots, A_1$ — вещественные, $f(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x$.

N и P — числа с условиями $N \geqslant c_0$, $P \geqslant c_1$, где c_0 и c_1 достаточно велики.

p — простое число.

(z) — расстояние вещественного числа z до ближайшего целого числа.

При выводе оценок для сумм вида

$$\sum_{0<x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где x пробегает или a) числа натурального ряда, или же b) простые числа, важную роль играют знаменатели $q_n, \ldots, q_1$ рациональных приближений к коэффициентам $A_n, \ldots, A_1$, надлежащим образом выбранные. В работе (1) даны теоремы, позволяющие при условии a) оценивать такие суммы в зависимости от одного из чисел $q_n, \ldots, q_2$ или же в случае, когда все эти числа меньше P, — от их общего наименьшего кратного. В работе (2) дана теорема, позволяющая при условии b) оценивать такие суммы в зависимости от одного из чисел $q_n, \ldots, q_2$.

В этой статье даны новые теоремы, позволяющие получать лучшие оценки таких сумм в случае, когда все $q_n, \ldots, q_2$ не превосходят P или же некоторой степени P с показателем, меньшим единицы. Следует отметить, что теорема 1 сформулирована в общем виде, пригодном и для других случаев, для которых, однако, она дает значительно более грубые оценки (грубые значения коэффициентов в выражении для ρ); равным образом оценки, указанные в теоремах 2 и 3, в некоторых случаях

могут быть значительно улучшены. Но дальнейшее уточнение оценок привело бы к разбиению доказательств на большое число отдельных случаев.

ЛЕММА 1. *Положим*

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

1) *Пусть из чисел* $A_n, \ldots, A_2$ *выбраны некоторые, каждое из которых представлено в форме*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s P}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant P,$$

причем Q *обозначает общее наименьшее кратное всех* q_s, *отвечающих выбранным* A_s. *Тогда, определяя число* $\varkappa$ *равенствами*

$$\varkappa = 1, \quad \text{если} \quad Q \geqslant P,$$
$$Q = P^{\varkappa}, \quad \text{если} \quad Q < P,$$

при целом m *с условием* $0 < m \leqslant P^{0{,}05\varkappa}$ *и* $Q > 1$, *будем иметь:*

$$S \ll P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\varkappa}{3n^2 l}, \quad l = \ln \frac{12n^2}{\varkappa},$$

или, при $Q \leqslant P$, *также*

$$S \ll P^{1-\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{\varkappa}{6{,}6n^2 \ln 12n^2}.$$

2) *Пусть какое-либо из чисел* $A_n, \ldots, A_2$ *представляется в форме*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s^2}, \quad (a_s, q_s) = 1.$$

Тогда, определяя число $\varkappa$ *равенствами*

$$\varkappa = 1, \quad \text{если} \quad P \leqslant q_s \leqslant P^{s-1},$$
$$q_s = P^{s-\varkappa}, \text{ если } P^{s-1} \leqslant q_s < P^s,$$

при целом m *с условием* $0 < m \leqslant P^{0{,}05\varkappa}$, *для указанных случаев будем иметь:*

$$S \ll P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\varkappa}{3n^2 l}, \quad l = \ln \frac{12n^2}{\varkappa},$$

или, при $P^{s-1} \leqslant q_s < P^s$, *также*

$$S \ll P^{1-\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{\varkappa}{6{,}6n^2 \ln 12n^2}.$$

Доказательство. Утверждение 1) есть следствие теорем 3 и 5 работы [1], а утверждение 2) есть следствие теорем 2 и 4 работы [1] (теоремы 2 и 4 требуют незначительных очевидных изменений формулировок).

Замечание. Очевидно, оценки леммы 1 будут верны и для всякой суммы S_1, получаемой из суммы S заменой верхнего предела суммирования P меньшим пределом.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$I=\int_0^1 e^{2\pi i\varphi(x)}\,dx,\quad \varphi(x)=u_nx^n+\cdots+u_1x,$$

где $u_n, \ldots, u_1$ — *вещественные и* u_0 *обозначает наибольшее из чисел* $|u_n|, \ldots, |u_1|$. *Тогда имеем:*

$$|I|\leqslant \min(1;\ 18^n u_0^{-\nu}).$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 4 работы [1].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\tau_1=P^{\frac{1}{3}}$, $\tau_s=P^{s-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{3}}$ *при* $s>1$,

$$S_m=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Пусть каждое из чисел $A_n, \ldots, A_2, A_1$ *представлено в форме*

$$A_s=\frac{a_s}{q_s}+\frac{\theta_s}{q_s\tau_s},\quad (a_s,\ q_s)=1,\quad 0<q_s\leqslant\tau_s,$$

причем Q *обозначает общее наименьшее кратное чисел* $q_n, \ldots, q_2$, *а* Q_1 — *общее наименьшее кратное чисел* $q_n, \ldots, q_2, q_1$. *Тогда:*

1) *в случае* $Q\geqslant P^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{3}}$ *при любом целом* m *с условием* $0<m\leqslant P^{0{,}05\nu\left(\frac{1}{3}-\frac{\nu}{3}\right)}$ *будем иметь*

$$S_m\ll P^{1-\rho},\qquad \rho=\frac{1}{10n^2\ln 40n^2};$$

2) *в случае* $Q<P^{\frac{1}{3}-\frac{\nu}{3}}$ *при условии* $Q_1>Q$ *будем иметь*

$$S_1\ll P^{\frac{2}{3}-\frac{\nu}{3}},$$

а при условии $Q_1=Q$, *полагая при* $s=n, \ldots, 2,1$

$$A_s=\frac{a_s}{q_s}+z_s,\quad u_s=\max(1,\ |z_s|\ P^s),\quad u_0=\max(u_n, \ldots, u_1),$$

будем иметь

$$S_1\ll PQ^{-\nu+\varepsilon}u_0^{-\nu}.$$

Доказательство. Утверждение 1) есть прямое следствие леммы 1. Докажем утверждение 2). Вводя подстановку $x=Q_1\xi+\eta$, где η пробегает значения $1, \ldots, Q_1$, а ξ, при заданном η, пробегает целые числа интервала

$$-\frac{\eta}{Q_1}<\xi\leqslant\frac{P-\eta}{Q_1}\qquad(1)$$

(сравн. доказательство леммы 5 работы [1]), мы приведем сумму S_1 к

виду

$$S_1 = \sum_{\eta} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}\eta^n + \cdots + \frac{a_1}{q_1}\eta\right)} S_\eta = \sum_{\xi} e^{2\pi i\psi(\xi)},$$

$$\psi(\xi) = z_n(Q_1\xi + \eta)^n + \cdots + z_1(Q_1\xi + \eta).$$

Далее, находим:

$$\psi'(\xi) = (nz_n(Q_1\xi + \eta)^{n-1} + \cdots + 2z_2(Q_1\xi + \eta) + z_1)\,Q_1,$$

что численно $(P > c_1)$

$$\leqslant \left(\frac{nP^{n-1}}{P^{n-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{3}}} + \cdots + \frac{2P}{P^{2-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{3}}} + \frac{1}{q_1 P^{\frac{1}{3}}}\right) Q_1 < \frac{1}{2}.$$

Кроме того, $\psi'(\xi)$ — многочлен степени $n-1$. Следовательно, интервал (1) можно подразделить на $\leqslant 2n-2$ интервала, в каждом из которых $\psi'(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Применяя к каждому из этих интервалов известную лемму Корпута, получим:

$$S_\eta = \int_{-\eta Q_1^{-1}}^{(P-\eta)Q_1^{-1}} e^{2\pi i\psi(\xi)}d\xi + O(1) = \frac{1}{Q_1} I + O(1),$$

$$I = \int_0^P e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}dx,$$

$$S_1 = B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) I + O(Q_1),$$

$$B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right) = \frac{1}{Q_1}\sum_{\eta} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}\eta^n + \cdots + \frac{a_1}{q_1}\eta\right)}.$$

Но $B\left(\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}\right)$ при $Q_1 > Q$ равно нулю, а при $Q_1 = Q$, согласно известной лемме Ло-Кен Хуа, $\ll Q^{-\nu+\varepsilon}$. Кроме того, согласно лемме 2, имеем $I \ll Pu_0^{-\nu}$. Поэтому верно и утверждение 2).

ЛЕММА 3. *При* $n^{0,5} \leqslant a \leqslant N$ *имеем*:

$$\sum_{N-a<u\leqslant N} \tau(u) \ll a \ln N.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 1 работы (2).

ЛЕММА 4. *При* $N^{0,9} \leqslant a \leqslant N$ *имеем*:

$$\sum_{N-a<u\leqslant N} (\tau(u))^2 \ll a(\ln N)^3.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 2 работы (2).

ЛЕММА 5. *Пусть* r — *целое*, $r \geqslant r_0$, $r_0 = [6{,}5n^2 \ln 12n^2]$. *Тогда для интеграла*

$$V_0 = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S|^r d\alpha_n \ldots d\alpha_1, \quad S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)},$$

имеет место оценка:

$$V_0 \ll P^{r-\frac{n(n+1)}{2}}$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 7 работы ([2]) в несколько упрощенной формулировке.

ЛЕММА 6. *Пусть при каждом* s, *взятом из ряда* $n, \ldots, 2, 1$, *имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s\tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем среди чисел $q_n, \ldots, q_2, q_1$ *имеются не превосходящие* $P^{0,25}$. *Пусть из последних выбраны некоторые, и пусть* Q *обозначает общее наименьшее кратное выбранных чисел, причем число* $\varkappa$ *определяется равенствами*

$$Q = P^{\varkappa}, \quad \text{если } Q \leqslant P^{0,25},$$

$$\varkappa = 0{,}25, \quad \text{если } Q > P^{0,25}$$

Пусть

$$\rho_0 = \frac{\varkappa}{6{,}6n^2 \ln 12n^2},$$

l — *целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho_0}$ *и* t — *положительное число, взаимно простое с* Q. *Пусть, наконец,*

$$S = \sum_y \psi(y) \sum_x e^{2\pi i l f(t^2xy)},$$

где x *и* y *независимо друг от друга пробегают некоторые возрастающие последовательности целых положительных чисел, взаимно простых с* Q, *а суммирование распространяется на область*

$$c' P^{0,25-\varepsilon} t^{-1} < y \leqslant c'' P^{0,5} t^{-1}, \quad 0 < t^2yx \leqslant P, \tag{2}$$

причем, независимо от того, как выбран интервал $Y - Y' < y \leqslant Y$ *длиною* $Y' \geqslant Y^{0,9}$, *полностью лежащий в интервале* (2), *имеем*:

$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)| \ll Y' \ln P, \qquad \sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)|^2 \ll Y' (\ln P)^3.$$

Тогда будем иметь:

$$S \ll P^{1-\rho_0} (\ln P)^3 t^{-1,1}.$$

Доказательство. Пусть $\rho_1 = 1{,}2\rho_0$, $\rho_2 = 3{,}5\rho_0$, $r = 2r_1$,

$$r_1 = [3{,}25n^2 \ln 12n^2] + 1.$$

Интервал (2) можно разбить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$cY < y \leqslant Y, \quad 0{,}25 < c \leqslant 0{,}5, \tag{3}$$

причем часть $S(Y)$ суммы S, отвечающая интервалу (3), представится в виде:

$$S(Y) = \sum_{cY<y\leqslant Y} \psi(y) S_y, \qquad S_y = \sum_{0<x\leqslant \frac{P}{t^2y}} e^{2\pi i l f(t^2yx)}.$$

При $t \geqslant P^{\rho_1}$ имеем:

$$S(Y) \ll \sum_{cY < y \leqslant Y} |\psi(y)| \frac{P}{t^2 Y} \ll \frac{P \ln P}{t^2},$$

$$S \ll \frac{P (\ln P)^2}{P^{0,9\rho_1} t^{1,1}} \ll P^{1-\rho_0} (\ln P)^2 t^{-1,1}.$$

Поэтому далее мы рассмотрим лишь случай $t < P^{\rho_1}$. Полагая

$$H = [P^{\rho_2}], \quad Y_0 = (1-c) Y H^{-1},$$

мы разобьем интервал (3) на H интервалов вида

$$Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1. \tag{4}$$

Полагая

$$X = \frac{P}{t^2 Y_1},$$

для всякого y интервала (4) будем иметь:

$$\frac{P}{t^2 y} - \frac{P}{t^2 Y_1} \ll \frac{P Y_0}{t^2 Y_1^2} \ll X H^{-1}.$$

Поэтому часть S_0 суммы $S(Y)$, отвечающую интервалу (4), мы можем представить в виде

$$S_0 = \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} \psi(y) S_y, \quad S_y = S_y' + O(XH^{-1}), \quad S_y' = \sum_{0 < x \leqslant X} e^{2\pi i l f(t^2 y x)}.$$

Полагая $\beta_j = l A_j t^{2j} y^j$, находим:

$$S_y' = \sum_{0 < x \leqslant X} e^{2\pi i l (\beta_n x^n + \cdots + \beta_1 x)}.$$

При вещественных $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ положим

$$S_y'' = \sum_{0 < x \leqslant X} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, ограниченной неравенствами

$$\beta_n - 0{,}5 X^{-n} P^{-\rho_2} \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n + 0{,}5 X^{-n} P^{-\rho_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_1 - 0{,}5 X^{-1} P^{-\rho_2} \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 + 0{,}5 X^{-1} P^{-\rho_2},$$

то будем иметь:

$$S_y' = S_y'' + O(XP^{-\rho_2}), \quad S_y = S_y'' + O(XP^{-\rho_2}), \quad |S_y|^r \ll |S_y''|^r + X^r P^{-r\rho_2}.$$

Умножив последнее неравенство почленно на

$$X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_2} d\alpha_n \ldots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y), получим:

$$S_y^r \ll X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_2} \int\limits_{(\Omega_y)} \ldots \int |S_y''|^r d\alpha_n \ldots d\alpha_1 + X^r P^{-r\rho_2}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным значе-

ниям y, содержащих точки, координаты которых могут отличаться лишь целочисленными слагаемыми от координат некоторой заданной точки. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области. При любом S, участвующем в определении Q, имеем:

$$\beta_s(y) - \beta_s(y_0) = C + O(X^{-s}P^{-\rho_s}),$$

$$\frac{la_s t^{2s}(y^s - y_0^s)}{q_s} + \frac{\theta_s l t^{2s}(y^s - y_0^s)}{q_s P^{0,5s}} = C + O(X^{-s}P^{-\rho_s}),$$

откуда легко находим:

$$\frac{la_s t^{2s}(y^s - y_0^s)}{q_s} = C + O\left(\frac{P^{-0,3\rho_0}}{q_s}\right).$$

Следовательно (можно считать Q достаточно большим, так как в противном случае лемма очевидна), $l(y^s - y_0^s)$ делится на q_s. Отсюда, обозначая буквою s_0 общее наименьшее кратное всех s, участвующих в образовании Q, убеждаемся, что $l(y^{s_0} - y_0^{s_0})$ делится на Q. Число значений y, для которых такая делимость имеет место, будет

$$\ll (Y_0 Q^{-1} + 1) l Q^{\varepsilon_0}.$$

Поэтому

$$G \ll (Y_0 Q^{-1} + 1) l Q^{\varepsilon_0},$$

$$\sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S_y|^r \ll$$

$$\ll (Y_0 Q^{-1} + 1) P^{2\rho_0} Q^{\varepsilon_0} X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_2} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S_y''|^r d\alpha_n \ldots d\alpha_1 + X^r P^{-r\rho_2} Y_0 \ll$$

$$\ll (Y_0 Q^{-1} + 1) Q^{\varepsilon_0} P^{2\rho_0 + n\rho_2} X^r + Y_0 X^r P^{-r\rho_2} \ll$$

$$\ll Y_0 X^r \left(\frac{1}{Q} + \frac{Ht}{P^{0,25-\varepsilon}}\right) Q^{\varepsilon_0} P^{2\rho_0 + n\rho_2} + Y_0 X^r P^{-r\rho_2} \ll Y_0 X^r P^{-r\rho_0}.$$

Далее выводим (лемма 3):

$$|S_0|^2 \ll \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} (\psi(y))^2 \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S_y|^2 \ll Y_0 (\ln P)^3 \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S_y|^2,$$

$$|S_0|^r \ll Y_0^{r_1} (\ln P)^{3r_1} Y_0^{r_1 - 1} \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S_y|^r \ll Y_0^r (\ln P)^{1,5r} X^r P^{-r\rho_0},$$

$$S_0 \ll Y_0 X (\ln P)^2 P^{-\rho_0} \ll P t^{-2} H^{-1} (\ln P)^2 P^{-\rho_0},$$

$$S(Y) \ll P t^{-2} (\ln P)^2 P^{-\rho_0}, \qquad S \ll P t^{-2} (\ln P)^3 P^{-\rho_0}.$$

ЛЕММА 7. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 2$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем среди чисел $q_n, \ldots, q_2$ *имеются не превосходящие* $P^{0,25}$. *Пусть из последних выбраны некоторые и пусть* Q *обозначает общее наименьшее кратное выбранных чисел, причем число* $\varkappa$ *определяется равенствами:*

$$Q = P^{\varkappa}, \quad \text{если} \quad Q \leqslant P^{0,25},$$
$$\varkappa = \frac{1}{4}, \quad \text{если} \quad Q > P^{0,25}.$$

Пусть

$$\rho_0 = \frac{\varkappa}{6{,}7n^2 \ln 12n^2}, \quad \rho_1 = 1{,}1\rho_0,$$
$$b_j = lA_j d^j t^j, \quad F(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z,$$
$$P^{0,75} < M \leqslant P, \quad 2M \leqslant M' < 4M, \quad S = \sum_{\substack{M < lz \leqslant M' \\ 0 < dlz \leqslant P}} e^{2\pi i F(z)},$$

где z *пробегает числа натурального ряда указанной области, причем* d *обозначает положительное число, взаимно простое с* Q *и не превосходящее* $P^{0,25}$, t *— делитель числа* Q, *не превосходящий* P^{ρ_1}, *наконец,* l *— целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho_0}$. *Тогда будем иметь:*

$$S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_1}.$$

Доказательство. Для каждого s, входящего в определение Q, имеем:

$$(s+2)\rho_1 = \frac{1{,}1\nu^2\varkappa}{6{,}7 \ln 12n^2}(s+2) < \frac{\nu^2\varkappa}{45}(s+2) < 0{,}0022\varkappa.$$

Поэтому

$$b_s = \frac{la_s d^s t^s}{q_s} + \frac{\theta_s l d^s t^s}{q_s \tau_s} = \frac{a_0}{q_0} + \frac{\theta}{q_0 P^{0,25-0,0022\varkappa}}.$$

Пусть $Y = [P^{0,25-0,0025\varkappa}]$ и y пробегает целые числа интервала $0 < y \leqslant Y$. Очевидно

$$S = \frac{1}{Y}\sum_{y} S_y + O(Y), \quad S_y = \sum_{Z < z \leqslant Z'} e^{2\pi i F(y+z)},$$
$$Z = Mt^{-1}, \quad Z' = \min(M't^{-1}, \quad Pd^{-1}t^{-1}),$$
$$F(y+z) - F(y) = Y_n z^n + \cdots + Y_1 z, \quad Y_j = Y_j(y) = \frac{F^{(j)}(y)}{j!}.$$

Положим

$$S' = \sum_{Z < z \leqslant Z'} e^{2\pi i(\alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, ограниченной неравенствами

$$Y_n - 0{,}5Z^{-n}P^{-\rho_0} \leqslant \alpha_n \leqslant Y_n + 0{,}5Z^{-n}P^{-\rho_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_1 - 0{,}5Z^{-1}P^{-\rho_0} \leqslant \alpha_1 \leqslant Y_1 + 0{,}5Z^{-1}P^{-\rho_0},$$

то, полагая $r = [6{,}5n^2 \ln 12n^2]$, имеем:

$$|S_y| = |S'| + O(ZP^{\rho_0}), \qquad |S_y|^r \ll |S'|^r + Z^r P^{-r\rho_0}.$$

Умножая последнее равенство на

$$Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0} d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y), получим:

$$|S_y|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0} \int\dots\int_{(\Omega_y)} |S'|^r \, d\alpha_n \dots d\alpha_1 + Z^r P^{-r\rho_0},$$

$$|S|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0} Y^{-1} \sum_y \int\dots\int_{(\Omega_y)} |S'|^r \, d\alpha_n \dots d\alpha_1 + Z^r P^{-r\rho_0}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным значениям y, содержащих точки с координатами, отличающимися лишь целочисленными слагаемыми от координат некоторой заданной точки $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области; имеем:

$$\begin{aligned} Y_{n-1}(y) - Y_{n-1}(y_0) &= C_{n-1} + O(Z^{-n+1}P^{-\rho_0}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{s-1}(y) - Y_{s-1}(y_0) &= C_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}), \end{aligned}$$

что можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C_{n-1} + O(Z^{-n+1}P^{-\rho_0}) &= \binom{n}{n-1} b_n (y - y_0), \\ C_{n-2} + O(Z^{-n+2}P^{-\rho_0}) &= \binom{n}{n-2} b_n (y^2 - y_0^2) + \binom{n-1}{n-2} b_{n-1} (y - y_0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) &= \binom{n}{s-1} b_n (y^{n+1-s} - y_0^{n+1-s}) + \dots + \binom{s}{s-1} b_s (y - y_0). \end{aligned}$$

Умножая эти равенства почленно на

$$D_{n-1} = 1!, \quad D_{n-2} = 1!\ 2!, \quad \dots, \quad D_{s-1} = 1!\ 2! \dots (n-1-s)!,$$

получим новые равенства, из которых, путем последовательного повторения очевидного преобразования, получим одно равенство вида

$$C + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = D_{s-1}\binom{s}{s-1} b_s (y - y_0).$$

Обозначая буквою D общее наименьшее кратное всех чисел $D_{s-1}\binom{s}{s-1}$, отвечающих значениям s, участвующих в определении Q, мы легко приведем последнее равенство к виду

$$C^{(s)} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = D b_s (y - y_0),$$

откуда получим:

$$\frac{Da_0 (y - y_0)}{q_0} + \frac{D\theta_s (y - y_0)}{q_0 P^{0,25-0,0022\varkappa}} = C^{(s)} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0})$$

и, далее,

$$\left(\frac{Da_0 (y - y_0)}{q_0}\right) \ll \frac{P^{-0,0003\varkappa}}{q_0} + \frac{P^{-\rho_0}}{P^{0,75}t^{-1}} \ll \frac{P^{-0,0003\varkappa}}{q_0}.$$

Следовательно (можно считать Q достаточно большим, так как в противном случае лемма очевидна), $D(y-y_0)$ делится на q_0 и $lt^nD(y-y_0)$ делится на q_s. Поэтому $lt^nD(y-y_0)$ делится на Q. Отсюда следует, что

$$G \ll lt^n \frac{Y}{Q} + 1 \ll Y\left(\frac{P^{0,0022\varkappa}}{Q} + \frac{P^{0,0025\varkappa}}{P^{0,25}}\right) \ll YP^{0,0025\varkappa-\varkappa}$$

Последнее равенство для $|S|^r$ теперь может быть переписано в форме

$$|S|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0+0,0025\varkappa-\varkappa} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S'|^r \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1 + Z^rP^{-r\rho_0},$$

откуда следует (лемма 5):

$$|S|^r \ll Z^rP^{0,005\varkappa-\varkappa} + Z^rP^{-r\rho_0} \ll Z^rP^{-r\rho_0}, \quad |S| \ll ZP^{-\rho_0}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть l — целое положительное,*

$$S = \sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i l f(p)}$$

и при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 2$, имеет место свое равенство вида

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s\tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем среди чисел $q_n, \ldots, q_2$ имеются не превосходящие $P^{0,25}$. Пусть из последних выбраны некоторые, и пусть Q обозначает общее наименьшее кратное выбранных чисел, причем число $\varkappa$ определяется равенствами:

$$Q = P^{\varkappa}, \quad \text{если } Q \leqslant P^{0,25},$$

$$\varkappa = \frac{1}{4}, \quad \text{если } Q > P^{0,25}.$$

Пусть, наконец,

$$\rho_0 = \frac{\varkappa}{6,7n^2 \ln 12n^2}.$$

Тогда при $l \leqslant P^{2\rho_0}$ имеем:

$$S \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon'}.$$

Доказательство. Эта теорема доказывается точно так же, как теорема 1 работы (2), но с учетом лемм 6 и 7 настоящей работы; в доказательстве теперь следует буквою F обозначать произведение всех простых, не превосходящих $P^{0,25}$ и не делящих Q, рассматривать FQ вместо Fq и полагать $\Delta_0 = P^{1-\rho_0+\varepsilon'}$.

ЛЕММА 8. *Пусть при каждом* s, *взятом из ряда* $n, \ldots, 2, 1$, *имеет место равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s\tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s}.$$

Пусть общее наименьшее кратное Q *чисел* $q_n, \ldots, q_2$ *не больше, чем* $P^{\frac{1}{9}}$, *причем число* $\varkappa$ *определяется равенством* $Q = P^{\varkappa}$ *и*

$$\rho_0 = \frac{\varkappa}{6{,}7n^2 \ln 12n^2}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{27n^2 \ln 108n^2}.$$

Пусть Q_1 *— общее наименьшее кратное чисел* Q *и* q_1,

$$b_j = lA_j d^j t^j, \quad F(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z,$$

$$P^{0,75} < M \leqslant P, \quad 2M \leqslant M' < 4M, \quad S = \sum_{\substack{M < tz \leqslant M' \\ 0 < dtz \leqslant P}} e^{2\pi i F(z)},$$

где z *пробегает числа натурального ряда указанной области, причем* d *обозначает положительное число, взаимно простое с* Q_1 *и меньшее, чем* $P^{0,25}$, t *— делитель числа* Q_1, *не превосходящий* $P^{l,1\rho_1}$, *наконец,* l *— целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho_1}$. *Тогда будем иметь:*

$$S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_0}, \quad \text{если } ltQ \text{ делится на } Q_1,$$

$$S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_1}, \quad \text{если } ltQ \text{ не делится на } Q_1.$$

Доказательство. Сумму S представим в форме

$$S = \sum_{M'' < z \leqslant M_0} e^{2\pi i F(z)}, \quad M'' = \frac{M}{t}, \quad M_0 = \min\left(\frac{M'}{t}, \frac{P}{dt}\right).$$

При $s > 1$ имеем:

$$b_s = \frac{a_s l t^s d^s}{q_s} + \frac{\theta_s l t^s d^s}{q_s \tau_s} = \frac{a_0}{q_0} + \frac{\theta_s l t^s d^s}{q_s \tau_s},$$

$$(a_0, q_0) = 1, \quad q_0 > \frac{q_s}{lt^s}, \quad lt^s \leqslant P^{0,0005}.$$

Сравнивая это представление числа b_s с таким:

$$b_s = \frac{a'_s}{q'_s} + \frac{\theta'_s}{q'_s M_0^s P^{-\frac{1}{9}}}, \quad (a'_s, q'_s) = 1, \quad 0 < q'_s \leqslant M_0^s P^{-\frac{1}{9}},$$

при $\frac{a'_s}{q'_s} \geqslant \frac{a_0}{q_0}$, мы убедимся, что

$$\frac{1}{q_0 q'_s} \leqslant \frac{lt^s d^s}{q_s \tau_s} + \frac{1}{q'_s M_0^s P^{-\frac{1}{9}}} < \frac{P^{0,0005}}{q_s P^{0,25s}} + \frac{t^{0,75s} P^{\frac{1}{9}}}{q'_s P^{0,75s}},$$

$$1 < \frac{q'_s}{P^{0,4995}} + \frac{1}{P^{1,3}} < \frac{q'_s}{P^{0,499}}, \quad q'_s > P^{0,499}.$$

Итак, имеем:

$$P^{0,499} < q'_s \leqslant M_0^s P^{-\frac{1}{9}},$$

откуда, применяя лемму 1, получим:

$$S \ll M_0 P^{-\rho_1}.$$

Поэтому остается рассмотреть случай, когда при $s = n, \ldots, 2$ имеем $\frac{a_s'}{q_s'} = \frac{a_s}{q_s}$. Здесь, вводя подстановку $Z = Q\xi + \eta$, мы с точностью до слагаемого $\ll Q$ разобьем сумму S на Q сумм вида

$$S_\eta = \sum e^{2\pi i F(Q\xi+\eta)},$$

где суммирование распространяется на целые ξ с условием

$$\frac{M''}{Q} < \xi \leqslant \frac{M_0}{Q}.$$

Обозначая символом B_η некоторое вещественное число, не зависящее от ξ, имеем выражение:

$$F(Q\xi+\eta) = B_\eta + \frac{\theta_n (Q\xi+\eta)^n}{M_0^n P^{-\frac{1}{9}}} + \cdots + \frac{\theta_2' (Q\xi+\eta)^2}{M_0^2 P^{-\frac{1}{9}}} + A_1 ltd Q\xi,$$

которое, отбрасывая B_η и слагаемое

$$\ll \frac{Q}{M_0 P^{-\frac{1}{9}}} \ll P^{-0,5},$$

приведем к виду

$$\psi(\xi) = \frac{\theta_n' Q^n}{M_0^n P^{-\frac{1}{9}}} \xi^n + \cdots + \frac{\theta_2' Q^2}{M_0^2 P^{-\frac{1}{9}}} \xi^2 + A_1 ltd Q\xi.$$

Но при $s \geqslant 2$ коэффициент при ξ^s численно

$$\ll \frac{P^{\frac{s+1}{9}} t^s}{P^{0,75s}} \ll \frac{P^{\frac{1}{3}} t^2}{P^{1,5}} < \frac{1}{P^{1,15}}.$$

Поэтому, представляя этот коэффициент в виде

$$\frac{a_s''}{q_s''} + \frac{\theta_s''}{q_s'' M_1^s P^{-\frac{1}{9}}}, \quad (a_s'', q_s'') = 1, \quad 0 < q_s'' \leqslant M_1^s P^{-\frac{1}{9}}, \quad M_1 = \frac{M_0}{Q},$$

мы или убедимся в том, что $P < q_s'' \leqslant M_1^s P^{-\frac{1}{9}}$, или же в том, что $\frac{a_s''}{q_s''} = 0$. В первом случае окажется

$$S_\eta \ll M_1 P^{-\rho_1}.$$

Поэтому остается рассмотреть лишь случай, когда при $s = n, \ldots, 2$ имеем $a_s'' = 0$, $q_s'' = 1$. В этом случае функция $\psi(\xi)$ приведется к виду

$$\psi(\xi) = \frac{\theta_n''}{M_1^n P^{-\frac{1}{9}}} \xi^n + \cdots + \frac{\theta_2''}{M_1^2 P^{-\frac{1}{9}}} + A_1 ltd Q\xi.$$

Сумму

$$S'_\eta = \sum\nolimits_0 e^{2\pi i\psi(\xi)}$$

разобьем на $\ll \frac{M_1}{q_1}$ сумм вида

$$S_U = \sum_{0<u\leqslant q'_1} e^{2\pi i\psi(U+u)},$$

где $q'_1 \leqslant q_1$, причем знак неравенства может иметь место лишь для одной суммы. С точностью до слагаемого, не зависящего от u, и до слагаемого

$$\ll \frac{q_1}{M_1 P^{-\frac{1}{9}}} + \frac{ltdQ}{\tau_1} \ll l^{-0,025}$$

функция $\psi(U+u)$ может быть представлена в форме

$$\frac{a_1 ltdQ}{q_1} u.$$

Следовательно, в случае, когда ltQ не делится на q_1, имеем:

$$S_U \ll q_1 P^{-0,025}, \quad \text{если } q'_1 = q_1,$$
$$S_U \ll q_1, \quad \text{если } q'_1 < q_1.$$

Поэтому в указанном случае имеем:

$$S'_\eta \ll M_1 P^{-0,025} + q_1, \quad S \ll M_0 P^{-0,025} + q_1 Q \ll M_0 P^{-\rho_1}.$$

В случае, когда ltQ делится на q_1, согласно лемме 6, имеем:

$$S \ll M_0 P^{-\rho_0}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 2, 1$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leqslant \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем общее наименьшее кратное Q чисел $q_n, \ldots, q_2$ не превосходит $P^{\frac{1}{9}}$. Пусть Q_1 — общее наименьшее кратное чисел $q_n, \ldots, q_2, q_1$, и числа $\varkappa_1$ и ρ определены равенствами

$$Q_1 = P^{\varkappa_1}, \quad \rho = \min\left(\frac{\varkappa_1}{6{,}75 n^2 \ln 12n^2}, \quad \frac{1}{27n^2 \ln 108n^2}\right).$$

Тогда при целом l с условием $0 < l \leqslant P^{2\rho}$ имеет место неравенство

$$\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i l f(p)} \ll P^{1-\rho+\varepsilon_0}.$$

Доказательство. Очевидно, лемма 6 верна при замене ρ_0 числом ρ и условия $0 < l \leqslant P^{2\rho_0}$ условием $0 < l \leqslant P^{2\rho}$; это следует из неравенства $\rho < \rho_0$. Далее, при условиях

$$0 < l \leqslant P^{2\rho}, \quad t \leqslant P^{1,1\rho}$$

для суммы S, указанной в формулировке леммы 8, получаем следующие оценки:

Если $Q = Q_1$, то имеем:

$$\varkappa = \varkappa_1, \quad \rho < \rho_0, \quad S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_0} \ll \frac{M}{t} P^{-\rho}.$$

Если $Q < Q_1$, а ltQ делится на Q_1, то имеем:

$$Q_1 < P^{3,1\rho} Q, \quad \varkappa_1 < \frac{3,1\varkappa_1}{6,75n^2 \ln 12n^2} + \varkappa, \quad \varkappa > 0,9995\varkappa_1,$$

$$\rho_0 > \rho, \quad S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_0} \ll \frac{M}{t} P^{-\rho}.$$

Если $Q < Q_1$, а ltQ не делится на Q_1, то имеем:

$$\rho \leqslant \rho_1, \quad S \ll \frac{M}{t} P^{-\rho}.$$

Применяя леммы 6 и 8 с учетом сделанных замечаний, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1 работы [1], обозначая теперь буквою F произведение всех простых, не превосходящих $P^{0,25}$ и не делящих Q_1, рассматривая FQ_1 вместо Fq и полагая $\Delta_0 = P^{1-\rho-\varepsilon}$, мы убедимся в справедливости теоремы 3.

Поступило
20.II.1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Общие теоремы об оценке модуля тригонометрической суммы, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 109—130.

[2] Виноградов И. М., Об оценке тригонометрических сумм с простыми числами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 12 (1948), 225—248.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 303—306

К. А. РОДОСССКИЙ

О СТЕПЕННЫХ НЕВЫЧЕТАХ И НУЛЯХ L-ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Гипотеза И. М. Виноградова о наименьшем положительном невычете (достаточно большой степени) выводится из сравнительно слабых гипотез о нулях L-функций.

В настоящей работе даются некоторые безусловные оценки наименьших невычетов методом L-рядов.

§ 1

Пусть $N_{\min}(D, k)$ есть наименьший положительный невычет степени k по простому модулю D. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть функция $L(s, \chi)$ с неглавным характером степени k по простому модулю $D > D_0$ не имеет нулей в прямоугольнике*

$$1 - \psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant \min\{e^{\psi} \ln^{-1} D, 1\}, \qquad (R_\psi)$$

где $\psi \in \left[e, \frac{1}{2} \ln D\right]$. *Тогда*

$$N_{\min}(D, k) < D^{A\psi^{-1} \ln \psi},$$

где D_0 и A — абсолютные положительные постоянные.

Доказательство дано в § 2—3.

Введем следующие обозначения: $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ — функция Чебышева, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\chi(n)$ — неглавный характер степени k по модулю D, D — достаточно большое простое число, $L(s, \chi)$ — L-функция с характером χ, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\rho = \beta + i\tau$ — критический нуль $L(s, \chi)$ или $\zeta(s)$, $\delta = 1 - \beta$, $\theta_1, \theta_2, \ldots$ — комплексные величины, не превосходящие по модулю единицы, $c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные.

§ 2

ЛЕММА 1. *Пусть* $\ln z \geqslant (3 + 2\varepsilon) N^2$, $N > 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\sum_{n \geqslant z} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\ln^2 z}{4N^2}} < c_1 (1 + \varepsilon^{-1}) e^{\frac{3}{2} \ln z - \frac{\ln^2 z}{4N^2}}$$

Доказательство. Основываясь на формуле частного суммирования и пользуясь известной оценкой функции Чебышева $\psi(x)$, получаем:

$$\sum_{n \geqslant z} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} = -\int_z^{\infty} \sum_{z \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)\, d\left(x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln^2 x}{4N^2}}\right) <$$

$$< c_1 \int\limits_{\ln z}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2N^2} - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{3}{2}\xi - \frac{\xi^2}{4N^2}}\, d\xi < c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int\limits_{\ln z}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2N^2} - \frac{3}{2}\right) e^{\frac{3}{2}\xi - \frac{\xi^2}{4N^2}}\, d\xi =$$

$$= c_1 (1 + \varepsilon^{-1}) \exp\left(\frac{3}{2} \ln z - \frac{\ln^2 z}{4N^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *При* $N > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} = 2\sqrt{\pi}\, e^{\frac{9}{4}N^2} + \theta_1 c_2.$$

Доказательство. Применяя известное интегральное преобразование [см. (1) лемма 1], получаем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} = \frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\zeta'}{\zeta}(w)\, e^{\left(\frac{1}{2}+w\right)^2 N^2}\, dw =$$

$$= 2\sqrt{\pi} N e^{\frac{9}{4}N^2} \left\{1 - \sum_{\rho} \exp -(\delta(3-\delta) + \tau^2 - i\tau(3-2\delta))\, N^2\right\} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(-\frac{1}{2} + \frac{it}{N}\right) e^{-t^2}\, dt.$$

Так как для нулей $\zeta(s)$ в критической полосе $|\tau| > 10$ [см. (2), теорема 30], то сумма по нулям есть $O(\exp -100N^2)$, а последний интеграл при $N > 1$ есть $O(1)$, что требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *При* $N > 1$ *имеет место тождество*:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} = \theta_2 c_3 \ln D - 2\sqrt{\pi} N e^{\frac{9}{4}N^2} \sum_{\rho} e^{-(\delta(3-\delta)+\tau^2 - i\tau(3-2\delta))N^2}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

ЛЕММА 4. *Число нулей L-функций с характерами по модулю D, находящихся в прямоугольнике* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t - t_0| \leqslant 2$ *и подсчитанных с их кратностями, не превосходит* $c_4 \ln D(|t_0| + 3)$.

Доказательство. Это есть хорошо известное свойство нулей L-функций.

ЛЕММА 5. *Каждый круг радиуса* $r \in [\ln^{-1} D, 2]$ *с центром на прямой* $\sigma = 1$ *и отстоящий от действительной оси не более чем на D содержит не более* $c_5 r \ln D$ *нулей* $L(s, \chi)$, *подсчитанных с их кратностями.*

Доказательство см. в работе (3), лемма 4.

§ 3

Положим $N^2 = hx$, $h = \ln D \cdot \ln \psi \cdot \psi^{-1}$, $x \geqslant x_0 \geqslant 1$ и введем обозначение

$$\Phi(N) = \sum_{n=2}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) \sqrt{n} e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}}.$$

Разделив тождество леммы 3 почленно на $2\sqrt{\pi} N e^{\frac{9}{4}N^2}$, проинтегрируем его повторно по x B раз ($B \geqslant 4$) следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_0+1}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+1}\cdots\int_{x_1}^{x_1+1}\Phi(N)\left(2\sqrt{\pi}Ne^{\frac{9}{4}N^2}\right)^{-1}dx\,dx_1\ldots dx_{B-1}\doteq$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+1}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+1}\cdots\int_{x_1}^{x_1+1}\left\{-\sum_{\rho}e^{-(\delta(3-\delta)+\tau^2-i\tau(3-2\delta))hx}+\theta_2c_3\ln D\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(2\sqrt{\pi}Ne^{\frac{9}{4}N^2}\right)^{-1}dx\,dx_1\ldots dx_{B-1}. \tag{1}$$

Обозначим через I общую абсолютную величину левой и правой части тождества (1). Оценивая интеграл справа в (1), получаем

$$I<\left(\frac{2}{h}\right)^B\sum_{\rho}\frac{e^{-(2\delta+\tau^2)hx_0}}{|2\delta+\tau^2+i\tau|^B}+c_3\ln D\cdot\left(2\sqrt{\pi hx_0}e^{\frac{9}{4}hx_0}\right)^{-1} \tag{2}$$

Для оценки суммы по нулям в (2), покроем критическую полосу следующими (быть может пересекающимися) областями:

$$G_1^{(n)}\{0\leqslant\sigma\leqslant1,\ n\leqslant|t|\leqslant n+1\},\quad n=1,2,\ldots,$$

$$G_2^{(m)}\{0\leqslant1-\sigma\leqslant\psi\ln^{-1}D,\ e^{\psi+m}\ln^{-1}D\leqslant|t|\leqslant e^{\psi+m+1}\ln^{-1}D\},$$

$$m=0,1,\ldots m_0,\quad \psi+m_0\leqslant\ln\ln D,$$

$$G_3^{(n,m)}\{n\psi\ln^{-1}D\leqslant1-\sigma\leqslant(n+1)\psi\ln^{-1}D,$$

$$m\psi\ln^{-1}D\leqslant|t|\leqslant(m+1)\psi\ln^{-1}D\},$$

$$m=0,1,\ldots m_1,\quad m_1\psi\leqslant\ln D,\quad n=1,2,\ldots n_1,\qquad n_1\psi\leqslant\ln D.$$

Обозначим количество нулей (подсчитанных с их кратностями), которое может иметь $L(s,\chi)$ в соответствующих областях, через $N_1^{(n)}$, $N_2^{(m)}$, $N_3^{(n,m)}$ Непосредственно из лемм 4 и 5 получаем оценки:

$$N_1^{(n)}<c_6\ln Dn,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$N_2^{(m)}<e^{c_7(\psi+m)},\quad m=0,1,\ldots m_0,$$

$$N_3^{(n,m)}<c_8n\psi,\quad n=1,2,\ldots,n_1,\qquad m=0,1,\ldots,m_1,$$

дающие возможность хорошо оценить сумму по нулям в (2):

$$\left(\frac{2}{h}\right)^B\sum_{\rho}\frac{e^{-(2\delta+\tau^2)hx_0}}{|2\delta+\tau^2+i\tau|^B}<c_6\left(\frac{2}{h}\right)^B\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2hx_0}n^{-2B}\ln Dn+$$

$$+\left(\frac{2\psi}{\ln\psi}\right)^B\sum_{m=0}^{m_1}\frac{e^{c_7(\psi+m)}}{e^{B(\psi+m)}}+c_8\psi\ln^{-B}\psi\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{m=0}^{m_1'}\frac{n\psi^{-2x_0n}}{(2n^2+m^2)^{\frac{B}{2}}}<\frac{1}{8} \tag{3}$$

при достаточно большом D и подходящем выборе x_0, B вне зависимости от D и k. Кроме того,

$$c_3\ln D\cdot\left(2\sqrt{\pi hx_0}\,e^{\frac{9}{4}hx_0}\right)^{-1}<\frac{1}{8} \tag{4}$$

при достаточно большом D.

Соединяя оценки (2), (3), (4), получаем:

$$I<\frac{1}{4}. \tag{5}$$

С другой стороны, предположим, что $\chi(n) = 1$ для всех

$$n \leqslant \exp 4h(x_0 + B) \ln D.$$

Тогда на основании леммы 1, в которой мы полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, и леммы (2) получаем оценку снизу:

$$I > \int_{x_0}^{x_0+1} \int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+1} \dots \int_{x_1}^{x_1+1} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \sqrt{n} e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} - 2 \sum_{n>z} \Lambda(n) \sqrt{n} e^{-\frac{\ln^2 n}{4N^2}} \right\}.$$

$$\left(2\sqrt{\pi} N e^{\frac{9}{4} N^2}\right)^{-1} dx\, dx_1 \dots dx_{B-1} > 1 - c_9 \left(\sqrt{h x_0} e^{\frac{1}{4} h x_0}\right)^{-1} > \frac{3}{4} \qquad (6)$$

при подходящем x_0. Число z, определяющее границу суммирования под знаком интеграла, берется равным e^{4N^2}. Поэтому $z < \exp 4h(x_0 + B)$. Противоречие между оценками (5) и (6) показывает, что предположение о том, что $\chi(n) = 1$ при $n < e^{4h(x_0+B)}$ является ложным. Следовательно,

$$N_{\min}(D, k) < e^{4h(x_0+B)},$$

что требовалось доказать.

§ 4

Из доказанной теоремы вытекает одно следствие.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\psi \in [2, 0, 1 \ln D]$, D *достаточно велико и* $Q(\psi, D)$ *есть число* L*-функций с характерами по модулю* D, *имеющих хоть один нуль в прямоугольнике*

$$1 - \psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant e^{\psi} \ln^{-1} D. \qquad (R_\psi)$$

Тогда

$$Q(\psi, D) < \exp c_{10} \psi.$$

Доказательство см. в работе ([3]), теорема 1.

Пусть $k \geqslant 3$, $k/D - 1$ и D есть простое число. Среди характеров степени k по модулю D имеется не менее $k - 2$ комплексных. Применим лемму 6 с $\psi = \psi_k = c_{10}^{-1} \ln(k - 3)$. На основании этой леммы, в прямоугольнике R_{ψ_k} могут иметь нули не более чем $\exp c_{10} \psi_k = k - 3$ L-функций. Следовательно, по крайней мере одна L-функция с комплексным характером степени k не будет иметь нулей в прямоугольнике R_{ψ_k}. На основании доказанной теоремы получаем:

$$N_{\min}(D, k) < D^{c_{11} \frac{\ln \ln k}{\ln k}}$$

Качественно этот результат близок к известному ранее. Интересно то, что он получен из весьма слабых теорем о нулях L-функций. Очевидно, что всякое улучшение оценки $Q(\psi, D)$ в лемме 6 влечет за собой улучшение оценки $N_{\min}(D, k)$.

Поступило
3. XI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Родосский К. А., О нулях L-функций Дирихле, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 315—328.

[2] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, М., 1953.

[3] Родосский К. А., О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, Матем. сборн., 34 (76) : 2 (1954), 331—356.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 307—324

В. Б. ДЕМЬЯНОВ

ПАРЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ПОЛНЫМ ДИСКРЕТНО-НОРМИРОВАННЫМ ПОЛЕМ С КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе доказывается, что при $m > 8$ для любой пары квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ с коэффициентами из полного дискретно нормированного поля K, имеющего конечное поле классов вычетов, система уравнений $f(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m) = 0$ имеет нетривиальное решение в K.

В работе будут применяться следующие обозначения: K — полное дискретно нормированное поле, I — кольцо целых элементов из K, $\mathfrak{p}$ — его простой идеал, $\overline{K}$ — поле классов вычетов по этому идеалу, π — элемент из $\mathfrak{p}$, не делящийся на $\mathfrak{p}^2$.

Известна гипотеза [см., например, (1)], заключающаяся в том, что если $\overline{K}$ конечно, $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — формы (однородные многочлены) над K, степень f_j равна r_j $(j = 1, \ldots, n)$ и $m > \sum_{j=1}^{n} r_j^2$, то система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

имеет в K нетривиальное решение. Лан (1) доказал это для случая, когда характеристики K и $\overline{K}$ равны, т. е. K есть поле формальных степенных рядов с коэффициентами из $\overline{K}$. Однако для теории чисел этот вопрос интересен как раз тогда, когда характеристики не равны, т. е. K есть «$\mathfrak{p}$-адическое» поле. В этом случае указанная гипотеза была доказана лишь для $n = 1$, $r_1 = 2$, т. е. для одной квадратичной формы [см., например, (2)], и для $n = 1$, $r_1 = 3$, т. е. для одной кубической формы [см. (3), (4)]. В настоящей работе эта гипотеза доказывается для $n = 2$, $r_1 = r_2 = 2$, т. е. для пары квадратичных форм.

Сделаем два замечания, на которые в дальнейшем будем ссылаться.

Замечание 1. Пусть $\overline{K}$ конечно, $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлены с коэффициентами из I и со свободными членами, делящимися

на $\mathfrak{p}$. Если $m > \sum_{j=1}^{n} r_j$, где r_j — степень f_j $(j = 1, \ldots, n)$, то система сравнений

$$f_1 \equiv \ldots \equiv f_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

имеет в I такое решение

$$x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

что не все ξ_j делятся на $\mathfrak{p}$.

Это предложение представляет собой просто перевод на язык сравнений в K известной теоремы Шевалле [5] о системах уравнений над конечным полем.

Замечание 2. Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлены с коэффициентами из I. Если система сравнений

$$f_1 \equiv \ldots \equiv f_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

имеет в I такое решение

$$x_i \equiv \xi_{i,0} \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

что у матрицы

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi_{1,0}, \ldots, \xi_{m,0})\right) \quad (j = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m)$$

хотя бы один минор порядка n не делится на $\mathfrak{p}$, то система уравнений $f_1 = \ldots = f_n = 0$ имеет в I такое решение $x_i = \xi_i$, что

$$\xi_i \equiv \xi_{i,0} \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Частные случаи этого предложения хорошо известны. В общем виде его легко доказать по образцу доказательств этих частных случаев.

В дальнейшем замечания 1 и 2 будут применяться при $n = 1$ и $n = 2$, причем многочлены будут квадратичными формами.

Отметим еще, что под унимодулярным преобразованием мы будем понимать линейное преобразование с коэффициентами из I, определитель которого не делится на $\mathfrak{p}$.

ТЕОРЕМА. *Если K конечно, то при $m > 8$ для любой пары квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ над K система уравнений*

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_m) = 0, \\ g(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

имеет в K нетривиальное решение.

Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i x_j$ и $g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} b_{ij} x_i x_j$ — пара квадратичных форм с коэффициентами из I, причем*

$$a_{11} \equiv \ldots \equiv a_{mm} \equiv b_{11} \equiv \ldots \equiv b_{mm} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Если система уравнений $f = g = 0$ *имеет в* K *только тривиальное решение, то в* I *существуют такие* λ *и* μ, *из которых хотя бы одно* $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, *что все коэффициенты формы* $\lambda f + \mu g$ *делятся на* $\mathfrak{p}$.

Доказательство леммы 1. Если все a_{ij} делятся на $\mathfrak{p}$, то доказывать нечего ($\lambda = 1$, $\mu = 0$). Пусть, для определенности, $a_{12} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим

$$\lambda = -a_{12}^{-1} b_{12}, \quad \mu = 1$$

и докажем, что

$$\lambda a_{ij} + b_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = i+1, \ldots, m$ (то, что $\lambda a_{ii} + b_{ii} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, следует из $a_{ii} \equiv b_{ii} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$).

Предположим противное. Пусть сначала существует такое $s\,(3 \leqslant s \leqslant m)$, что

$$\lambda a_{1s} + b_{1s} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда при значениях $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_m = 0$ мы получим:

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_s} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1s} \\ b_{12} & b_{1s} \end{vmatrix} = a_{12} b_{1s} - a_{1s} b_{12} \equiv a_{12}(b_{1s} + \lambda a_{1s}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

и потому, согласно замечанию 2, система уравнений $f = g = 0$ имеет в K нетривиальное решение, что противоречит условию.

Пусть, далее,

$$\lambda a_{12} + b_{12} \equiv \ldots \equiv \lambda a_{1m} + b_{1m} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

но при некотором $s\,(3 \leqslant s \leqslant m)$

$$\lambda a_{2s} + b_{2s} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Для определенности пусть

$$\lambda a_{23} + b_{23} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда при значениях $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = \ldots = x_m = 0$ мы получим:

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix} = a_{12} b_{23} - a_{23} b_{12} \equiv a_{12}(b_{23} + \lambda a_{23}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

что снова приводит к противоречию. Наконец, пусть

$$\lambda a_{1j} + b_{1j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

для всех $j = 2, \ldots, m$,

$$\lambda a_{2j} + b_{2j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

для всех $j = 3, \ldots, m$, но, например,

$$\lambda a_{34} + b_{34} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда положим $x_3 = 1$, $x_4 = \ldots = x_m = 0$, $x_2 = \xi_2$, где

$$a_{12}\xi_2 + a_{13} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

и

$$x_1 = \xi_1 = -(a_{12}\xi_2 + a_{13})^{-1} a_{23}\xi_2.$$

При этих значениях мы будем иметь:

$$f = \xi_1(a_{12}\xi_2 + a_{13}) + a_{23}\xi_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$g \equiv \xi_1(b_{12}\xi_2 + b_{13}) + b_{23}\xi_2 \equiv -\lambda[\xi_1(a_{12}\xi_2 + a_{13}) + a_{23}\xi_2] = 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_4} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{12}\xi_2 + a_{13} & a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + a_{34} \\ b_{12}\xi_2 + b_{13} & b_{14}\xi_1 + b_{24}\xi_2 + b_{34} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{12}\xi_2 + a_{13} & a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + a_{34} \\ -\lambda(a_{12}\xi_2 + a_{13}) & -\lambda(a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2) + b_{34} \end{vmatrix} = (a_{12}\xi_2 + a_{13})(b_{31} + \lambda a_{34}) \not\equiv$$

$$\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Таким образом, и здесь получается противоречие. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m} a_{ij}x_ix_j$ *и* $g = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m} b_{ij}x_ix_j$ — *пара квадратичных форм с коэффициентами из* I, *причем*

$$a_{11} \equiv \ldots \equiv a_{mm} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad a_{12} \equiv \ldots \equiv a_{1m} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

но не все a_{ij} c $i \not\equiv j$ *делятся на* $\mathfrak{p}$, *и, кроме того,* $b_{11} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, *но не все* b_{1j} $(j = 2, \ldots, m)$ *делятся на* $\mathfrak{p}$. *Тогда система уравнений* $f = g = 0$ *имеет в* K *нетривиальное решение.*

Доказательство леммы 2. Пусть, для определенности, $b_{12} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Рассмотрим отдельно два случая. Сначала предположим, что среди a_{2j} $(j = 3, \ldots, m)$ есть не делящиеся на $\mathfrak{p}$. Пусть, например, $a_{23} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим

$$x_2 = 1, \quad x_3 = \ldots = x_m = 0, \quad x_1 = -b_{12}^{-1}b_{22}.$$

При этих значениях мы будем иметь:

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ b_{12} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix} = -a_{23}b_{12} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

и потому, согласно замечанию 2, система $f = g = 0$ имеет в K нетривиальное решение.

Пусть теперь $a_{23} \equiv \ldots \equiv a_{2m} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, но, например, $a_{34} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим

$$x_3 = 1, \quad x_4 = \ldots = x_m = 0, \quad x_2 = \xi_2,$$

где $b_{12}\xi_2 + b_{13} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ и

$$x_1 = -(b_{12}\xi_2 + b_{13})^{-1}(b_{22}\xi_2^2 + b_{23}\xi_2 + b_{33}).$$

Тогда, как легко проверить,

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_4} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ b_{12}\xi_2 + b_{13} & \frac{\partial g}{\partial x_4} \end{vmatrix} = -a_{34}(b_{12}\xi_2 + b_{13}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

и потому система $f = g = 0$ снова имеет в K нетривиальное решение. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. 1°. Утверждение теоремы равносильно следующему.

Для любой пары квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$ с коэффициентами из I и любого натурального n система сравнений $f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^n}$ имеет такое решение $x_i \equiv \xi_{i,n} \pmod{\mathfrak{p}^n}$ $(\xi_{i,n} \in I;\ i = 1, \ldots, 9)$, что не все $\xi_{i,n}$ делятся на $\mathfrak{p}$.

То, что это утверждение следует из справедливости теоремы, очевидно. В свою очередь, теорема может быть выведена из него. Действительно, пусть для любого натурального n существуют такие целые $\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{9,n}$, не все делящиеся на $\mathfrak{p}$, что

$$f(\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{9,n}) \equiv g(\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{9,n}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^n}.$$

В силу конечности K, поле K компактно в смысле своей метрики. Поэтому из последовательности натуральных чисел можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, что все последовательности $\{\xi_{i,n_j}\}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ будут сходиться в K при $j \to \infty$. Пусть

$$\lim_{j \to \infty} \{\xi_{i,n_j}\} = \eta_i.$$

Тогда

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_9) = g(\eta_1, \ldots, \eta_9) = 0.$$

При этом все η_i — целые и хотя бы одно из них $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, так как хотя бы одна из последовательностей $\{\xi_{i,n_j}\}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ содержит бесконечно много элементов, не делящихся на $\mathfrak{p}$. Таким образом, теорема оказывается верной для форм от 9 переменных с коэффициентами из I. Но тогда она, очевидно, справедлива и для любых форм над K от m переменных, где $m > 8$.

2°. Предположим теперь, что теорема не верна. Тогда, в силу только что сказанного, существует такое натуральное N, что

а) для любой пары квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$ с коэффициентами из I система сравнений

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N}$$

имеет такое решение

$$x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{p}^N} \quad (\xi_i \in I; \quad i = 1, \ldots, 9),$$

что не все ξ_i делятся на $\mathfrak{p}$;

б) среди всевозможных пар квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$ с коэффициентами из I имеются такие (в дальнейшем будем для краткости называть их парами порядка N), что из

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$$

следует

$$x_1 \equiv \ldots \equiv x_9 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Пусть дана некоторая пара квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$ с коэффициентами из I. Обозначим через $d_{f,g}(i)$ $(i = 1, \ldots, 9)$ такое целое неотрицательное число, если оно существует, что коэффициенты при x_i^2 у обеих форм f, g делятся на $\mathfrak{p}^{d_{f,g}(i)}$, но хотя бы один из них не делится на $\mathfrak{p}^{d_{f,g}(i)+1}$. Очевидно, что $d_{f,g}(i)$ не существует тогда и только тогда, когда и у f, и у g коэффициент при x_i^2 равен 0.

Определим, далее, для любой пары форм f, g и любого целого неотрицательного n число $\varphi_{f,g}(n)$ следующим образом: $\varphi_{f,g}(n)$ равно числу таких значений i среди $1, \ldots, 9$, что $d_{f,g}(i) = n$. Если пара f, g порядка N, то при $n > N$

$$\varphi_{f,g}(n) = 0$$

и

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi_{f,g}(n) = 9\,.$$

Действительно, если бы для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ $d_{f,g}(i)$ было больше N или не существовало, то при

$$x_i = 1, \quad x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_9 = 0$$

мы имели бы:

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Выберем среди всех пар форм порядка N такую пару $F(x_1, \ldots, x_9)$, $G(x_1, \ldots, x_9)$, что для любой другой пары $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$ порядка N имеют место следующие условия:

1) $\varphi_{f,g}(N) \leqslant \varphi_{F,G}(N)$;

2) если

$$\varphi_{f,g}(N) = \varphi_{F,G}(N), \ldots, \varphi_{f,g}(N-n) = \varphi_{F,G}(N-n) \quad (0 \leqslant n \leqslant N-1),$$

то

$$\varphi_{f,g}(N-n-1) \leqslant \varphi_{F,G}(N-n-1).$$

3°. Докажем, что из

$$F \equiv G \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{d_{F,G}(i)+1}} \quad (1 \leqslant i \leqslant 9)$$

следует

$$x_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

В самом деле, пусть, например,

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv G(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{d_{F,G}(1)+1}}$$

и $\xi_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Сделаем унимодулярное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 y_1, \\ x_2 &= \xi_2 y_1 + y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_9 &= \xi_9 y_1 + \cdots + y_9. \end{aligned}$$

Пусть при этом F и G перейдут соответственно в $f(y_1, \ldots, y_9)$ и $g(y_1, \ldots, y_9)$. Пара f, g тоже будет порядка N, так как сделанное преобразование унимодулярно. Далее, как легко видеть,

$$d_{f,g}(i) = d_{F,G}(i) \quad \text{при } i = 2, \ldots, 9,$$

а

$$d_{f,g}(1) > d_{F,G}(1),$$

ибо коэффициенты форм f, g при y_1^2 равны соответственно $F(\xi_1, \ldots, \xi_9)$ и $G(\xi_1, \ldots, \xi_9)$, т. е. делятся на $\mathfrak{p}^{d_{F,G}(1)+1}$. Поэтому мы будем иметь:

$$\varphi_{f,g}(d_{f,g}(1)) > \varphi_{F,G}(d_{f,g}(1))$$

и

$$\varphi_{f,g}(n) = \varphi_{F,G}(n)$$

при $n > d_{f,g}(1)$, что противоречит определению F и G.

Перейдем к доказательству того, что предположение о существовании N ведет к противоречию. Рассмотрим отдельно случаи $N = 1$ и $N > 1$.

I. Пусть сначала $N = 1$. Пусть $\varphi_{F,G}(0) = s$ $(0 \leqslant s \leqslant 9)$; тогда $\varphi_{F,G}(1) = 9 - s$. Будем, для определенности, считать, что

$$d_{F,G}(1) = \cdots = d_{F,G}(s) = 0, \quad d_{F,G}(s+1) = \cdots = d_{F,G}(9) = 1.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев.

4°. Пусть $s \geqslant 5$. Положим $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$. Согласно замечанию 1, в I существуют такие $\xi_1, \ldots, \xi_5$, не все делящиеся на $\mathfrak{p}$, что

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_5, 0, 0, 0, 0) \equiv G(\xi_1, \ldots, \xi_5, 0, 0, 0, 0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Так как

$$d_{F,G}(1) = \cdots = d_{F,G}(5) = 0,$$

то это, согласно n° 3, противоречит определению F и G.

5°. Пусть $0 \leqslant s \leqslant 4$. Согласно определению s, F и G можно записать в виде:

$$F = F_0(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{9} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=s+1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} a_{ij} x_i x_j + \pi \sum_{i=s+1}^{9} a_{ii} x_i^2,$$

$$G = G_0(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{9} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=s+1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} b_{ij} x_i x_j + \pi \sum_{i=s+1}^{9} b_{ii} x_i^2,$$

где F_0 и G_0 — квадратичные формы с целыми коэффициентами, и все a_{ij}, b_{ij} $(i = 1, \ldots, 9;\ j = 2, \ldots, 9;\ j > i)$ — целые. Если все a_{ij}, b_{ij} с $s+1 \leqslant i \leqslant 8$, $i+1 \leqslant j \leqslant 9$ делятся на $\mathfrak{p}$, то положим

$$x_1 = \cdots = x_s = 0.$$

Тогда у форм $F(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_9)$ и $G(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_9)$ все коэффициенты будут $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Так как, кроме того, $9 - s \geqslant 5$, то, согласно замечанию 1, можно будет найти такие $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_9$, не все делящиеся на $\mathfrak{p}$, что

$$F(0, \ldots, 0, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_9) \equiv G(0, \ldots, 0, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}.$$

Но это противоречит определению F и G, так как $N = 1$.

Будем теперь, для определенности, считать, что $a_{89} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Если в I не существует λ и μ, из которых хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, таких, что все $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$ при $s+1 \leqslant i \leqslant 8$, $i+1 \leqslant j \leqslant 9$ делятся на $\mathfrak{p}$, то, согласно лемме 1, система уравнений

$$F(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_9) = G(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_9) = 0$$

имеет в K нетривиальное решение, что противоречит определению F и G. Пусть указанные λ и μ существуют. Тогда $\mu \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, так как в противном случае из

$$\lambda a_{89} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

следовало бы

$$\lambda \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Положим

$$H = \lambda F + \mu G.$$

Легко видеть, что из $\mu \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ вытекает, что пара форм F, H тоже удовлетворяет всем условиям, определяющим пару F, G. Поэтому мы могли заранее взять F и H вместо F и G. Будем считать, что так и было сделано, т. е. что все $b_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ при $s+1 \leqslant i \leqslant 8$, $i+1 \leqslant j \leqslant 9$. Тогда G можно записать в виде:

$$G = G_0(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{9} b_{ij} x_i x_j + \pi G_1(x_{s+1}, \ldots, x_9),$$

где G_1 — квадратичная форма с коэффициентами из I.

Пусть теперь не все b_{ij} $(i = 1, \ldots, s;\ j = s+1, \ldots, 9)$ делятся на $\mathfrak{p}$. Для определенности будем считать, что среди b_{sj} хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ Рассмотрим формы

$$f(x_s, \ldots, x_9) = F(0, \ldots, 0, \pi x_s, x_{s+1}, \ldots, x_9)$$

и

$$g(x_s, \ldots, x_9) = \pi^{-1} G(0, \ldots, 0, \pi x_s, x_{s+1}, \ldots, x_9).$$

Как нетрудно проверить, у f делятся на $\mathfrak{p}$ коэффициенты при всех квадратах и всех членах, содержащих x_s, в то время как коэффициент при $x_s x_9$, равный a_{89}, по предположению, $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Далее, у g коэффициент при x_s^2 делится на $\mathfrak{p}$, но хотя бы у одного из членов, содержащих x_s, коэффициент $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Таким образом, согласно лемме 2, система $f = g = 0$, а потому и система $F = G = 0$ имеет в K нетривиальное решение.

Переходим к случаю, когда все $b_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = s+1, \ldots, 9)$, т. е.

$$G \equiv G_0(x_1, \ldots, x_s) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

6°. Пусть сначала $3 \leqslant s \leqslant 4$. Согласно замечанию 1, в I существуют такие $\xi_1, \ldots, \xi_s$, не все делящиеся на $\mathfrak{p}$, что

$$G_0(x_1, \ldots, x_s) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Если среди

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\xi_i \quad (j = s+1, \ldots, 9)$$

хотя бы одно, например

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i,\,s+1}\xi_i,$$

не делится на $\mathfrak{p}$, то положим

$$x_{s+1} = -\left(\sum_{i=1}^{s} a_{i,\,s+1}\xi_i\right)^{-1} F_0(\xi_1, \ldots, \xi_s), \quad x_{s+2} = \cdots = x_9 = 0.$$

Если же

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\xi_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

для всех $j = s+1, \ldots, 9$, то положим

$$x_{s+1} = \ldots = x_7 = 0, \quad x_8 = 1, \quad x_9 = -a_{89}^{-1} \cdot F_0(\xi_1, \ldots, \xi_s).$$

В обоих случаях при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_s = \xi_s$ и указанных значениях остальных переменных и F и G будут делиться на $\mathfrak{p}$, что, согласно n° 3, противоречит определению F и G, так как $d_{F,G}(1) = \ldots = d_{F,G}(s) = 0$, а хотя бы одно из $\xi_1, \ldots, \xi_s$ на $\mathfrak{p}$ не делится.

7°. Пусть, наконец, $0 \leqslant s \leqslant 2$. Положим $x_1 = x_2 = 0$ и докажем, что система сравнений

$$F(0, 0, x_3, \ldots, x_9) \equiv G(0, 0, x_3, \ldots, x_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2},$$

или, полагая

$$F(0, 0, x_3, \ldots, x_9) = f(x_3, \ldots, x_9), \qquad G(0, 0, x_3, \ldots, x_9) = \pi g(x_3, \ldots, x_9),$$

покажем, что система

$$f(x_3, \ldots, x_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}, \quad g(x_3, \ldots, x_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

имеет нетривиальное решение. Это снова будет противоречить определению F и G и завершит доказательство того, что N не может быть равно 1.

Согласно замечанию 1, система сравнений $f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ имеет нетривиальное решение

$$x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 3, \ldots, 9).$$

Пусть, для определенности, $\xi_3 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. После унимодулярного преобразования

$$\begin{aligned} x_3 &= \xi_3 y_3, \\ x_4 &= \xi_4 y_3 + y_4, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_9 &= \xi_9 y_3 + \dots + y_9 \end{aligned}$$

формы f и g переходят соответственно в некоторые формы

$$f' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} a'_{ij} y_i y_j \quad \text{и} \quad g' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} b'_{ij} y_i y_j,$$

причем

$$a'_{ii} = \pi a_{ii} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 4, \dots, 9),$$

$$a'_{33} = f(\xi_3, \dots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

но не все a'_{ij} с $i \neq j$ делятся на $\mathfrak{p}$,

$$b'_{33} = g(\xi_3, \dots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Пусть сначала среди a'_{3j} $(j = 4, \dots, 9)$ хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, например $a'_{34} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим

$$y_5 = \dots = y_9 = 0, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = \eta = -(a'_{34})^{-1} \cdot a_{33} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда

$$f' = a'_{33} - a'_{34}(a'_{34})^{-1} a'_{33} + a'_{44}\eta^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2},$$

$$g' = b'_{33} - b'_{34}\eta + b'_{44}\eta^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Противоречие получено, так как переход к новым переменным осуществлялся унимодулярным преобразованием.

Если же

$$a'_{34} \equiv \dots \equiv a'_{39} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

но среди b'_{3j} $(j = 4, \dots, 9)$ есть не делящиеся на $\mathfrak{p}$, то, по лемме 2, система уравнений $f' = g' = 0$ имеет в K нетривиальное решение.

Остается случай, когда

$$a'_{34} \equiv \dots \equiv a'_{39} \equiv b'_{34} \equiv \dots \equiv b'_{39} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

т. е. коэффициенты при всех членах, содержащих y_3, в обеих формах делятся на $\mathfrak{p}$. Система сравнений

$$\sum_{i=4}^{9}\sum_{j=i}^{9} a'_{ij} y_i y_j \equiv \sum_{i=4}^{9}\sum_{j=i}^{9} b'_{ij} y_i y_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

имеет, согласно замечанию 1, нетривиальное решение

$$y_i \equiv \eta_i \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 4, \dots, 9).$$

Если, для определенности, $\eta_4 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то после унимодулярного преобразования

$$\begin{aligned} y_3 &= z_3, \\ y_4 &= \eta_4 z_4, \\ y_5 &= \eta_5 z_4 + z_5, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_9 &= \eta_9 z_4 + \cdots + z_9 \end{aligned}$$

f' и g' переходят соответственно в некоторые формы

$$f' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} a''_{ij} z_i z_j \quad \text{и} \quad g'' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} b''_{ij} z_i z_j,$$

где коэффициенты при всех членах, содержащих z_3, в обеих формах делятся на $\mathfrak{p}$, не все a''_{ij} с $i \not\equiv j$ делятся на $\mathfrak{p}$,

$$a''_{ii} = \pi a_{ii} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 5, \ldots, 9)$$

и, кроме того,

$$a''_{44} \equiv b''_{44} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Случаи, когда среди a''_{4j} $(j = 5, \ldots, 9)$ есть не делящиеся на $\mathfrak{p}$, или когда

$$a''_{45} \equiv \cdots \equiv a''_{49} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

но не все b''_{4j} $(j = 5, \ldots, 9)$ делятся на $\mathfrak{p}$, разбираются точно так же, как аналогичные случаи для f' и g'. Если же

$$a''_{45} \equiv \cdots \equiv a''_{49} \equiv b''_{45} \equiv \cdots \equiv b''_{49} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

то пусть

$$z_i \equiv \zeta_i \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i = 5, \ldots, 9)$$

— нетривиальное решение (существующее в силу замечания 1) системы сравнений

$$\sum_{i=5}^{9}\sum_{j=i}^{9} a''_{ij} z_i z_j \equiv \sum_{i=5}^{9}\sum_{j=i}^{9} b''_{ij} z_i z_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

где, для определенности, $\zeta_5 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Тогда после унимодулярного преобразования

$$\begin{aligned} z_3 &= t_3, \\ z_4 &= t_4, \\ z_5 &= \zeta_5 t_5, \\ z_6 &= \zeta_6 t_5 + t_6, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z_9 &= \zeta_9 t_5 + \cdots + t_9 \end{aligned}$$

f'' и g'' перейдут в такие формы:

$$f''' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} a'''_{ij} t_i t_j \quad \text{и} \quad g''' = \sum_{i=3}^{9}\sum_{j=i}^{9} b'''_{ij} t_i t_j,$$

что коэффициенты при всех членах, содержащих t_3 или t_4, в обеих формах делятся на $\mathfrak{p}$, и, кроме того,

$$a'''_{55} \equiv b'''_{55} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Положим $t_6 = \cdots = t_9 = 0$. Тогда при любом выборе t_3, t_4, t_5 мы будем иметь:

$$g'''(t_3, t_4, t_5, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Но так как у формы $f'''(t_3, t_4, t_5, 0, \ldots, 0)$ все коэффициенты делятся на $\mathfrak{p}$, то сравнение

$$f'''(t_3, t_4, t_5, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

имеет нетривиальное решение в силу замечания 1.

Таким образом доказано, что N не может быть равно 1.

II. Переходим к рассмотрению случая $N > 1$.

8°. Прежде всего заметим, что хотя бы у одной из форм F, G не все коэффициенты делятся на $\mathfrak{p}$. Действительно, в противном случае для пары форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$, где

$$f = \pi^{-1}F, \quad g = \pi^{-1}G,$$

из

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N}$$

следовало бы:

$$x_1 \equiv \cdots \equiv x_9 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

что противоречит определению N. В дальнейшем мы все время будем для определенности считать, что у F хотя бы один коэффициент $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

9°. Покажем далее, что

$$\varphi_{F,G}(0) = \cdots = \varphi_{F,G}(N-2) = 0.$$

Предположим противное. Тогда для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant 9)$

$$0 \leqslant d_{F,G}(j) \leqslant N-2.$$

Пусть, для определенности, $j = 1$. Рассмотрим пару форм $f(x_1, \ldots, x_9)$, $g(x_1, \ldots, x_9)$, где

$$f = F(\pi x_1, x_2, \ldots, x_9), \quad g = G(\pi x_1, x_2, \ldots, x_9).$$

Так как

$$d_{f,g}(1) = d_{F,G}(1) + 2 > d_{F,G}(1),$$

а при $i = 2, \ldots, 9$

$$d_{f,g}(i) = d_{F,G}(i),$$

то для получения противоречия с определением F и G надо только доказать, что пара f, g будет порядка N. Пусть

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv g(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Так как

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_9) = F(\pi\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_9), \quad g(\xi_1, \ldots, \xi_9) = G(\pi\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_9),$$

то из этого следует:

$$\xi_2 \equiv \cdots \equiv \xi_9 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Пусть $\xi_i = \pi\xi_i'$ при $i = 2, \ldots, 9$, и $\xi_1 = \xi_1'$. Тогда

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_9) = \pi^2 F(\xi_1', \ldots, \xi_9'), \quad g(\xi_1, \ldots, \xi_9) = \pi^2 G(\xi_1', \ldots, \xi_9')$$

и потому

$$F(\xi_1', \ldots, \xi_9') \equiv G(\xi_1', \ldots, \xi_9') \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}.$$

Так как

$$N - 1 > N - 2 \geqslant d_{F,G}(1),$$

то отсюда следует, на основании доказанного в $n^\circ 3$, что $\xi_1' = \xi_1 \equiv \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Таким образом, из

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$$

вытекает:

$$x_1 \equiv \cdots \equiv x_9 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

а это и значит, что пара f, g будет порядка N.

10°. Докажем, что для каждого $n = 0, \ldots, N-1$ в I существуют такие λ_n и μ_n, где $\mu_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, что у формы

$$H_n = \lambda_n F + \mu_n G$$

все коэффициенты делятся на $\mathfrak{p}^n$. Для $n = 0$ доказывать нечего ($\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1$). Докажем это утверждение для любого n ($1 \leqslant n \leqslant N-1$), предполагая, что для $n-1$ оно верно, т. е. что для некоторых λ_{n-1}, μ_{n-1}, где $\mu_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, все коэффициенты формы

$$H_{n-1} = \lambda_{n-1} F + \mu_{n-1} G$$

делятся на $\mathfrak{p}^{n-1}$. Пусть

$$F = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=i}^{9} a_{ij} x_i x_j, \quad G = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=i}^{9} b_{ij} x_i x_j.$$

Тогда

$$H_{n-1} = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=i}^{9} c_{ij} x_i x_j,$$

где

$$c_{ij} = \lambda_{n-1} a_{ij} + \mu_{n-1} b_{ij}.$$

Согласно $n^\circ 9$,

$$a_{11} \equiv \cdots \equiv a_{99} \equiv b_{11} \equiv \cdots \equiv b_{99} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}},$$

а потому и

$$c_{11} \equiv \cdots \equiv c_{99} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}.$$

Положим

$$H_{n-1}' = \pi^{1-n} H_{n-1} = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=i}^{9} c_{ij}' x_i x_j,$$

где $c_{ij}' = \pi^{1-n} c_{ij}$. Из определения H_{n-1} следует, что все c_{ij}' — целые, причем

$$c_{11}' \equiv \cdots \equiv c_{99}' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

так как $n - 1 < N - 1$.

Подберем теперь λ, $\mu \in I$, из которых хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, такие, что все коэффициенты формы $\lambda F + \mu H'_{n-1}$ делятся на $\mathfrak{p}$. Если бы это сделать было невозможно, то, согласно лемме 1, система $F = H'_{n-1} = 0$ имела бы в K нетривиальное решение, которое было бы также и решением системы $F = G = 0$ (ибо $\mu_{n-1} \not\equiv 0$), что противоречит определению F и G.

Заметим, что $\mu \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, так как в противном случае мы имели бы и $\lambda \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, ибо не все коэффициенты формы F делятся на $\mathfrak{p}$ (см. n° 8). Принимая во внимание, что

$$\pi^{n-1} H'_{n-1} = H_{n-1},$$

мы получаем, что все коэффициенты формы

$$H_n = \pi^{n-1}\lambda F + \mu H_{n-1} = (\pi^{n-1}\lambda + \mu\lambda_{n-1}) F + \mu\mu_{n-1} G$$

делятся на $\mathfrak{p}^n$. Так как

$$\mu\mu_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

то это и доказывает наше утверждение.

11°. Легко проверить, что, так как $\mu_{N-1} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, пара форм F, H_{N-1} удовлетворяет всем требованиям, определяющим пару F, G. Поэтому мы могли бы вместо F и G заранее взять F и H_{N-1}. Будем считать, что так и было сделано, т. е. будем в дальнейшем предполагать, что

$$b_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}$$

для всех $i = 1, \ldots, 9$, $j = i, \ldots, 9$.

12°. Покажем, что системе сравнений

$$F \equiv G \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$$

удовлетворяют некоторые значения переменных $x_1, \ldots, x_9$, из которых хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, что противоречит определению F и G. Тем самым будет доказана теорема.

У формы $\pi^{1-N} G$ все коэффициенты целые. По определению N, у системы сравнений

$$F \equiv \pi^{1-N} G \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N}$$

есть такое решение

$$x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{p}^N} \quad (i = 1, \ldots, 9),$$

что не все ξ_i делятся на $\mathfrak{p}$. Так как $N > 1$, то

$$G(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Если и

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}},$$

то мы сразу получаем искомое противоречие. Будем считать поэтому, что

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_9) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Пусть, для определенности,

$$\xi_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Произведем унимодулярное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 y_1, \\ x_2 &= \xi_2 y_1 + y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_9 &= \xi_9 y_1 + \cdots + y_9. \end{aligned}$$

Пусть при этом F и G переходят соответственно в формы

$$F' = \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=i}^{9} a'_{ij} y_i y_j \quad \text{и} \quad G' = \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9} b'_{ij} y_i y_j.$$

Так как сделанное преобразование унимодулярно, то для того, чтобы придти к указанному выше противоречию, нужно доказать существование таких $\eta_1, \ldots, \eta_9$, из которых хотя бы одно $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, что

$$F'(\eta_1, \ldots, \eta_9) \equiv G'(\eta_1, \ldots, \eta_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Заметим, что

$$b'_{11} = G(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}},$$

а

$$a'_{11} = F(\xi_1, \ldots, \xi_9) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N}},$$

но $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$. Далее, все

$$b'_{ij} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}.$$

Наконец, для всех $i = 2, \ldots, 9$, очевидно, $a'_{ii} = a_{ii}$, т. е. все

$$a'_{ii} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}.$$

В то же время, в силу унимодулярности сделанного преобразования, не все a'_{ij} делятся на $\mathfrak{p}$.

Предположим сначала, что не все a'_{1j} $(j = 2, \ldots, 9)$ делятся на $\mathfrak{p}$. Пусть, например, $a'_{12} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим

$$y_3 = \cdots = y_9 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \eta = -(a'_{12})^{-1} a'_{11} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}.$$

Тогда

$$F' = a'_{11} - a'_{12}(a'_{12})^{-1} a'_{11} + a'_2 \eta^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+3}},$$

т. е. и подавно $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$ и

$$G' = b'_{11} + b'_{12}\eta + b'_{22}\eta^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}},$$

ибо все три слагаемых делятся на $\mathfrak{p}^{N+1}$. Противоречие, таким образом получено.

Пусть теперь $a'_{12} \equiv \cdots \equiv a'_{19} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, но среди b'_{1j} $(j = 2, \ldots, 9)$ хотя бы одно, например b'_{12}, не делится на $\mathfrak{p}^N$. Тогда система уравнений

$$F' = \pi^{1-N} G' = 0$$

имеет в K нетривиальное решение в силу леммы 2.

Наконец, пусть

$$a'_{12} \equiv \cdots \equiv a'_{19} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad b'_{12} \equiv \cdots \equiv b'_{19} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N}.$$

Тогда, как легко видеть, из

$$y_2 \equiv \cdots \equiv y_9 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

следует:

$$G' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Если среди a'_{1j} $(j = 2, \ldots, 9)$ хотя бы одно не делится на $\mathfrak{p}^N$, например $a'_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^n}$, но $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_{n+1}}$, где $1 \leqslant n \leqslant N-1$, то положим

$$y_3 = \cdots = y_9 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \gamma_1 = -(a'_{12})^{-1} a'_{11} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда

$$F' = a'_{11} - a'_{12}(a'_{12})^{-1} a'_{11} + a'_{22}\gamma_1^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}},$$

так как $a'_{22} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}$ и $G' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}$, ибо $\gamma_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Если же

$$a'_{12} \equiv \cdots \equiv a'_{19} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N},$$

то пусть, для определенности, $a'_{23} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Положим в этом случае

$$y_4 = \cdots = y_9 = 0, \quad y_1 = 1,$$

$$y_2 = \pi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad y_3 = \gamma_1 = -(a'_{23}\pi)^{-1} a'_{11} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Тогда

$$F' = a'_{11} + a'_{12}\pi + a'_{22}\pi^2 + a'_{13}\gamma_1 - a'_{23}\pi(a'_{23}\pi)^{-1} a'_{11} + a'_{33}\gamma_1^2.$$

Так как

$$a'_{12} \equiv a'_{13} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^N}, \quad a'_{22} \equiv a'_{33} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N-1}}, \quad \gamma_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

то все четыре остающихся слагаемых в последней сумме делятся на $\mathfrak{p}^{N+1}$, т. е.

$$F' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}}.$$

Точно так же при этих значениях переменных и

$$G' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{N+1}},$$

ибо $\pi \equiv \gamma_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях мы пришли к противоречию с определением F и G, и потому теорема доказана.

Заметим, что над K существуют пары квадратичных форм от 8 переменных, которые одновременно обращаются в 0 лишь тогда, когда все переменные равны 0. Действительно, пусть $F(x_1, \ldots, x_4)$ — квадратичная форма над K, не представляющая 0 в K (такие, как известно, существуют). Положим

$$f(x_1, \ldots, x_8) = F(x_1, \ldots, x_4), \quad g(x_1, \ldots, x_8) = F(x_5, \ldots, x_8).$$

Тогда из $f = g = 0$ следует $x_1 = \cdots = x_8 = 0$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{K}$ — поле алгебраических чисел, $\mathfrak{a}$ — его целый идеал, $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ — пара квадратичных форм с целыми коэффициентами из $\mathfrak{K}$. Если $m > 8$, то система сравнений $f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ имеет в $\mathfrak{K}$ решение $x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{a}}$ $(i = 1, \ldots, m)$ такое, что* $(\xi_1, \ldots, \xi_m, \mathfrak{a}) = 1$.

Доказательство. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^n$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал, то это утверждение непосредственно следует из того, что, согласно доказанной теореме, в $\mathfrak{p}$-адическом замыкании поля $\mathfrak{K}$ система уравнений $f = g = 0$ имеет нетривиальное решение. Если же

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{n_s}$$

и

$$x_i \equiv \xi_{ij} \pmod{\mathfrak{p}_j^{n_j}} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, s)$$

— решение системы $f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_j^{n_j}}$, то, как известно, система $f \equiv g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ имеет такое решение $x_i \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{a}}$, что

$$\xi_i \equiv \xi_{ij} \pmod{\mathfrak{p}_j^{n_j}} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, s).$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\overline{K}$ конечно и характеристика его не равна 2. Обозначим через $K^\times$ мультипликативную группу отличных от 0 элементов из K, а через H — подгруппу $K^\times$, состоящую из квадратов. Как известно, индекс H в $K^\times$ равен 4. Известно также, что при $1 \leqslant n \leqslant 4$ всякая квадратичная форма над K от n переменных, не представляющая 0 в K, представляет в K элементы по меньшей мере из n классов смежности $K^\times$ по H (если форма представляет 0, а ее ранг меньше n, это, вообще говоря, неверно). Аналогом этого факта в случае пары форм является

Следствие 2. *Пусть $\overline{K}$ конечно и характеристика $\overline{K}$ не равна 2. Если $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, где $5 \leqslant m \leqslant 8$, — такая пара квадратичных форм над K, что система уравнений $f = g = 0$ имеет в K только тривиальное решение, то среди четырех классов смежности $K^\times$ по H найдется по меньшей мере $m - 4$ таких, что система уравнений $f = 0$, $g = c$ имеет решение в K при любом c, принадлежащем одному из этих $m - 4$ классов.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть система $f = 0$, $g = c$ имеет решение только для c, принадлежащих к некоторым s классам, где $s \leqslant m - 5$. Возьмем такую квадратичную форму $h(y_1, \ldots, y_{4-s})$ над K, которая не представляет 0 в K и представляет только элементы из остальных $4 - s$ классов. (Существование такой формы доказывается тривиально.) Тогда, как легко видеть, из

$$f(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m) - h(y_1, \ldots, y_{4-s}) = 0$$

следует:

$$x_1 = \ldots = x_m = y_1 = \ldots = y_{4-s} = 0.$$

Но общее число переменных в этой системе уравнения равно

$$m + 4 - s \geqslant m + 4 - (m - 5) = 9 > 8.$$

Мы получаем противоречие с доказанной теоремой.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, которому я обязан многими ценными советами и замечаниями.

Поступило
4. III. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lang S., On quasi algebraic closure, Ann. Math., 55, № 2 (1952), 373—380.
[2] Hasse H., Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J. f. reine u. angew. Math., 153 (1924), 113—130.
[3] Демьянов В. Б., О кубических формах в дискретно нормированных полях, Доклады Ак. наук СССР, 74, № 5 (1950), 889—891.
[4] Lewis D., Cubic homogeneous polynomials over p-adic number fields, Ann. Math., 56, No 2(1952), 473—478.
[5] Chevalley C., Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ., II (1935), 73—75.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 325—336

А. И. ЛАПИН

О МОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЯХ СТЕПЕНИ ДВА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается, что поле модулярных функций степени 2 изоморфно полю рациональных функций от трех независимых переменных.

Следуя Зигелю (1), будем называть обобщенной верхней полуплоскостью множество H всех комплексных симметрических квадратных матриц $T = (\tau_{jk})$ порядка p с положительно определенной мнимой частью.

Пусть $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — целочисленная симплектическая квадратная матрица порядка $2p$. Преобразование обобщенной верхней полуплоскости

$$T \to T_1 = (AT + B)^{-1}(CT + D)$$

называют модулярной подстановкой. Множество G всех модулярных подстановок образует группу — модулярную группу.

Модулярной формой степени p называется функция $f(T) = f(\tau_{11}, \ldots, \tau_{pp})$, которая регулярна в H, ограничена в фундаментальной области F группы G и удовлетворяет для каждой модулярной подстановки из G функциональному уравнению

$$f(T_1) = |CT + D|^g \cdot f(T),$$

где g — фиксированное четное число, называемое весом модулярной формы.

Отношение двух модулярных форм одинакового веса называется модулярной функцией. Множество всех модулярных функций, очевидно, образует поле.

Если фигурирующие в определении модулярной функции симплектические матрицы U удовлетворяют дополнительному условию

$$U \equiv E \pmod 2,$$

где E — единичная матрица порядка $2p$, то соответствующая модулярная функция называется модулярной функцией 2-й ступени.

При $p = 1$ эти определения эквивалентны обычным определениям эллиптических модулярных функций 1-й и 2-й ступени. Структура поля таких функций хорошо изучена. Именно, все эллиптические модулярные функции выражаются рационально через одну — абсолютный инвариант $I(\tau)$.

Аналогичный факт справедлив и относительно эллиптических модулярных функций 2-й ступени: все они рационально выражаются через одну — модуль $\varkappa$ эллиптической кривой.

Для случая $p > 1$ единственным известным [см. (1)] фактом о структуре поля модулярных функций была доказанная Зигелем теорема: поле модулярных функций степени p изоморфно полю алгебраических функций от $\frac{p(p+1)}{2}$ независимых переменных.

В настоящей работе мы исследуем поле модулярных функций степени $p = 2$ 1-й и 2-й ступеней. Оказывается, что здесь имеют место теоремы, совершенно аналогичные тем, которые были установлены для эллиптических модулярных функций, а именно: поле модулярных функций степени $p = 2$ 1-й и 2-й ступеней изоморфно полю рациональных функций от трех независимых переменных. При этом за три базисные модулярные функции, через которые остальные выражаются рационально, можно принять, в случае модулярных функций 2-й ступени, модули той гиперэллиптической кривой, нормальная матрица периодов которой совпадает с матрицей T. В случае же модулярных функций 1-й ступени можно принять проективные инварианты этой кривой.

§ 1

Между модулярными функциями p-й степени и абелевыми функциями от p переменных существует такая же связь, какая существует между обычными модулярными функциями и эллиптическими. Эта связь и лежит в основе доказательства сформулированной выше теоремы.

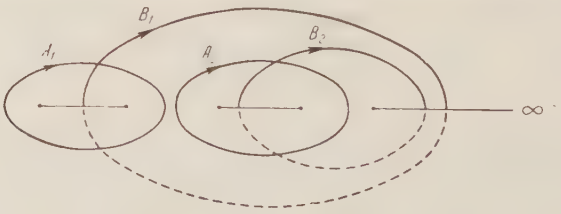
Существенным моментом доказательства является то обстоятельство, что для $p = 2$ общие абелевы функции совпадают с теми абелевыми функциями, которые возникают в классической проблеме обращения абелевых интегралов.

Так как доказательство теоремы основано на вейерштрассовой теории обращения гиперэллиптических интегралов, то доказательству теоремы мы предпошлем изложение главных фактов этой теории [подробно изложение этих фактов см. в работе (2)].

Пусть уравнение гиперэллиптической кривой имеет вид

$$y^2 = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — многочлен пятой степени, не имеющий кратных корней.



Пусть на соответствующей римановой поверхности проведены канонические разрезы, как это указано на рисунке. Тогда, обозначая периоды интегралов первого рода

$$du_1 = \frac{dx}{y} \quad \text{и} \quad du_2 = \frac{x\,dx}{y}$$

через ω_{ir} и ω'_{ir}, где $i, r = 1, 2$, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\omega_{1r} = \frac{1}{2}\int_{B_1} du_r = \int_{b_1}^{b_2} du_r, \qquad \frac{1}{2}\omega_{2r} = \frac{1}{2}\int_{B_2} du_r = \int_{b_3}^{b_4} du_r,$$

$$\frac{1}{2}\omega'_{1r} = -\frac{1}{2}\int_{A_1} du_r = \int_{b_2}^{b_3} du_r, \qquad \frac{1}{2}\omega'_{2r} = -\frac{1}{2}\int_{A_2} du_r = \int_{b}^{b_4} du_r + \int_{b_2}^{b_3} du_r,$$

где $r = 1, 2$, а

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix} = (\omega\,\omega')$$

— соответствующая им матрица периодов.

Пусть, наконец

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \omega^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

— нормальные интегралы первого рода. Известно, что их матрица периодов имеет вид:

$$(E,\ T) = \begin{pmatrix} 10 & \tau_1 & \tau_2 \\ 01 & \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix},$$

где матрица $T = \omega^{-1}\omega'$ — симметрическая и имеет положительно определенную мнимую часть.

При этих условиях ϑ-ряд

$$\sum_m e^{-\pi i\,(m+g)'\,T\,(m+g)+2\pi i\,(v+h)\cdot(m+g)}, \tag{2}$$

где суммирование распространено на все целочисленные векторы $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, сходится при любых

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

и определяет ϑ-функцию с характеристиками g, h, которую мы будем обозначать через

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1\, g_2 \\ h_1\, h_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2).$$

Заметим, что $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)$ лишь несущественным экспоненциальным множителем отличается от

$$\vartheta\left(v + \Omega\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}\right) = \vartheta\,(v + h + Tg).$$

Для дальнейшего особо важную роль будут играть ϑ-функции с полуцелыми характеристиками:

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad h = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i,\ \varepsilon'_i = 0, 1$.

Вейерштрассу принадлежит чрезвычайно удобный способ записи всех $2^4 = 16$ таким образом получающихся ϑ-функций. Этот способ состоит в следующем: так как

$$\int_{\infty}^{b_\alpha} du_r, \quad r = 1, 2,$$

является полупериодом, то, полагая

$$\begin{pmatrix} \int_{\infty}^{b_\alpha} du_1 \\ \int_{\infty}^{b_\alpha} du_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Omega \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \varepsilon_2' \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 4, \quad \varepsilon_i', \varepsilon_i = 0, 1,$$

обозначим $\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right]}(u)$ через $\vartheta_\alpha(u)$, причем $\vartheta_\alpha(u)$ будет четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности α. Аналогично полагая

$$\begin{pmatrix} \int_{\infty}^{b_\lambda} du_1 + \int_{\infty}^{b_\mu} du_1 \\ \int_{\infty}^{b_\lambda} du_2 + \int_{\infty}^{b_\mu} du_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Omega \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

обозначим $\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]}$ через $\vartheta_{\lambda\mu}^{i}(u)$.

Таким образом, мы получим $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$ ϑ-функций с полуцелыми характеристиками. Вместе с

$$\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix}0 \\ 0\end{smallmatrix}\right]}(u) = \vartheta(u) = \vartheta_5(u)$$

это дает ровно $2^4 = 16$ ϑ-функций.

Проблема обращения. Пусть

$$\int_{b_1}^{x_1} dv_r + \int_{b_2}^{x_2} dv_r = w_r, \quad r = 1, 2,$$

где v_2 — нормальные интегралы 1-го рода. Тогда любая симметрическая функция от x_1, x_2, рассматриваемая как функция аргументов w_1, w_2, будет абелевой с матрицей периодов $\Omega = (E, T)$.

Положим

$$(x - x_1)(x - x_2) = \varphi(x).$$

Тогда имеют место следующие формулы Вейерштрасса:

$$\frac{\sqrt{(-1)^\alpha \varphi(b_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{f'(b_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta_{2\alpha}(w)}{\vartheta(w)}, \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{(-1)^{\alpha-1} \varphi(b_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{-f'(b_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta_{2\alpha-1}(w)}{\vartheta(w)}, \tag{4}$$

$$\sqrt{|b_\alpha - b_\beta|} \sum_{i=1}^{2} \frac{\sqrt{f(x_i)}}{(x_i - b_\alpha)(x_i - b_\beta)\varphi'(x_i)} = \frac{\vartheta(v)\vartheta_{\alpha\beta}(w)}{\vartheta_\alpha(v)\vartheta_\beta(w)}, \tag{5}$$

где $f(x)$ определено уравнением (1).

Положим в равенствах (4) и (5) $\alpha = 2, \beta = 3$. Перемножив их и найдя предел полученного выражения при $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, т. е. при $x_1 = b_1$, $x_2 = b_3$, мы получим выражение для $\frac{\vartheta_{23}(0)}{\vartheta_2(0)}$ через корни многочлена $f(x)$.

Аналогично найдем

$$\frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_0(0)}.$$

В дальнейшем вместо $\vartheta_{ij}(0)$ и $\vartheta_i(0)$ будем писать ϑ_{ij} и ϑ_i.

С другой стороны, подставляя в левую часть равенства (3) $x_1 = b_1$, $x_2 = b_3$, а в правую — $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, мы найдем значения $\frac{\vartheta_2}{\vartheta}$ и $\frac{\vartheta_1}{\vartheta}$. Из этих выражений окончательно находим:

$$\frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta^2} = \frac{b_4 - b_3}{b_4 - b_2}$$

и точно так же

$$\frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2} = \frac{b_4 - b_3}{b_4 - b_1},$$

$$\frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta^2} = \frac{b_4 - b_3}{b_4 - b_0}.$$

Если, в частности, многочлен $f(x)$ взят в вейерштрассовой нормальной форме:

$$f(x) = x(1-x)(1-\varkappa x)(1-\lambda x)(1-\mu x), \tag{6}$$

можно добиться подходящим дробно-линейным преобразованием, то, полагая в предыдущих формулах

$$b_0 = \frac{1}{\mu}, \quad b_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad b_2 = \frac{1}{\varkappa}, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0,$$

мы получим:

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta^2}, \quad \lambda = \frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2}, \quad \mu = \frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta^2}. \tag{7}$$

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Функции*

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta^2}, \quad \lambda = \frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2}, \quad \mu = \frac{\vartheta_{03}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta^2},$$

рассматриваемые как функции от матрицы T, являются модулярными функциями 2-й ступени.

Доказательство. Так как модулярная функция определяется как отношение двух модулярных форм одного и того же веса, то для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что числители и знаменатели $\varkappa$, λ, μ являются модулярными формами 2-й ступени веса $g = -2$, т. е. они регулярны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} T > 0$, ограничены в фундаментальной области* и для любой модулярной матрицы

* Ограниченности функций $\varkappa$, λ, μ в фундаментальной области, как показал Кехер (6), можно не требовать.

2-й ступени

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv E \pmod 2$$

удовлетворяют уравнению

$$f(T_1) = (A + TC)^{-2} f(T), \tag{8}$$

где

$$T_1 = (A + TC)^{-1}(B + TD). \tag{9}$$

Докажем равенство (8). Заметим сначала, что функции $\varkappa$, λ, μ инвариантны относительно модулярных подстановок (9). Действительно, это утверждение непосредственно следует из теоремы Эрмита о монодромии точек ветвления [см. (2)], согласно которой всякую трансформацию периодов, осуществляемую модулярной матрицей

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv E \pmod 2,$$

можно получить такой деформацией римановой поверхности в себя, при которой точки ветвления функции $y(x)$ остаются на месте. При этом, разумеется, в процессе деформации никакие две точки ветвления не совпадают друг с другом. Поэтому соотношения (8) достаточно проверить только для знаменателей функций $\varkappa$, λ, μ, т. е. для функций

$$\varphi_1 = \vartheta_{01}^2 \vartheta^2, \quad \varphi_2 = \vartheta_{01}^2 \vartheta_{12}^2, \quad \varphi_3 = \vartheta_{12}^2 \vartheta^2. \tag{10}$$

С этой целью воспользуемся формулой для трансформации ϑ-функций. Согласно (4), стр. 540,

$$\vartheta_{\left[\frac{g}{h}\right]}(T_1) = M(U)\,\vartheta_{\left[\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right]}(T), \tag{11}$$

где $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — модулярная матрица,

$$\begin{aligned} T_1 &= (A + TC)^{-1}(B + TD), \\ \bar{g} &= -C'h + D'g - \frac{1}{2} d(A'C), \\ \bar{h} &= -B'g + D'h + \frac{1}{2} d(B'D) \end{aligned} \tag{12}$$

и $d(R)$ — вектор, составленный из диагональных элементов матрицы R. Множитель $M(U)$ определяется следующим образом.

В группе G всех модулярных матриц можно в качестве образующих выбрать следующие четыре матрицы [см. (4), стр. 553]:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0\,0\,-1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1\,0\,-1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}, \qquad U_4 = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,-1 \\ 0\,1\,-1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix};$$

тогда [см. (4)]

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(TU_1) = \vartheta\begin{bmatrix} g_2 & g_1 \\ h_2 & h_1 \end{bmatrix}(T),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(TU_2) = \sqrt{-i\tau_1}\, e^{-2\pi i g_1 h_1}\vartheta\begin{bmatrix} h_1 & g_2 \\ -g_1 & h_2 \end{bmatrix}(T),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(TU_3) = e^{\pi i (g_1^2 - g_1)}\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 - g_1 + \frac{1}{2} & h_2 \end{bmatrix}(T), \tag{13}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(TU_4) = e^{2\pi i g_1 g_2}\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 - g_2 & h_2 - g_1 \end{bmatrix}(T).$$

Отсюда следует, что в случае полуцелых характеристик $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ для любой матрицы

$$U = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

имеем

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(T_1) = \zeta\,|A_i + TC_i|^{\frac{1}{2}}\vartheta\begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(T),$$

где $\bar{g}$, $\bar{h}$ определяются из (13), а ζ — корень восьмой степени из единицы.

Так как $M(U) = M(U, T)$ удовлетворяет очевидному соотношению

$$M(UV, T) = M(V, TU)\,M(U, T), \tag{14}$$

то и для любой модулярной матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ справедливо равенство:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(T_1) = \zeta\,|A + TC|^{\frac{1}{2}}\vartheta\begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(T). \tag{15}$$

Покажем, что функции (10) удовлетворяют соотношению (8).

В подгруппе $G_2 \subset G$ модулярных матриц 2-й ступени в качестве образующих можно взять матрицы [см. (3)]:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что

$$S_1 = u_3^2, \quad S_2 = u_1 u_3^2 u_1, \quad S_3 = u_2 u_4^2 u_2^{-1}. \tag{16}$$

Если характеристики $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ — полуцелые, то из формулы (12) видно, что для любой модулярной матрицы 2-й ступени

$$\bar{g} \equiv g \pmod 2, \quad \bar{h} \equiv h \pmod 2$$

и, значит,

$$\vartheta^2\begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(T) = \vartheta^2\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(T).$$

Справедливость соотношения (8) для матриц S_1, S_2, S_3 теперь может быть непосредственно проверена простым применением формул (16), (13) и (14), а вследствие равенства (14) оно выполняется тогда и для любой модулярной матрицы 2-й ступени.

Модулярные функции 2-й ступени образуют, очевидно, поле.

ТЕОРЕМА 2. *Поле модулярных функций 2-й ступени изоморфно полю рациональных функций от трех независимых переменных.*

Доказательство. Согласно теореме Зигеля, модулярные функции 2-й ступени образуют поле алгебраических функций от трех независимых переменных. Примем за эти переменные найденные выше модулярные функции $\varkappa$, λ, μ; тогда каждая модулярная функция 2-й ступени $\varphi(T) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ будет связана с $\varkappa$, λ, μ алгебраическим уравнением

$$F(\varphi, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \tag{17}$$

где F — многочлен. Но уравнения

$$\varkappa(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = a,$$
$$\lambda(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = b,$$
$$\mu(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = c$$

при произвольных a, b, c имеют в фундаментальной области группы G единственное решение, так как значения $\varkappa = a$, $\lambda = b$, $\mu = c$ полностью определяют гиперэллиптическую кривую (6), из которой методом, изложенным в § 1, получаем матрицу периодов (E, T). Поэтому τ_1, τ_2, τ_3 являются однозначными функциями от $\varkappa$, λ, μ. А тогда и функция $\varphi(T)$ является однозначной функцией от $\varkappa$, λ, μ, и так как, с другой стороны, она связана с $\varkappa$, λ, μ алгебраическим уравнением (17), то $\varphi(T)$ является рациональной функцией $\varkappa$, λ, μ, так как совокупность значений $(\varkappa, \lambda, \mu)$ заполняет все трехмерное комплексное пространство, кроме, быть может, подмногообразия $D(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$, где $D(\varkappa, \lambda, \mu)$ — дискриминант уравнения (15), которое на два вещественных измерения меньше.

§ 3

Покажем теперь, что модулярные функции также образуют поле рациональных функций от трех независимых переменных. Доказательство этого предложения мы будем вести по тому же плану, как и доказательство теоремы 2. Как показал Зигель [1], модулярные функции образуют поле алгебраических функций от трех независимых переменных. Мы покажем, что за эти три независимые модулярные функции можно принять три абсолютных инварианта j_1, j_2, j_3 бинарной формы $f(x_1 x_2)$, которые мы определим ниже. Если теперь будет доказано, что инварианты j_1, j_2, j_3 определяют бинарную форму $f(x_1 x_2)$ с точностью до линейного преобразования переменных x_1, x_2 однозначно, т. е. уравнения

$$j_1(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = a,$$
$$j_2(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = b,$$
$$j_3(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = c$$

при произвольных a, b, c имеют в фундаментальной области модуляр-

ной группы единственное решение, то отсюда, точно так же, как и для модулярных функций 2-й ступени, будет следовать, что поле модулярных функций изоморфно полю рациональных функций от j_1, j_2, j_3.

Определим сначала абсолютные инварианты j_k, $k = 1, 2, 3$. Пусть многочлен $f(x)$ записан в однородной форме

$$f = f(x_1 x_2) = a \prod_{i=1}^{6} (p_1^{(i)} x_1 + p_2^{(i)} x_2).$$

Обозначим определитель

$$\begin{vmatrix} p_1^{(i)} & p_2^{(i)} \\ p_1^{(k)} & p_2^{(k)} \end{vmatrix}$$

через (i, k) и положим

$$(1,4)\ (4,6)\ (6,1)\ (2,3)\ (3,5)\ (5,2) = \varphi_1.$$

Легко проверить, что φ_1 инвариантна относительно подгруппы 24-го порядка симметрической группы $\mathfrak{S}_6$. Пусть, наконец,

$$S = (12543), \quad S^5 = 1,$$

$$S^i \varphi_1 = \varphi_i \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{5} \varphi_k = \Phi_1.$$

Очевидно, что Φ_1 принадлежит подгруппе $\mathfrak{S}_6$ 120-го порядка и потому, действуя на Φ_1 всеми подстановками из $\mathfrak{S}_6$, мы получим шесть функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$.

Инварианты бинарной формы f определяются как элементарные симметрические функции от $\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ соответственно 2-го, 3-го, 5-го и 6-го порядков. Это будут инварианты веса 4, 6, 10 и 12. Обозначим их через $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_6$, $\mathfrak{J}_{10}$ и $\mathfrak{J}_{12}$. Если

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{J}_6^2 - \mathfrak{J}_{12}}{\mathfrak{J}_{10}},$$

то абсолютные инварианты j_k, $k = 1, 2, 3$, определим равенствами

$$j_1 = \frac{\mathfrak{J}_4}{\mathfrak{J}_2^2}, \qquad j_2 = \frac{\mathfrak{J}_6}{\mathfrak{J}_2^3}, \qquad j_3 = \frac{\mathfrak{J}_{10}}{\mathfrak{J}_2^5}. \tag{18}$$

ТЕОРЕМА 3. *Инварианты* j_k, $k = 1, 2, 3$, *являются модулярными функциями.*

Доказательство. Заметим, что инварианты j_k являются модулярными функциями 2-й ступени. Действительно, если привести многочлен $f(x_1 x_2)$ к вейерштрассовой нормальной форме

$$f(x_1 x_2) = x_1 x_2 (x_2 - x_1)(x_2 - \varkappa x_1)(x_2 - \lambda x_1)(x_2 - \mu x_1), \tag{19}$$

то все определители (i, k), а значит и j_k, выразятся рационально через $\varkappa$, λ, μ.

Покажем, что j_k — инварианты относительно всех модулярных подстановок

$$T_1 = (A + TC)^{-1}(B + TD)$$

с любой модулярной матрицей $\begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$. Действительно, по теореме Эрмита [см. (3)] о монодромии точек ветвления, каждую трансформацию периодов можно осуществить такой деформацией римановой поверхности $y^2 = f(x)$ в себя, при которой точки ветвления функции $y(x)$ испытывают только перестановку. При этом, конечно, в процессе деформации точки ветвления не совпадают друг с другом. Так как инварианты $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_6$, $\mathfrak{I}_{10}$ являются симметрическими функциями корней $f(x)$, а j_1, j_2, j_3 — инварианты нулевого веса, то наше утверждение непосредственно следует из только что сформулированной теоремы Эрмита.

Заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что инвариант $\mathfrak{I}_{10}^4$ является модулярной формой веса 40.

Действительно, по ранее сказанному, отсюда следовало бы, что

$$j_3 = \frac{\mathfrak{I}_{10}^4}{\mathfrak{I}_2^5 \mathfrak{I}_{10}^3}$$

была бы модулярной функцией, а значит $\mathfrak{I}_2^5 \mathfrak{I}_{10}^3$ — модулярной формой веса 40. Но тогда и

$$j_2 = \frac{\mathfrak{I}_6 \mathfrak{I}_2^2 \mathfrak{I}_{10}^3}{\mathfrak{I}_2^5 \mathfrak{I}_{10}^3},$$

$$j_1 = \frac{\mathfrak{I}_4 \mathfrak{I}_2^3 \mathfrak{I}_{10}^3}{\mathfrak{I}_2^5 \mathfrak{I}_{10}^3}$$

будут модулярными функциями. Для того чтобы доказать, что $\mathfrak{I}_{10}^4$ является модулярной формой, воспользуемся выражением инварианта $\mathfrak{I}_{10}$ через нулевые значения ϑ-функций. Больца (4) показал, что все инварианты $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_6$, $\mathfrak{I}_{10}$ выражаются цело-рационально через нулевые значения десяти четных ϑ-функций и потому являются целыми функциями от τ_1, τ_2, τ_3. Эти выражения можно получить, записав многочлен (19) в виде

$$f = \vartheta_{01}^4 \vartheta^4 \vartheta_{12}^4 x_1 x_2 (x_2 - x_1)(\vartheta_{01}^2 \vartheta^2 x_2 - \vartheta_{23}^2 \vartheta_4^2 x_1) \cdot$$

$$\cdot (\vartheta_{12}^2 \vartheta_{01}^2 x_2 - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{23}^2 x_1)(\vartheta_{12}^2 \vartheta^2 x_2 - \vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2 x_1).$$

Тогда все (i, k), а потому и $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_6$, $\mathfrak{I}_{10}$, будут целыми функциями от ϑ^2, ϑ_{01}^2, ϑ_{12}^2, ϑ_{03}^2, ϑ_{23}^2, ϑ_4^2. В частности, $\mathfrak{I}_{10}$ равно произведению нулевых значений всех десяти четных ϑ-квадратов

$$\mathfrak{J}_{10} = \prod_{r=1}^{10} \vartheta_r^2.$$

Так как, согласно (15), ϑ_r^8 при модулярных подстановках только приобретают множитель $|A+TC|^4$ и переставляются местами, то $\mathfrak{J}_{10}^4$ является модулярной формой веса 40. В силу сделанного ранее замечания, отсюда следует, что $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}_3$, определенные равенствами (18), являются модулярными функциями.

ТЕОРЕМА 4. *Поле модулярных функций степени два изоморфно полю рациональных функций от трех независимых переменных.*

Доказательство. Согласно теореме Зигеля, модулярные функции степени два образуют поле алгебраических функций от трех независимых переменных. Примем за эти переменные инварианты $\mathfrak{j}_k$. Тогда каждая модулярная функция $\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ будет связана с $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}_3$ алгебраическим уравнением

$$F(\varphi, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j}_3) = 0,$$

где F — многочлен.

Покажем, что система уравнений

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= y_1, \\ \mathfrak{j}_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= y_2, \\ \mathfrak{j}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= y_3 \end{aligned} \tag{20}$$

при произвольных y_1, y_2, y_3 имеет в фундаментальной области модулярной группы G единственное решение.

Действительно, согласно (18), система (20) равносильна системе

$$\mathfrak{J}_2 = y_4,$$

$$\mathfrak{J}_4 = y_1 y_4^2,$$

$$\mathfrak{J}_6 = y_2 y_4^3,$$

$$\mathfrak{J}_{10} = y_3 y_4^5.$$

Но, как показал еще Клебш (5), инварианты $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_6$, $\mathfrak{J}_{10}$ определяют кривую $y^2 = f(x)$ (а значит, и матрицу $T = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$) с точностью до дробно-линейного преобразования однозначно, откуда точно так, как и при доказательстве теоремы 2, получаем доказательство теоремы 4.

Замечание. При доказательстве последней теоремы мы воспользовались теоремой Эрмита о монодромии точек ветвления, что позволило нам доказательство того, что инварианты $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_6$, $\mathfrak{J}_{10}$ являются модулярными формами, свести к доказательству аналогичного факта для одного единственного инварианта $\mathfrak{J}_{10}^4$, осуществляемого простой проверкой при помощи явного выражения этого инварианта через нулевые значения десяти ϑ-функций. Можно было бы не опираться на теорему Эрмита, если только воспользоваться явными выражениями остальных инвариантов $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_4$, $\mathfrak{J}_6$ через нулевые значения десяти ϑ-функций. Это замечание относится также и к доказательству теоремы 2.

Тогда доказательство того, что инварианты $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_6$ являются модулярными формами, может быть получено, как и доказательство соответствующего утверждения для инварианта $\mathfrak{I}_{10}$, простой проверкой при помощи формул (13).

Указанные выражения для инвариантов $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_6$ см. в работе [4].

Поступило
13.V.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Siegel C., Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann., B. 116 (1839), 617—657.

[2] Königsberger L., Über die Transformation der Abel'schen Funktionen erster Ordnung, J. f. reine und angew. Math., B. 64 (1865), 17—42.

[3] Burkhardt H., Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Funktionen I Ordnung, Math. Ann., B. 35 (1890), 198—296.

[4] Baker H. F., Abel's theorem and the allied theory including the theory of the Theta-functions, Cambridge, 1897.

[5] Bolza O., Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Funktionen, Math. Ann., B. 30 (1887), 478—495.

[6] Koecher M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades,, Math. Zeitschr.,59, № 4 (1954), 399—416.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 337—376

Б. М. ЛЕВИТАН

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ПО МЕТОДУ С. Л. СОБОЛЕВА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе изучается асимптотическое поведение при малых t решения задачи Коши:

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u|_{t=0} = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

1. В работе ([1]) мы изучили асимптотическое поведение спектральной функции и разложение по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\}u = 0. \tag{0.1}$$

Метод, который мы при этом применили, основан на предварительном изучении задачи Коши:

$$\Delta u - q(x_1, x_2, x_3)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{0.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3). \tag{0.3}$$

Эта задача (в случае трехмерного пространства) может быть изучена элементарно, что и проделано в работе ([1]). Этот элементарный метод не обобщается на число измерений, бо́льшее трех.

Настоящее исследование посвящено изучению задачи Коши:

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{0.4}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{0.5}$$

при $n > 3$. Полученные результаты будут нами применены в другой работе к вопросам асимптотического поведения спектральной функции и разложения по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}u = 0. \tag{0.6}$$

Для изучения задачи (0.4) — (0.5) мы применяем метод С. Л. Соболева ([2]).

Приведем основные результаты работы.

I. *Обозначим через* $u(x, t) = u(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}; t)$ *решение задачи Коши* (0.4) — (0.5) *при нечетном* $n = 2k + 1$, $k > 1$. *Положим*

$$v_k(x, t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t - \tau)^{k-1} u(x, \tau)\, d\tau$$

и пусть $z_k^0(x, t)$ *есть* $v_k(x, t)$ *при* $q(x) = 0$. *Далее, положим*

$$v_k(x, t) = z_k^{(0)}(x, t) + z_k^{(1)}(x, t).$$

Если в окрестности точки x *функция* $f(y)$ *ограничена, а функция* $q(y)$ *имеет ограниченные частные производные до* $(n-3)$*-го порядка включительно, то для малых* t *справедлива оценка:*

$$\frac{\partial z_k^{(1)}(x, t)}{\partial t} = O(t^{k+2}).$$

II. *Если в окрестности точки* x *функция* $f(y)$ *имеет ограниченные частные производные до* $(\lambda-1)$*-го* $(\lambda \geqslant 1)$ *порядка включительно, а функция* $q(y)$ *— до* $(n-3)$*-го порядка включительно, то функции* $z_k^{(0)}(x, t)$ *и* $z_k^{(1)}(x, t)$ *имеют для малых* t *ограниченные частные производные по* t *до порядка* λ *включительно, причем справедлива оценка:*

$$\frac{\partial^\lambda z_k^{(1)}(x, t)}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{0.7}$$

III. *Пусть в окрестности точки* x *функция* $q(y)$ *имеет ограниченные частные производные до* $(2n-7)$*-го порядка включительно. Тогда решение задачи Коши* (0.4) — (0.5) *для малых* t *можно представить в виде* *:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{\partial^{2k-2}}{\partial t^{2k-2}} \int\limits_{|x-y| \leqslant t} z(x, y; t) f(y)\, dy, \tag{0.8}$$

где $u_0(x, t)$ *есть решение задачи Коши* (0.4) — (0.5) *при* $q(x) = 0$,

$$z(x, y; t) = \sum \alpha(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}) \frac{t^\lambda}{r^\mu} (\ln t)^\nu (\ln r)^\sigma + O(1). \tag{0.9}$$

причем $0 \leqslant \mu \leqslant 2k-4$, $\lambda \geqslant \mu + 1$, $\nu \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\alpha(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})$ *суть ограниченные функции точки* x *и полярных углов* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k}$ *радиуса-вектора* r_{xy}, *направленного из точки* x *в точку* y.

Формула (0.8) справедлива и для четного числа переменных $n = 2k$, если только потребовать, чтобы функция $q(y)$ имела ограниченные частные производные до $(2n-5)$-го порядка включительно.

2. Приведем сводку основных сокращенных обозначений, которыми мы пользуемся в настоящей работе.

а) E_n есть пространство Эвклида размерности n.

б) $x, y, \ldots$ — точки E_n с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ...

в) Через $|x-y|$ обозначается расстояние между точками x и y, т. е.

$$|x-y| = \{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Это расстояние обозначается также буквами r и ρ.

---

* От начальной функции $f(y)$ также следует потребовать существования некоторого числа частных производных [см. (2), стр. 223]. Однако для приложений к разложению по собственным функциям уравнения (0.6) это несущественно.

г) Через dx обозначается элемент объема в E_n, т. е.

$$dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Употребляются также другие буквы: dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, ...

д) Через $\widetilde{dx}$ обозначается элемент поверхности в E_n. Употребляются также и другие буквы: $\widetilde{dy}$, $\widetilde{d\xi}$ и т. п.

е) Через r_{xy} обозначается радиус-вектор в E_n с началом в точке x и концом в точке y. Через $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ обозначаются полярные углы этого радиуса-вектора в предположении, что полюс (начало координат) находится в точке x.

ж) Через ω_n мы обозначаем поверхность сферы единичного радиуса в E_n, а также площадь этой поверхности.

§ 1. Вывод формулы для решения задачи Коши

В этом параграфе мы выведем формулу для решения задачи Коши

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$

при нечетном n, $n = 2k+1$, $k > 1$ *. Будем предполагать, что функции $q(x)$ и $f(x)$ имеют непрерывные частные производные достаточно высоких порядков, которые в дальнейшем будут указаны.

Пусть $u(x, t)$ есть решение задачи (1.1) — (1.2) и $\lambda \geqslant k$ — целое число. Положим

$$v_\lambda(x, t) = \frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} u(x, \tau)\, d\tau.$$

Покажем, что функция $v_\lambda(x, t)$ есть решение задачи Коши:

$$\Delta v_\lambda - \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - q(x)\, v_\lambda = -\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} f(x), \tag{1.3}$$

$$v_\lambda|_{t=0} = \left.\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.4}$$

В самом деле, из уравнения (1.1) следует:

$$\Delta v_\lambda = \frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\, \Delta u(x, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + q(x)\, u\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\, d\tau + q(x)\, v_\lambda(x, t). \tag{1.5}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} = \frac{1}{(\lambda-3)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-3} u(x, \tau)\, d\tau.$$

* Случай $n = 3$ рассмотрен нами в работе [2].

Интегрируя правую часть дважды по частям, мы получим, пользуясь начальными условиями (1.2):

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} = \frac{1}{(\lambda-1)!}\, t^{\lambda-1} f(x) + \frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\, d\tau. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует (1.3). Начальные условия (1.4) проверяются непосредственно.

Таким образом, вместо задачи (1.1)—(1.2) можно изучать задачу (1.3) — (1.4) *.

Задачу Коши (1.3)—(1.4) мы будем решать по методу С. Л. Соболева([1]).

В самых общих чертах суть этого метода заключается в том, что задача Коши заменяется эквивалентным интегральным уравнением типа уравнения Вольтерра, которое затем решается при помощи метода итераций.

Можно показать (см. дополнение к настоящей работе), что в нашем случае интегральное уравнение для функции $v_\lambda(x, t)$ имеет вид:

$$v_\lambda(x,t) = \frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r\leqslant t}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(x,y)\,\frac{(t-r)^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!}\,f(y)\,dy + \\ + \frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r\leqslant t} N(x,y)\,v_\lambda(y;\,t-r)\,dy. \tag{1.7}$$

В этом уравнении $\alpha_k = (2k-1)\,\omega_{2k+1}$, ω_{2k+1} — площадь поверхности единичной сферы в E_{2k+1}, $r = |x-y|$ — расстояние между точками x и y, функции $\sigma_j(x, y)$ известны и определяются рекуррентно, а именно:

$$\sigma_1(x,y) = \frac{2^{k-1}\,\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\,\frac{1}{r^k}. \tag{1.8}$$

Для $j>1$ $\sigma_j(x, y)$ определяется из дифференциального уравнения

$$2\left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial r} + \frac{k}{r}\,\sigma_j\right] = \Delta\sigma_{j-1} - q(y)\,\sigma_{j-1}. \tag{1.9}$$

Наконец,

$$N(x,y) = \Delta\sigma_k - q(y)\,\sigma_k. \tag{1.10}$$

Положим

$$v_\lambda^{(0)}(x,t) = \frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r\leqslant v+t}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(x,y)\,\frac{(t-r)^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!}\,f(y)\,dy, \tag{1.11}$$

. . . . . .

$$v_\lambda^{(m)}(x,t) = \frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r\leqslant t} N(x,y)\,v_\lambda^{(m-1)}(y;\,t-r)\,dy \qquad (m=1,2,\ldots). \tag{1.11'}$$

---

* Замена задачи (1.1) — (1.2) задачей (1.3) — (1.4), как мы увидим в дальнейшем, весьма плодотворна. Впервые эта замена была использована М. П. Зюсько в ее кандидатской диссертации, с которой мы имели возможность ознакомиться в рукописи. Результаты работы М. П. Зюсько в значительной мере использованы нами при написании этого параграфа, а также дополнения к настоящей работе.

Тогда [см. (²), стр. 195]

$$v_\lambda(x, t) = v_\lambda^{(0)}(x, t) + v_\lambda^{(1)}(x, t) + \cdots \tag{1.12}$$

Чтобы выявить явную зависимость решения $v_\lambda(x, t)$ от начальной функции $f(x)$, следует переставить порядок интегрирования в интегралах (1.11). Начнем с $m = 1$. Мы имеем:

$$v_\lambda^{(1)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{j=1}^{k} \int_{r \leqslant t} N(x, y) \left[\int_{r' \leqslant t-r} \sigma_j(y, z) \frac{(t-r-r')^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} f(z)\, dz \right] dy,$$

причем $r = |x - y|$, $r' = |y - z|$.

Рассмотрим одно из слагаемых этой суммы:

$$v_\lambda^{(1,\,j)}(x,t) = \frac{1}{\alpha_k^2} \int_{r \leqslant t} N(x,y) \left[\int_{r' \leqslant t-r} \sigma_j(y, z) \frac{(t-r-r')^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} f(z)\, dz \right] dy. \tag{1.13}$$

Переставим в формуле (1.13) порядок интегрирования так, чтобы вначале интегрирование шло по y, а затем по z.

Так как

$$|y - z| \leqslant |x - y| + |y - z| = r + r' \leqslant t,$$

то после перестановки порядка интегрирования интегрирование по z будет распространяться на сферу радиуса t с центром в точке x. Определим область интегрирования во внутреннем интеграле (по переменной y) при фиксированном z. Эта область определяется из неравенства

$$r' \leqslant t - r \quad (r' = |y - z|,\ r = |x - y|),$$

т. е.

$$|y - z| + |x - y| \leqslant t. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) при фиксированных x и z определяет эллипсоид вращения в E_{2k+1} с фокусами в точках x и z и большой осью, равной t.

Таким образом, переставив в (1.13) порядок интегрирования и поменяв затем местами y и z, мы получим:

$$v_\lambda^{(1,\,j)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k^2} \int_{r \leqslant t} f(y) \left[\int_{r'+r'' \leqslant t} \sigma_j(z, y) \frac{(t-r'-r'')^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} N(x, z)\, dz \right] dy,$$

где $r = |x - y|$, $r' = |x - z|$, $r'' = |y - z|$.

Положим

$$w_\lambda^{(1,\,j)}(x,\ y;\ t) = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r'+r'' \leqslant t} \sigma_j(z,\ y) \frac{(t-r'-r'')^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} N(x,\ z)\, dz \tag{1.15}$$
$$(j = 1,\ 2, \ldots, k).$$

Тогда

$$v_\lambda^{(1)}(x,\ t) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{k} \int_{r \leqslant t} w_\lambda^{(1,\,j)}(x,\ y;\ t) f(y)\, dy \quad (r = |x - y|). \tag{1.16}$$

Докажем общую формулу:

$$v_\lambda^{(m)}(x,\ t) = \frac{1}{\alpha_k}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{r\leqslant t} w_\lambda^{(m,\ j)}(x,\ y;\ t)\,f(y)\,dy \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.17}$$

где

$$w_\lambda^{(m,\ j)}(x,\ y;\ t) = \frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r'+r''\leqslant t} w_\lambda^{(m-1,\ j)}(z,\ y;\ t-r')\,N(x,\ z)\,dz. \tag{1.18}$$

Будем рассуждать по индукции. Пусть

$$v_\lambda^{(m-1)}(x,\ t) = \frac{1}{\alpha_k}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{r\leqslant t} w_\lambda^{(m-1,\ j)}(x,\ y;\ t)\,f(y)\,dy.$$

На основании (1.11′) имеем:

$$v_\lambda^{(m)}(x,\ t) = \frac{1}{\alpha_k^2}\int\limits_{r\leqslant t} N(x,\ y)\left[\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{r'\leqslant t-r} w_\lambda^{(m-1,\ j)}(y,\ z;\ t-r)\,f(z)\,dz\right]dy,$$

где $r = |x-y|$, $r' = |y-z|$. Меняя порядок интегрирования и переставляя затем местами y и z, мы получим:

$$v_\lambda^{(m)}(x,\ t) = \frac{1}{\alpha_k^2}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{r\leqslant t} f(y)\left[\int\limits_{r'+r''\leqslant t} w_\lambda^{(m-1,\ j)}(z,\ y;\ t-r')\,N(x,\ z)\,dz\right]dy,$$

где $r = |x-y|$, $r' = |x-z|$, $r'' = |y-z|$.

Поэтому если мы определим функцию $w_\lambda^{(m,j)}(x,\ y;\ t)$ по формуле (1.18), то получим формулу (1.17).

Пусть функция $v_\lambda^{(0)}(x,\ t)$ определяется по формуле (1.11) и пусть

$$w_\lambda^{(j)}(x,\ y;\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_\lambda^{(m,\ j)}(x,\ y;\ t)^*.$$

Из (1.12) и (1.17) следует:

$$v_\lambda(x,\ t) = v_\lambda^{(0)}(x,\ t) + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_k}\int\limits_{r\leqslant t} w_\lambda^{(j)}(x,\ y;\ t)\,f(y)\,dy. \tag{1.19}$$

Чтобы получить формулу для решения задачи Коши (1.1) — (1.2), следует равенство (1.19) продифференцировать по t λ раз. Мы получим:

$$u(x,\ t) = \frac{\partial^\lambda v_\lambda^{(0)}(x,\ t)}{\partial t^\lambda} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial^\lambda}{\partial t^\lambda}\int\limits_{r\leqslant t} w_\lambda^{(j)}(x,\ y;\ t)\,f(y)\,dy. \tag{1.20}$$

Наконец, чтобы получить решение задачи Коши:

$$\Delta u - q(x)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.2′}$$

следует правую часть равенства (1.20) продифференцировать по t еще один раз. Мы получим:

$$u(x,\ t) = \frac{\partial^{\lambda+1} v_\lambda^{(0)}(x,\ t)}{\partial t^{\lambda+1}} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}}\int\limits_{r\leqslant t} w_\lambda^{(j)}(x,\ y;\ t)\,f(y)\,dy. \tag{1.21}$$

* Сходимость этого ряда легко доказывается (см. § 5).

§ 2. Поведение функций $\sigma_j(x, y)$ при $|x-y|\to 0$

1. В этом параграфе мы изучим поведение функций $\sigma_j(x, y)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ при $r=|x-y|\to 0$. Это позволит нам в дальнейшем существенно уточнить формулу (1.21). Будем предполагать в этом параграфе, что коэффициент $q(y)$ в окрестности фиксированной точки x есть аналитическая функция. В следующем параграфе мы выясним, насколько это ограничение можно ослабить.

Пусть функция $\sigma_1(x, y)$ определяется по формуле (1.8). Для того чтобы получить разложение функций $\sigma_j(x, y)$ при $j>1$, преобразуем сначала уравнение (1.9). Если обе части этого уравнения умножить на r^k, то оно примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}[r^k\sigma_j]=\frac{1}{2}r^k[\Delta\sigma_{j-1}-q(y)\sigma_{j-1}].$$

Поэтому

$$\sigma_j=\frac{1}{2r^k}\int r^k[\Delta\sigma_{j-1}-q(y)\sigma_{j-1}]\,dr. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) позволит нам последовательно изучить поведение функций $\sigma_j(x, y)$ при $j=2, 3, \ldots, k$. Начнем с $j=2$. Пусть

$$q(y)=q(x)+r\alpha_1(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})+r^2\alpha_2(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})+\cdots, \tag{2.2}$$

где $r=|x-y|$ и коэффициенты $\alpha_l(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})$ зависят от точки x и полярных углов $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ радиуса-вектора r_{xy}, направленного из точки x в точку y.

Как известно, оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2k}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Omega,$$

где Ω — оператор Лапласа на единичной сфере. Поэтому

$$\Delta\sigma_1=-\frac{2^{k-1}k(k-1)\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^{k+2}}.$$

Отсюда и из разложения (2.2) следует:

$$r^k[\Delta\sigma_1-q(y)\sigma_1]=-\frac{2^{k-1}k(k-1)\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^2}-$$
$$-\frac{2^{k-1}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}q(x)+c_1^{(1)}r+c_2^{(1)}r^2+\cdots,$$

где коэффициенты $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots$ зависят от x и $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$. Из этого разложения и формулы (2.1) выводим:

$$\sigma_2(x, y)=\frac{2^{k-2}k(k-1)\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^{k+1}}-\frac{2^{k-2}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{q(x)}{r^{k-1}}+\frac{a_1^{(2)}}{r^{k-2}}+\frac{a_2^{(2)}}{r^{k-3}}+\ldots,$$

где $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots$ зависят от x и $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$. Из разложения для $\sigma_2(x, y)$ получаем:

$$r^k[\Delta\sigma_2-q(y)\sigma_2]=-\frac{2^{k-2}(k-1)k(k+1)\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^3}+$$
$$+\frac{(k-1)k2^{k-2}}{\Gamma(2k-1)}\frac{q(x)}{r}-\frac{(k-1)k2^{k-2}}{\Gamma(2k-1)}\frac{q(x)}{r}+\ldots=\frac{c_1^{(2)}}{r^3}+c_2^{(2)}+c_3^{(2)}r+\ldots,$$

где $c_1^{(2)}$ — константа, $c_2^{(2)}$, $c_3^{(2)}$, ... зависят от x и полярных углов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k}$. Из этого разложения и формулы (2.1) следует разложение:

$$\sigma_3(x, y) = \frac{a_1^{(3)}}{r^{k+2}} + \frac{a_2^{(3)}}{r^{k-1}} + \frac{a_3^{(3)}}{r^{k-2}} + \ldots .$$

Здесь $a_1^{(3)}$ — константа, $a_2^{(3)}$, $a_3^{(3)}$, ... зависят от x и углов $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$

Аналогичным образом можно получить разложение:

$$\sigma_4(x, y) = \frac{a_1^{(4)}}{r^{k+3}} + \frac{a_2^{(4)}}{r^k} + \cdots + \frac{b_1^{(4)}}{r^k} \ln r,$$

где $a_1^{(4)}$ — константа, $a_2^{(4)}$, $a_3^{(4)}$, ..., $b_1^{(4)}$ зависят от x и углов $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$.

Применяя метод математической индукции, нетрудно получить следующую лемму, доказательство которой мы опускаем.

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что функция $q(y)$ в окрестности точки x аналитична. В таком случае для малых $r = |x - y|$ справедливы разложения:*

I. *Если $j = 2s + 2$ $(4 \leqslant j \leqslant k)$, то*

$$\sigma_j(x, y) = \frac{a_{1,1}^{(j)}}{r^{k+j-1}} + \frac{a_{1,2}^{(j)}}{r^{k+j-4}} + \frac{a_{1,3}^{(j)}}{r^{k+j-5}} + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{a_{2,1}^{(j)}}{r^{k+j-4}} + \frac{a_{2,2}^{(j)}}{r^{k+j-5}} + \cdots\right) \ln r + \left(\frac{a_{3,1}^{(j)}}{r^{k+j-5}} + \frac{a_{3,2}^{(j)}}{r^{k+j-6}} + \cdots\right) \ln^2 r + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{a_{s-1,1}^{(j)}}{r^{k+2}} + \frac{a_{s-1,2}^{(j)}}{r^{k+1}} + \cdots\right) \ln^{s-1} r + \frac{a_{s,1}^{(j)}}{r^k} \ln^s r. \qquad (2.3)$$

II. *Если $j = 2s + 3$ $(3 \leqslant j \leqslant k)$, то*

$$\sigma_j(x, y) = \frac{a_{1,1}^{(j)}}{r^{k+j-1}} + \frac{a_{1,2}^{(j)}}{r^{k+j-4}} + \cdots + \left(\frac{a_{2,1}^{(j)}}{r^{k+j-4}} + \frac{a_{2,2}^{(j)}}{r^{k+j-5}} + \cdots\right) \ln r +$$
$$+ \cdots + \left(\frac{a_{s,1}^{(j)}}{r^{k+1}} + \frac{a_{s,2}^{(j)}}{r^k} + \cdots\right) \ln^s r. \qquad (2.3')$$

В этих формулах $a_{1,1}^{(j)}$ суть константы, остальные коэффициенты зависят от x и полярных углов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k}$.

Из разложений (2.3) и (2.3′) и формулы (1.10) следует

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что функция $q(y)$ в окрестности точки x аналитична. Тогда для малых r справедливы следующие разложения*:*

I. *Если $k = 2$, то*

$$N(x, y) = \frac{c_1^{(1)}}{r^2} + \frac{c_2^{(1)}}{r} + \ldots . \qquad (2.4)$$

II. *Если $k = 2s + 2$ $(s > 0)$, то*

$$N(x, y) = \frac{c_1^{(1)}}{r^{2k-2}} + \frac{c_2^{(1)}}{r^{2k-3}} + \cdots + \left(\frac{c_1^{(2)}}{r^{2k-2}} + \frac{c_2^{(2)}}{r^{2k-3}} + \cdots\right) \ln r +$$
$$+ \cdots + \left(\frac{c_1^{(s)}}{r^k} + \frac{c_2^{(s)}}{r^{k-1}} + \cdots\right) \ln^s r. \qquad (2.4')$$

* Главный член в разложении $N(x, y)$ обращается в нуль, ибо $\Delta\left(\frac{1}{r^{2k-1}}\right) = 0$.

III. *Если* $k = 2s + 3$ $(s \geqslant 0)$, *то*

$$N(x, y) = \frac{c_1^{(1)}}{r^{2k-2}} + \frac{c_2^{(1)}}{r^{2k-3}} + \cdots + \left(\frac{c_1^{(2)}}{r^{2k-2}} + \frac{c_2^{(2)}}{r^{2k-3}} + \cdots\right) \ln r + \\ + \cdots + \left(\frac{c_1^{(s)}}{r^{k+1}} + \frac{c_2^{(s)}}{r^{k}} + \cdots\right) \ln^s r. \qquad (2.4'')$$

В этих разложениях все коэффициенты зависят от точки x *и полярных углов* $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ *радиуса-вектора* r_{xy}, *направленного из точки* x *в точку* y.

2. Для дальнейших приложений весьма существенно выявить более точно характер зависимости коэффициентов в разложениях (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′) и (2.4″) от полярных углов.

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. *Коэффициенты в разложениях* (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′) *и* (2.4″) *суть целые многочлены от синусов и косинусов полярных углов* $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ *радиуса-вектора, т. е. имеют вид*:

$$\sum a_{\nu_1, \ldots, \nu_{2k}; \mu_1, \ldots, \mu_{2k}}(x) \cos^{\nu_1}\theta_1 \ldots \cos^{\nu_{2k}}\theta_{2k} \sin^{\mu_1}\theta_1 \ldots \sin^{\mu_{2k}}\theta_{2k}.$$

Для того чтобы доказать эту очень важную для нас теорему, мы займемся наново и в несколько ином плане выводом разложений (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′) и (2.4″). Следуя С. Л. Соболеву [см (²), стр. 180] и вычисляя оператор $\{\Delta - q(y)\}$ в какой-либо точке y, выберем новые оси координат $z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы начало координат совпадало с точкой x и рассматриваемая точка y лежала на оси z_1. В таком случае новые координаты точки y будут:

$$z_1^{(0)} = |x - y| = r, \quad z_2^{(0)} = z_3^{(0)} = \ldots = z_n^{(0)} = 0. \qquad (2.5)$$

Обозначим через Y переменную точку. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — старые координаты этой точки и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — ее новые координаты.

Пусть формулы преобразования координат имеют вид:

$$Y_i - x_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{(n)} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.6)$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.3. *Коэффициенты* $\gamma_{ij}^{(n)}$ * *в формулах* (2.6) *суть целые многочлены от синусов и косинусов углов* $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$.

Доказательство. Рассуждаем по индукции. Если $n = 2$, то, в силу известных формул аналитической геометрии,

$$Y_1 - x_1 = z_1 \cos\varphi_1 - z_2 \sin\varphi_1,$$

$$Y_2 - x_2 = z_1 \sin\varphi_1 + z_2 \cos\varphi_1.$$

Поэтому для $n = 2$ лемма справедлива. Предположим, что лемма доказана для числа измерений $n - 1$. Спроектируем вектор $\overline{\lambda} = \overline{y} - \overline{x}$ на $(n-1)$-мерное подпространство, определяемое ортами осей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$.

* Число n может быть как нечетным, так и четным.

Обозначим проекцию через $\overline{\mu}$. В $(n-1)$-мерном подпространстве выберем новые оси $u_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ так, чтобы начало координат совпадало с проекцией точки x на определенное выше $(n-1)$ мерное подпространство и ось u_1 совмещалась с вектором $\overline{\mu}$. Пусть при этом формулы преобразования координат имеют вид:

$$Y_i - x_i = \gamma_{i1}^{(n-1)} u_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_{ij}^{(n-1)} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.7}$$

По предположению, коэффициенты $\gamma_{ij}^{(n-1)}$ суть целые многочлены от синусов и косинусов углов $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$.

Рассмотрим в первоначальном n-мерном пространстве прямоугольную систему координат: $u_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, Y_n$. В этой системе координат ось u_1 совмещена с вектором $\overline{\mu}$. Так как угол между вектором $\overline{\lambda} = \overline{y} - \overline{x}$ и осью Y_n равен θ_{n-1}, то угол между вектором $\overline{\lambda}$ и его проекцией $\overline{\mu}$ равен φ, причем $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta_{n-1}$ или $\varphi = \theta_{n-1} - \frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, будет ли $Y_n - x_n > 0$ или < 0. Если мы повернем в плоскости (u_1, Y_n) оси координат на угол φ и новые оси обозначим через (z_1, z_n), то совместим при этом повороте ось z_1 с вектором $\overline{\lambda}$. Формулы преобразования координат от осей $(u_1\ Y_n)$ к осям (z_1, z_2) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= z_1 \sin\varphi - z_n \cos\varphi, \\ Y_n - x_n &= z_1 \cos\varphi + z_n \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует:

$$Y_i - x_j = \gamma_{i1}^{(n-1)} (z_1 \sin\varphi - z_n \cos\varphi) + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_{ij}^{(n-1)} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$Y_n - x_n = z_1 \cos\varphi + z_n \sin\varphi.$$

Эти формулы, очевидно, доказывают лемму.

3. Обозначим полярные координаты точки Y относительно осей $z_1, \ldots, z_n$ через ρ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Очевидно, что в этой системе координат точка y имеет координаты:

$$\rho = r = |x - y|, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Как известно, полярные координаты связаны с прямоугольными по формулам:

$$\left.\begin{aligned} z_n &= \rho \cos\alpha_{n-1}, \\ z_{n-1} &= \rho \sin\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_2 &= \rho \cdot \sin\alpha_{n-1} \sin\alpha_{n-2} \ldots \sin\alpha_2 \cos\alpha_1, \\ z_1 &= \rho\ \sin\alpha_{n-1} \sin\alpha_{n-2} \ldots \sin\alpha_2 \sin\alpha_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Дальнейший ход рассуждений будет состоять в следующем:

Мы рассмотрим разложения (2.3) и (2.3′) для $\sigma_i(x, Y)$ и разложения (2.4), (2.4′) и (2.4″) для $N(x, Y)$ в системе координат $\rho, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Мы покажем, что в этих разложениях коэффициенты суть целые многочлены от синусов и косинусов углов $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Поэтому, для того чтобы получить теорему 2.1, достаточно будет положить в этих разложениях

$$\rho = r, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть функция $u(Y)$ в окрестности точки x аналитична. Вычислим оператор

$$Du = \Delta u - q(Y)\, u$$

в переменных $\rho, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Положим

$$q(Y) = q\left\{x_1 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{1j}^{(n)} z_j; \ldots; x_n + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj}^{(n)} z_j\right\} = \tilde{q}(z_1, \ldots, z_n).$$

Разлагая функцию $\tilde{q}(z)$ по степеням z_j и заменяя затем z_j по формулам (2.9), мы получим разложение вида

$$q(Y) = q(x) + b_1\rho + b_2\rho^2 + \cdots \tag{2.10}$$

В силу леммы 2.3, коэффициенты b_i в разложении (2.10) суть целые многочлены от синусов и косинусов углов $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Далее, как известно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2k}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\Omega_\alpha u,$$

где Ω_α есть оператор Лапласа на сфере. Поэтому

$$Du = \Delta u - q(Y)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2k}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\Omega_\alpha u - [q(x) + b_1\rho + \ldots]\, u. \tag{2.11}$$

Допустим теперь, что мы получили для $\sigma_{j-1}(x, Y)$ разложение вида (2.3) или (2.3′), в котором коэффициенты суть целые многочлены от синусов и косинусов углов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$.

Из равенства (2.11) непосредственно следует, что в таком случае коэффициенты разложения $D\sigma_{j-1}(x, Y)$ суть также целые многочлены от синусов и косинусов углов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$. Поэтому из формулы (2.1) следует, что это же имеет место и для $\sigma_j(x, Y)$. Сопоставляя это с тем, что было сказано выше, мы убеждаемся в справедливости теоремы 2.1.

4. Поместим полюс в точку y и обозначим через $\theta_1^*, \ldots, \theta_{2k}^*$ полярные углы радиуса-вектора r_{yx}, направленного из точки y в точку x.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для функций $\sigma_j(x, y)$ и $N(x, y)$ имеют место разложения вида* (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′), (2.4″), *в которых коэффициенты зависят от точки y и суть целые многочлены от синусов и косинусов полярных углов $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_{2k}^*$.*

Доказательство. В силу формул, связывающих полярные координаты с прямоугольными, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} y_n - x_n &= r\cos\theta_{n-1},\\ y_{n-1} - x_{n-1} &= r\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_1 - x_1 &= r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\dots\sin\theta_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned} x_n - y_n &= r\cos\theta^*_{n-1},\\ x_{n-1} - y_{n-1} &= r\sin\theta^*_{n-1}\cos\theta^*_{n-2},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_1 - y_1 &= r\sin\theta^*_{n-1}\sin\theta^*_{n-2}\dots\sin\theta^*_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Сравнивая формулы (2.12) и (2.13), найдем:

$$\theta_{n-1} = \pi - \theta^*_{n-1},\ \theta_{n-2} = \pi - \theta^*_{n-2},\dots,\theta_2 = \pi - \theta^*_2,\ \theta_1 = \theta^*_1 - \pi. \tag{2.14}$$

Разложим коэффициенты в формулах (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′), (2.4″) по степеням $(y_i - x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ (в точке y) и выразим эти разности по формулам (2.12). Далее, заменим углы $\theta_1, \dots, \theta_{2k}$ по формулам (2.14). В результате получим разложения, о которых говорится в теореме.

§ 3. Ослабление ограничений на функцию $q(y)$

1. В дальнейшем нам понадобятся лишь главные части разложений (2.3), (2.3′), (2.4), (2.4′), (2.4″). Чтобы их получить, нет необходимости предполагать, что коэффициент $q(y)$ есть аналитическая функция. Достаточно только предположить, что коэффициент $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до некоторых порядков, которые мы и подсчитаем в настоящем параграфе. С этой целью преобразуем сначала формулу (2.1). Подставляя в нее выражение оператора Лапласа в полярных координатах и интегрируя затем по частям, мы после несложных преобразований получим:

$$\sigma_j(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{j-1}}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_{j-1} - \frac{k(k-1)}{2r^k}\int r^{k-2}\sigma_{j-1}\,dr -$$

$$- \frac{1}{2r^k}\int r^k q(y)\sigma_{j-1}\,dr + \frac{1}{2r^k}\int r^{k-2}\Omega(\sigma_{j-1})\,dr, \tag{3.1}$$

где Ω есть оператор Лапласа на сфере. Пусть функция $\sigma_1(x, y)$ определена по формуле (1.8). Тогда из формулы (3.1) будет следовать:

$$\sigma_2(x, y) = \frac{2^{k-2}k(k-1)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^{k+1}} - \frac{2^{k-2}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^k}\int q(y)\,dr.$$

Из этой формулы непосредственно видно, что для выделения главной части функции $\sigma_2(x, y)$ достаточно потребовать, чтобы функция $q(y)$ в окрестности точки x имела ограниченные частные производные до $(k-1)$-го порядка включительно. В этом случае мы получим разложение:

$$\sigma_2(x, y) = \frac{2^{k-2}k(k-1)\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{1}{r^{k+1}} - \frac{2^{k-2}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}\frac{q(x)}{r^{k-1}} + \frac{a^{(2)}_{1,3}}{r^{k-2}} +$$

$$+ \frac{a^{(2)}_{1,4}}{r^{k-3}} + \dots + \frac{a^{(2)}_{1,k}}{r} + O(1). \tag{3.2}$$

Далее, если в формуле (3.1) положить $j=3$, то мы найдем:

$$\sigma_3(x, y)=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial r}+\frac{k}{r}\sigma_2-\frac{k(k-1)}{2r^k}\int r^{k-2}\sigma_2\,dr-$$
$$-\frac{1}{2r^k}\int r^k q(y)\,dr+\frac{1}{2r^k}\int r^{k-2}\Omega(\sigma_2)\,dr.$$

Выделим главную часть из каждого слагаемого. Легко видеть, что наибольшего числа производных требует последнее слагаемое — именно до $(k+2)$-го порядка включительно. Аналогичным образом можно убедиться, что для выделения главной части функции $\sigma_4(x, y)$ следует потребовать, чтобы функция $q(y)$ в окрестности точки x имела ограниченные частные производные до $(k+5)$-го порядка включительно. И вообще увеличение у σ_j индекса на единицу связано с увеличением порядка частных производных у функции $q(y)$ на три единицы. Поэтому справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(k+3j-7)$-го порядка включительно. Тогда для малых $r=|x-y|$ справедливы разложения:*

I. *Если $j=2s+2$ $(4\leqslant j\leqslant k)$, то*

$$\sigma_j(x, y)=\frac{a^{(j)}_{1,1}}{r^{k+j-1}}+\frac{a^{(j)}_{1,2}}{r^{k+j-4}}+\ldots+\frac{a^{(j)}_{1,k+j-5}}{r}+$$
$$+\left(\frac{a^{(j)}_{2,1}}{r^{k+j-4}}+\ldots+\frac{a^{(j)}_{2,k+j-4}}{r}+a^{(j)}_{2,k+j-3}\right)\ln r+\ldots+$$
$$+\left(\frac{a^{(j)}_{s-1,1}}{r^{k+2}}+\cdots+\frac{a^{(j)}_{s-1,k+2}}{r}+a^{(j)}_{s-1,k+3}\right)\ln^{s-1}r+\frac{a^{(j)}_{s,1}}{r^k}\ln r^s r+O(1). \quad (3.3)$$

II. *Если $j=2s+3$ $(3\leqslant j\leqslant k)$, то*

$$\sigma_j(x, y)=\frac{a^{(j)}_{1,1}}{r^{k+j-1}}+\frac{a^{(j)}_{1,2}}{r^{k+j-4}}+\ldots+\frac{a^{(j)}_{1,k+j-5}}{r}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{a^{(j)}_{s,1}}{r^{k+1}}+\ldots+a^{(j)}_{s,k+2}\right)\ln^s r. \quad (3.3')$$

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно. Тогда для малых r справедливы разложения:*

I. *Если $k=2$ $(n=5)$, то*

$$N(x, y)=\frac{c^{(1)}_1}{r^2}+\frac{c^{(1)}_2}{r}+O(1). \quad (3.4)$$

II. *Если $k=2s+2$ $(s>0)$, то*

$$N(x, y)=\frac{c^{(1)}_1}{r^{2k-2}}+\ldots+\frac{c^{(1)}_{2k-2}}{r}+\left(\frac{c^{(2)}_1}{r^{2k-2}}+\ldots+\frac{c^{(2)}_{2k-2}}{r}+c_{2k-1}\right)\ln r+\ldots+$$
$$+\left(\frac{c^{(s)}_1}{r^k}+\frac{c^{(s)}_2}{r^{k-1}}+\ldots+c^{(s)}_{k+1}\right)\ln^s r+O(1). \quad (3.4')$$

III. *Если* $k = 2s + 3$ $(s \geqslant 0)$, *то*

$$N(x, y) = \frac{c_1^{(1)}}{r^{2k-2}} + \ldots + \frac{c_{2k-2}^{(1)}}{r} + \left(\frac{c_1^{(2)}}{r^{2k-2}} + \ldots + c_{2k-1} \right) \ln r +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{c_1^{(s)}}{r^{k+1}} + \frac{c_2^{(s)}}{r^k} + \ldots + c_{k+2}^{(s)} \right) \ln^s r + O(1). \qquad (3.4'')$$

2. В некоторых вопросах нам понадобятся лишь главные члены функций $\sigma_j(x, y)$ и $N(x, y)$ и оценка остатка. Это можно сделать при еще меньших ограничениях на функцию $q(y)$. Для того чтобы не увеличивать и без того уже большой объем работы, мы ограничимся лишь формулировкой окончательных результатов *. Если $q(x) \equiv 0$, то

$$\sigma_j(x, y) = \sigma_j^{(0)}(x, y) = \frac{a_{1,1}^{(j)}}{r^{k+j-1}}.$$

Положим

$$\sigma_j^*(x, y) = \sigma_j(x, y) - \sigma_j^{(0)}(x, y)$$

ЛЕММА 3.3. *Пусть функция* $q(y)$ *в окрестности точки* x *имеет ограниченные частные производные до* $2(j-2)$*-го порядка включительно. Тогда для малых* r *имеют место оценки:*

$$\sigma_j(x, y) = O\left(\frac{1}{r^{k+j-1}} \right), \qquad (3.5)$$

$$\sigma_j^*(x, y) = O\left(\frac{1}{r^{k+j-3}} \right). \qquad (3.6)$$

ЛЕММА 3.4. *Пусть функция* $q(y)$ *в окрестности точки* x *имеет ограниченные частные производные до* $(n-3)$*-го порядка включительно* $(n = 2k+1)$. *Тогда для малых* r *справедлива оценка:*

$$N(x, y) = O\left(\frac{1}{r^{2k-1}} \right). \qquad (3.7)$$

ЛЕММА 3.5. *Пусть функция* $q(y)$ *в окрестности точки* x *имеет ограниченные частные производные до* $[2(j-2)+s]$*-го порядка включительно* $(s > 0)$. *Тогда для малых* r *справедливы оценки:*

$$\frac{\partial^s \sigma_j}{\partial r^s} = O\left(\frac{1}{r^{k+j+s-1}} \right), \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial^s \sigma_j^*}{\partial r^s} = O\left(\frac{1}{r^{k+j+s-3}} \right). \qquad (3.9)$$

ЛЕММА 3.6. *Пусть функция* $q(y)$ *в окрестности точки* x *имеет ограниченные частные производные до* $(n+s-3)$*-го порядка включительно. Тогда для малых* r *справедлива оценка:*

$$\frac{\partial^s N(x, y)}{\partial r^s} = O\left(\frac{1}{r^{2k+s-1}} \right). \qquad (3.10)$$

---

* Эти результаты нетрудно получить, пользуясь формулой (3.1) и методом математической индукции.

§ 4. Поведение решения задачи Коши при малых t

1. Если мы положим в формуле (1.12) $\lambda = k$, то получим:

$$v_k(x, t) = v_k^{(0)}(x, t) + v_k^{(1)}(x, t) + \cdots + v_k^{(m)}(x, t) + \cdots,$$

где

$$v_k^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{k} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy, \tag{4.1}$$

$$v_k^{(m)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r \leqslant t} N(x, y)\, v_k^{(m-1)}(y; t-r)\, dy \quad (m \geqslant 1). \tag{4.2}$$

Введем следующие обозначения *:

$$z_k^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{k} a_{1,1}^{(j)} \int_{r \leqslant t} \frac{1}{r^{k+j-1}} \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy, \tag{4.3}$$

$$v_k^{(0)}(x, t) = z_k^{(0)}(x, t) + \tilde{z}_k^{0}(x, t), \tag{4.4}$$

$$v_k(x, t) = z_k^{(0)}(x, t) + z_k^{(1)}(x, t). \tag{4.5}$$

Легко видеть, что

$$\tilde{z}_k^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=2}^{k} \int_{r \leqslant t} \sigma_j^{*}(x, y) \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy, \tag{4.6}$$

где

$$\sigma_j^{*} = \sigma_j - \frac{a_{1,1}^{(j)}}{r^{k+j-1}}$$

и

$$z_k^{(1)}(x, t) = \tilde{z}_k^{(0)}(x, t) + v_k^{(1)}(x, t) + \cdots + v_k^{(m)}(x, t) + \cdots. \tag{4.7}$$

В настоящем параграфе мы оценим при малых t производные по t функции $z_k^{(1)}(x, t)$.

2. Предположим сначала, что функция $f(y)$ в окрестности точки x ограничена. Дифференцируя равенство (4.1) по t, мы получим:

$$\frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r=t} \sigma_1(x, y) f(y)\, d\tilde{y} + \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=2}^{k} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-2}}{(j-2)!} f(y)\, dy. \tag{4.8}$$

Из оценки (3.5) и равенства (4.8) следует оценка:

$$\frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial t} = O(t^{k}). \tag{4.9}$$

Оценим при малых t функцию $\frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial t}$. Дифференцируя равенство (4.2) (при $m = 1$), находим:

$$\frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r \leqslant t} N(x, y) \frac{\partial v_k^{(0)}(y; t-r)}{\partial t}\, dy. \tag{4.10}$$

---

* $z_k^{(0)}(x, t)$ соответствует случаю $q(x) \equiv 0$, т. е. уравнению $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Из оценки (3.7) и равенства (4.10) следует оценка:

$$\frac{\partial v_\kappa^{(1)}}{\partial t} = O(t^{\kappa+2}).$$

Очевидно, что эта оценка и подавно имеет место для $\frac{\partial v_k^{(m)}}{\partial t}$ при $m > 1$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial v_\kappa^{(m)}}{\partial t} = O(t^{\kappa+2}). \tag{4.11}$$

Оценим при малых t функцию $\frac{\partial \tilde{z}_\kappa^{(0)}}{\partial t}$. Из формулы (4.6) следует:

$$\frac{\partial \tilde{z}_\kappa^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=2}^{\kappa} \int_{r \leqslant t} \sigma_j^*(x, y) \frac{(t-r)^{j-2}}{(j-2)!} f(y)\, dy. \tag{4.12}$$

Из оценки (3.5) и формулы (4.12) получаем оценку:

$$\frac{\partial \tilde{z}_\kappa^{(0)}}{\partial t} = O(t^{\kappa+2}). \tag{4.13}$$

Из оценок (4.11) и (4.13) следует

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(n-3)$-го порядка включительно, а функция $f(y)$ ограничена. Тогда функция $z_k^{(1)}(x, t)$, определенная по формуле (4.7), имеет для малых t первую производную по t и справедлива оценка:*

$$\frac{\partial z_\kappa^{(1)}(x, t)}{\partial t} = O(t^{\kappa+2}). \tag{4.14}$$

3. Допустим, что функция $f(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(\lambda-1)$-го порядка включительно $(1 < \lambda \leqslant k+1)$. Мы покажем, что в этом случае для малых t существует производная $\frac{\partial^\lambda z_\kappa^{(1)}(x, t)}{\partial t^\lambda}$ и дадим для нее оценку. Положим

$$v_\kappa^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_\kappa} \sum_{j=1}^{\lambda} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_\kappa} \sum_{j=\lambda+1}^{\kappa} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy = I_1(x, t) + I_2(x, t).$$

Так как

$$\frac{\partial^\lambda I_2}{\partial t^\lambda} = \frac{1}{\alpha_\kappa} \sum_{j=\lambda+1}^{\kappa} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)!} f(y)\, dy,$$

то из оценки (3.5) следует, что для малых t справедлива оценка:

$$\frac{\partial^\lambda I_2}{\partial t^\lambda} = O(t^{\kappa+1-\lambda}). \tag{4.15}$$

Для $j \leqslant \lambda$ мы имеем:

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial t^\lambda} \int\limits_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-1)!} f(y)\, dy = \frac{\partial^{\lambda-j}}{\partial t^{\lambda-j}} \int\limits_{r=t} \sigma_j(x, y) f(y)\, \widetilde{dy} =$$

$$= \frac{\partial^{\lambda-j}}{\partial t^{\lambda-j}} t^{2k} \int\limits_{|\alpha|=1} \sigma_j(x, x+\alpha t) f(x+\alpha t)\, \widetilde{d\alpha} =$$

$$= \int\limits_{|\alpha|=1} \sum_{\nu=0}^{\lambda-j} C_{\lambda-j}^{\nu} \frac{\partial^\nu \sigma_j(x, x+\alpha t)}{\partial t^\nu} \frac{\partial^{\lambda-j-\nu} t^{2k} f(x+\alpha t)}{\partial t^{\lambda-j-\nu}}\, \widetilde{d\alpha}, \tag{4.16}$$

где α — переменная точка на поверхности единичной сферы.

Из оценки (3.8) и равенства (4.16) следует оценка:

$$\frac{\partial^\lambda I_1}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+1-\lambda}). \tag{4.17}$$

Пользуясь оценками (4.15), (4.17), (3.7) и формулой (4.2), нетрудно получить оценку:

$$\frac{\partial^\lambda v_k^{(1)}}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{4.18}$$

Очевидно, что оценка (4.18) и подавно имеет место для $\frac{\partial^\lambda v_k^{(m)}}{\partial t^\lambda}$ при $m > 1$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^\lambda v_k^{(m)}}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{4.19}$$

Наконец, пользуясь оценкой (3.8), нетрудно получить оценку:

$$\frac{\partial^\lambda \tilde{z}_k^{(0)}}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{4.20}$$

Из оценок (4.19) и (4.20) следует

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(n-3)$-го порядка включительно, а функция $f(y)$ — до $(\lambda-1)$-го порядка включительно $(\lambda > 1)$. В таком случае функции $z_k^{(0)}(x, t)$ и $z_k^{(1)}(x, t)$ для малых t имеют ограниченные частные производные по t до порядка λ включительно. Для функции $z_k^{(1)}(x, t)$, определенной по формуле (4.5), для малых t справедлива оценка:*

$$\frac{\partial^\lambda z_k^{(1)}}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{4.21}$$

§ 5. Случай четного числа переменных

Рассмотрим задачу Коши для четного числа переменных:

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{5.2}$$

Задачу (5.1) — (5.2) можно решать при помощи так называемого метода спуска. Для этого искусственно повысим число измерений на

1 и затем решим задачу Коши по ранее полученным формулам. Пусть $u(x, t)$ есть решение задачи (5.1) — (5.2). Положим

$$v_k(x, t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} u(x, \tau)\, d\tau.$$

На основании предыдущего справедливо разложение:

$$v_k(x, t) = z_k^{(0)}(x, t) + z_k^{(1)}(x, t),$$

причем $z_k^{(0)}(x, t)$ соответствует случаю $q(x) = 0$. Далее, если $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2k-2)$-го порядка включительно, а $f(y)$ — до $(\lambda-1)$-го порядка включительно $(1 \leqslant \lambda \leqslant k+2)$, то $z_k^{(1)}(x, t)$ имеет при малых t производную по t порядка λ и имеет место оценка:

$$\frac{\partial^\lambda z_k^{(1)}}{\partial t^\lambda} = O(t^{k+3-\lambda}). \tag{5.3}$$

§ 6. Асимптотическое поведение функций $w_{n-3}^{(j)}(x, y; t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ при $|x-y| \to 0$

1. Если в формуле (1.21) положить $\lambda = n-3 = 2k-2$, то решение задачи Коши (1.1) — (1.2) представится в виде:

$$u(x, t) = \frac{\partial^{n-2} v_{n-3}^{(0)}(x, t)}{\partial t^{n-2}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_{r \leqslant t} w_{n-3}^{(j)}(x, y; t) f(y)\, dy, \tag{6.1}$$

где

$$v_{n-3}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{k} \int_{r \leqslant t} \sigma_j(x, y) \frac{(t-r)^{k+j-3}}{(k+j-3)!} f(y)\, dy, \tag{6.2}$$

$$w_{n-3}^{(j)}(x, y; t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{n-3}^{(m, j)}(x, y; t), \tag{6.3}$$

$$w_{n-3}^{(1, j)}(x, y; t) = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r'+r'' \leqslant t} \sigma_j(y, z) N(x, z) \frac{(t-r'-r'')^{k+j-3}}{(k+j-3)!} dz, \tag{6.4}$$

$$w_{n-3}^{(m, j)}(x, y; t) = \frac{1}{\alpha_k} \int_{r'+r'' \leqslant t} w_{n-3}^{(m-1, j)}(z, y; t-r') N(x, z)\, dz, \tag{6.5}$$

$$r = |x-y|, \quad r' = |x-z|, \quad r'' = |y-z|.$$

В настоящем параграфе мы изучим асимптотическое поведение функций $w_{n-3}^{(j)}(x, y; t)$ при малых r.

В силу формул (6.3), мы должны изучить асимптотическое поведение функций $w_{n-3}^{(m, j)}(x, y; t)$ $(m = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots, k)$. Мы будем предполагать в этом параграфе, что функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно, так что имеют место разложения (3.3), (3.3′), (3.4), 3.4′) и (3.4″). Будем предполагать также, что $n \geqslant 5$. Случай пятимер-

ного пространства представляет некоторые особенности, и мы его рассмотрим отдельно в следующем параграфе. При $m = 1$ $w_{n-3}^{(m,\,j)}(x, y; t)$ определяется по формуле (6.4). Подставляя в эту формулу вместо $\sigma_j(z, y)$ разложение (3.3) или (3.3′), коэффициенты которого зависят от y и полярных углов θ_i^* радиуса-вектора r_{yz} (см. теорему 2.2), а вместо $N(x, z)$ — разложение (3.4) или (3.4′), коэффициенты которого зависят от x и полярных углов θ_i радиуса-вектора r_{xz}, мы представим $w_{n-3}^{(1,\,j)}(x, y; t)$ в виде суммы членов вида:

$$I = \int\limits_{r'+r''\leqslant t} (t - r' - r'')^{k+j-3} \frac{a(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})}{r'^{\mu}} \frac{b(y, \theta_1^*, \ldots, \theta_{2k}^*)}{r''^{\nu}} (\ln r')^{\tau} (\ln r'')^{\sigma} \dot{dz}, \tag{6.6}$$

где $\mu \leqslant 2k - 2$, $\nu \leqslant k + j - 1$, $\tau \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$.

Положим

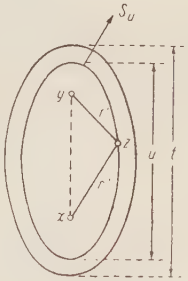
$$z_i = t\eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad r' = tR', \quad r'' = tR''.$$

Тогда

$$I = t^{\varkappa} \int\limits_{R'+R''\leqslant 1} (1 - R' - R'')^{k+j-3} \frac{a(x, \theta_i)}{R'^{\mu}} \frac{b(y, \theta_i^*)}{R''^{\nu}} \cdot$$
$$(\ln t + \ln R')^{\tau} (\ln t + \ln R'')^{\sigma} d\eta, \tag{6.7}$$

где $\varkappa = 3k + j - (\mu + \nu + 2) \geqslant 1$, $R' = |x^* - \eta|$, $R'' = |y^* - \eta|$, $x^* = \frac{x}{t}$, $y^* = \frac{y}{t}$.

Область интегрирования в интеграле (6.7) есть эллипсоид вращения в E_{2k+1} с фокусами в точках x^* и y^* и большой осью, равной 1 (см. рисунок). Эксцентриситет этого эллипсоида равен



$$|x^* - y^*| = \frac{|x - y|}{t} = \frac{r}{t} = \varepsilon.$$

Раскрывая в интеграле (6.7) суммы по формуле бинома Ньютона, мы представим этот интеграл как сумму интегралов вида:

$$I_1 = t^{\varkappa} (\ln t)^{\varkappa_1} \int\limits_{R'+R''\leqslant 1} \frac{a(x, \theta_i)}{R'^{\alpha}} \frac{b(y, \theta_i^*)}{R''^{\beta}} (\ln R')^{\gamma} (\ln R'')^{\delta} d\eta, \tag{6.8}$$

где $\varkappa \geqslant 1$, $\varkappa_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2k - 2$, $0 \leqslant \beta \leqslant k + j - 1$, $\gamma \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$.

Если $\alpha + \beta < 2k + 1$, то при $y \to x$, т. е. при $\varepsilon \to 0$, интеграл I_1 остается ограниченным. Если же $\alpha + \beta \geqslant (2k + 1)$, то при $\varepsilon \to 0$ I_1 неограниченно растет. Наша задача состоит в том, чтобы найти асимптотическое поведение I_1 при $\varepsilon \to 0$. С этой целью перейдем к полярным координатам. Выберем полюс в точке x^* и направим ось $\eta_{2\varkappa+1}$ по прямой $r_{x^*y^*}$ (см. рисунок). Обозначим через $\theta\,(=\theta_{2k})$ угол между прямыми $r_{x^*y^*}$

и $r_{x^*\eta}$. В таком случае уравнение эллипсоида вращения запишется в виде:

$$\rho = \frac{1-\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon\cos\theta)}. \tag{6.9}$$

Найдем зависимость между углами θ_i и θ_i^*. Из геометрических соображений очевидно, что $\theta_1^* = \theta_1$, $\theta_2^* = \theta_2$, ..., $\theta_{2k-1}^* = \theta_{2k-1}$. Далее, из рисунка следует:

$$R'\cos\theta + R''\cos\theta^* = \varepsilon, \quad R'\sin\theta = R''\sin\theta^*.$$

Поэтому

$$\cos\theta^* = \frac{\varepsilon - R'\cos\theta}{R''}, \quad \sin\theta^* = \frac{R'}{R''}\sin\theta. \tag{6.10}$$

Из рисунка следует также, что

$$R'' = r_{y^*\eta} = (R'^2 - 2\varepsilon R'\cos\theta + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если мы в интеграле (6.8) перейдем к полярным координатам, то получим:

$$I_1 = t^\varkappa (\ln t)^{\varkappa_1} \int_0^\pi \sin^{2k-1}\theta \left\{ \int_0^\rho \frac{A(x,\ y;\ \theta,\ \theta^*)\, R'^{2k-\alpha}}{(R'^2 - 2\varepsilon R'\cos\theta + \varepsilon^2)^{\frac{\beta}{2}}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\ln R')^\gamma [\ln (R'^2 - 2\varepsilon R'\cos\theta + \varepsilon^2)]^\delta dR' \right\} d\theta, \tag{6.11}$$

где $A(x,\ y;\ \theta,\ \theta^*)$ есть результат интегрирования произведения $a(x,\ \theta_i)\, b(y;\ \theta_i^*)$ по углам $\theta_1, \ldots, \theta_{2k-1}$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$A(x,\ y;\ \theta,\ \theta^*) = A(x,\ y)\cos^l\theta\cos^{l_1}\theta^*\sin^m\theta\sin^{m_1}\theta^*,$$

где l, l_1, m, m_1 — целые неотрицательные числа. Подставляя это выражение в формулу (6.11) и заменяя $\sin\theta^*$ и $\cos\theta^*$ по формулам (6.10), мы получим:

$$I_1 = A(x,\ y)\, t^\varkappa (\ln t)^{\varkappa_1} \int_0^\pi \sin^{2k+m+m_1-1}\theta\cos^l\theta \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\rho \frac{R'^{2k-\alpha+m_1}}{(R'^2 - 2\varepsilon R'\cos\theta + \varepsilon^2)^{\frac{\beta+l_1+m_1}{2}}} (\varepsilon - R'\cos\theta)^{l_1} (\ln R')^\gamma \cdot \right.$$

$$\left. [\ln (R'^2 - 2\varepsilon R'\cos\theta + \varepsilon^2)]^\delta dR' \right\} d\theta.$$

Введем новую переменную интегрирования z по формуле

$$R' - \varepsilon\cos\theta = z\varepsilon\sin\theta. \tag{6.12}$$

В результате этой замены мы получим:

$$I_1 = A(x,\ y)\, t^\varkappa (\ln t)^{\varkappa_1}\, \varepsilon^{2k+1-(\alpha+\beta)} \int_0^\pi \sin^{2k+m-\beta-1}\theta \cdot$$

$$\cdot \cos^l\theta \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{(\cos\theta + z\sin\theta)^{2k-\alpha+m_1}}{(1+z^2)^{\frac{\beta+l_1+m_1}{2}}} (\sin\theta - z)^{l_1} [\ln\varepsilon + \ln\cos\theta + \right.$$

$$+ \ln(\operatorname{ctg}\theta + z)]^{\gamma} [\ln\varepsilon + \ln\sin\theta + \ln(1+z^2)]^{\delta} dz\Big\} d\theta,$$

где

$$z_1 = -\operatorname{ctg}\theta, \quad z_2 = \frac{1}{\sin\theta}\left[-\cos\theta + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon\cos\theta)}\right]. \tag{6.13}$$

Раскрывая внутри интеграла суммы по формуле бинома Ньютона, мы представим I_1 в виде суммы интегралов вида:

$$I_2 = A(x,\ y)\, t^{\varkappa} (\ln t)^{\varkappa_1} \varepsilon^{-s} (\ln\varepsilon)^{\tau} \int_0^{\pi} \lambda(\theta) \sin^{2k+m+\mu+\nu-\beta-1}\theta \cdot$$

$$\cdot\, \theta \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^{\alpha_1}}{(1+z^2)^{\frac{\beta+l_1+m_1}{2}}} [\ln(\operatorname{ctg}\theta + z)]^{\gamma_1} [\ln(1+z^2)]^{\delta_1} dz \right\} d\theta,$$

где

$$s = \alpha + \beta - (2k+1), \quad \tau \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2k - \alpha + m_1,$$

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 2k + m_1 + l_1 - (\mu + \nu + \alpha),$$

$\lambda(\theta)$ есть произведение степеней $\cos\theta$, $\ln\cos\theta$ и $\ln\sin\theta$.

Положим $h(\theta) = \max\{1, 2\,|\operatorname{ctg}\theta|\}$ и покажем, что если ε достаточно мало, то для всех θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ выполняется неравенство $h(\theta) < z_2$. В самом деле, если $h(\theta) = 2\,|\operatorname{ctg}\theta|$, то

$$z_2 - h(\theta) = -\operatorname{ctg}\theta + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon\sin\theta(1-\varepsilon\cos\theta)} - 2\,|\operatorname{ctg}\theta| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon\cos\theta)} - 3\,|\operatorname{ctg}\theta| = \frac{1-\varepsilon^2-6\varepsilon\,|\cos\theta|\,(1-\varepsilon\cos)}{2\varepsilon\sin\theta(1-\varepsilon\cos\theta)} > 0,$$

когда ε достаточно мало.

Если $h(\theta) = 1$, то

$$z_2 - h(\theta) = -\operatorname{ctg}\theta + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon\sin\varepsilon(1-\varepsilon\cos\theta)} - 1 =$$

$$= \frac{(1-\varepsilon^2) - \varepsilon(1+\cos\theta)(1-\varepsilon\cos\theta)}{2\varepsilon\sin\theta(1-\varepsilon\cos\theta)} > 0,$$

когда ε достаточно мало.

Положим

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{z^{\alpha_1}}{(1+z^2)^{\frac{\beta+l_1+m_1}{2}}} [\ln(\operatorname{ctg}\theta + z)]^{\gamma_1} [\ln(1+z^2)]^{\delta_1} dz =$$

$$= \int_{-\operatorname{ctg}\theta}^{h(\theta)} \ldots dz + \int_{h(\theta)}^{z_2} \ldots dz = A_1(\theta) + A_2(\theta).$$

Соответственно этому разложению имеем:

$$I_2 = I_{21} + I_{22}.$$

Так как

$$\alpha_1 \leqslant 2k + m_1 + l_1 - (\mu + \nu + \alpha) \leqslant 2k + m_1 + l_1 - \alpha,$$

то

$$\alpha_1 - (\beta + l_1 + m_1) \leqslant 2k + m_1 + l_1 - \alpha - \beta - l_1 - m_1 = \\ = 2k - (\alpha + \beta) \leqslant -1.$$

Поэтому в любом случае

$$A_1(\theta) = O(\ln^2 \sin \theta)$$

и, следовательно, функция $A_1(\theta)$ суммируема. Значит,

$$I_{21} = A(x, y)\, t^{\varkappa} (\ln t)^{\varkappa_1} \varepsilon^{-s} (\ln \varepsilon)^{\tau}.$$

Так как $\varepsilon = \frac{r}{t}$, то I_{21} можно представить в виде суммы членов вида

$$A(x, y)\, \frac{t^{\lambda}}{r^{\mu}} (\ln t)^{\nu} (\ln r)^{\delta}, \tag{6.14}$$

где $\mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant \mu + 1$, $\nu \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$, $A(x, y)$ — функция точек x и y.

Теперь займемся асимптотическим поведением I_{22} (при $\varepsilon \to 0$). Мы имеем для больших z:

$$\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{\beta+m_1+l_1}{2}}} = \frac{1}{|z|^{\beta+m_1+l_1}} + O\left(\frac{1}{|z|^{\beta+m_1+l_1+2}}\right),$$

$$\ln(1+z^2) = 2\ln|z| + \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = 2\ln|z| + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Далее, если $z > 2|\operatorname{ctg}\theta|$, то

$$\ln(\operatorname{ctg}\theta + z) = \ln z + \ln\left(1 + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{z}\right) = \ln z + O\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{z}\right) = \ln z + O(1).$$

Из этих представлений следует:

$$I_{22} = A(x, y)\, t^{\varkappa} (\ln t)^{\varkappa_1} \varepsilon^{-s} (\ln \varepsilon)^{\tau} \left\{ \int_0^{\bar{\theta}} \lambda(\theta) \sin^{2k+m+\mu+\nu-\beta-1}\theta \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\int_{h(\theta)}^{z_2} z^{\alpha_1 - (\beta + l_1 + m_1)} (\ln z)^{\gamma_1} dz + \int_{h(\theta)}^{z_2} O\left(|z|^{\varkappa_1 - 2 + \eta - (\beta + l_1 + m_1)}\right) dz \right] d\theta \right\}^{*} = I'_{22} + I''_{22}.$$

Так как $\alpha_1 - (\beta + l_1 - m_1) \leqslant -1$, то

$$\int^{\infty} O\left(z^{\alpha_1 - (\beta + l_1 + + m_1 + 2) + \eta}\right) dz < \infty.$$

Поэтому мы можем положить

$$\int_{h(\theta)}^{z_2} O\left\{z^{\alpha_1 - (\beta + l_1 + m_1 + 2) + \eta}\right\} dz = \int_{h(\theta)}^{\infty} \ldots dz - \int_{z_2}^{\infty} \ldots dz = a_1(\theta) + a_2(\theta).$$

---

* Возможные степени $\ln z$ мы заменили на z^{η}, где η — сколь угодно малое положительное число.

Слагаемое $a_1(\theta)$ в результате подстановки в I_{22}'' и последующего интегрирования по θ даст сумму членов вида (6.14). Далее,

$$a_2(\theta) = O\{z_2^{\alpha_1-(\beta+l_1+m_1+1)+\eta}\}.$$

Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^{-s}(\ln\varepsilon)^{\tau} a_2(\theta) = O\{\varepsilon^{2-\eta}(\ln\varepsilon)^{\tau}(\sin\theta)^{(\beta+m_1+l_1+1)-\alpha_1-\eta}\} =$$

$$= o((\sin\theta)^{(\beta+m_1+l_1+1)-\alpha_1-\eta}), \quad \left[\varepsilon z_2 = O\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\right].$$

Таким образом, $a_2(\theta)$ дает в I_{22}'' слагаемое, которое при $\varepsilon \to 0$ также стремится к нулю.

Нам остается изучить асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ слагаемого I_{22}'. Положим

$$\alpha_1 - (\beta + m_1 + l_1) = -p$$

(как мы видели, $p \geqslant 1$). Тогда

$$I_{22}' = A(x,\ y)\, t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\varepsilon^{-s}(\ln\varepsilon)^{\tau}\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\cdot\left\{\int_{h(\theta)}^{z_2}\frac{(\ln z)^{\gamma_2}}{z^p}\,dz\right\}d\theta.$$

Пусть сначала $p > 1$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{h(\theta)}^{z_2}\frac{(\ln z)^{\gamma_2}}{z^p}\,dz = \left[-\frac{(\ln z)^{\gamma_2}}{(p-1)\,z^{p-1}}\right]_{z=h(\theta)}^{z=z_2} + \frac{\gamma_2}{p-1}\int_{h(\theta)}^{z_2}\frac{(\ln z)^{\gamma_2-1}}{z^p}\,dz. \qquad (6.15)$$

Если в проинтегрированный член подставить нижний предел и затем проинтегрировать по θ, то мы получим сумму членов вида (6.14). Подстановка верхнего предела и последующее интегрирование по θ дает нам член вида:

$$i = A(x,\ y)\,\varepsilon^{-s}(\ln\varepsilon)^{\tau}\, t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\,\frac{(\ln z_2)^{\gamma_2}}{z_2^{p-1}}\,d\theta.$$

Так как [см. (6.13)]

$$z_2 = \frac{1}{2\varepsilon\sin\theta}\{1 + O(\varepsilon)\},$$

то

$$\ln z_2 = -\ln(2\varepsilon\sin\theta) + O(\varepsilon). \qquad (6.16)$$

Поэтому

$$i = A(x,\ y)\,\varepsilon^{-s}(\ln\varepsilon)^{\tau}\, t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\cdot$$

$$\cdot\frac{[-\ln 2\varepsilon - \ln\sin\theta + O(\varepsilon)]^{\gamma_2}}{[1+O(\varepsilon)]^{p-1}}\,O[(\varepsilon\sin\theta)^{p-1}]\,d\theta.$$

Далее,

$$p - 1 = (\beta + m_1 + l_1) - \alpha_1 - 1 \geqslant (\beta + m_1 + l_1) - [(2k + m_1 + l_1) -$$
$$-(\mu + \nu + \alpha)] - 1 = \beta + \alpha + \mu + \nu - (2k+1) \geqslant s.$$

Если $p-1>s$, то очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ $i=o(1)$. Если $p-1=s$, то i можно представить как сумму членов вида (6.14) и слагаемого, которое стремится к нулю вместе с ε. Оставшийся в правой части равенства (6.15) интеграл снова интегрируем по частям и т. д. После γ_2 интегрирований по частям мы получим выражение вида:

$$A(x,\ y)\,\varepsilon^{-s}(\ln\varepsilon)^{\tau}t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\left[\frac{1}{z^{p-1}}\right]_{z=h(\theta)}^{z=z_2}d\theta.$$

Нижний предел и последующее интегрирование по θ даст сумму членов вида (6.14). Верхний предел в случае $p-1>s$ даст слагаемое, которое стремится к нулю вместе с ε, а при $p-1=s$ даст сумму членов вида (6.14) и слагаемое, которое стремится к нулю вместе с ε.

Пусть теперь $p=1$. Так как $p-1\geqslant s$, то в этом случае $s=0$. Поэтому

$$I'_{22}=A(x,\ y)(\ln\varepsilon)^{\tau}t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{h(\theta)}^{z_2}\frac{(\ln z)^{\gamma_2}}{z}dz\right\}d\theta=\frac{1}{\gamma_2+1}A(x,\ y)(\ln\varepsilon)^{\tau}t^{\varkappa}(\ln t)^{\varkappa_1}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\pi}\lambda(\theta)\sin^{2k+\mu+\nu+m-\beta-1}\theta\,[(\ln z)^{\gamma_2+1}]_{z=h(\theta)}^{z=z_2}d\theta.$$

Нижний предел $z=h(\theta)$ дает сумму членов вида (6.14) ($s=0$). Верхний предел и последующее интегрирование по θ даст, в силу (6.16), сумму членов вида (6.14) ($s=0$) и слагаемое, которое стремится к нулю вместе с ε.

На основании предыдущего мы заключаем, что $w_{n-3}^{(i,\ j)}(x,\ y;\ t)$ можно представить в виде суммы членов вида (6.14) и слагаемого, которое стремится к нулю вместе с ε, т. е.

$$w_{n-3}^{(i,\ j)}(x,\ y;\ t)=\sum A(x,y)\frac{t^{\lambda}}{r^{\mu}}(\ln t)^{\nu}(\ln r)^{\sigma}+o(1),\qquad(6.17)$$

где $0\leqslant\mu\leqslant k+j-4$, $\lambda\geqslant\mu+1$, $\nu\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$.

Из разложения (6.17) следует

ЛЕММА 6.1. *Пусть функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно. Тогда для малых t справедливо разложение:*

$$w_{n-3}^{(i,\ j)}(x,\ y;\ t)=\sum\alpha(x,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_{2k})\frac{t^{\lambda}}{r^{\mu}}(\ln t)^{\nu}(\ln r)^{\sigma}+O(1),\qquad(6.18)$$

где $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{2k}$ — полярные углы радиуса-вектора r_{xy}, $0\leqslant\mu\leqslant k+j-4$, $\lambda\geqslant\mu+1$, $\nu\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$, $\alpha(x,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{2k})$ суть целые многочлены от синусов и косинусов углов θ_i.

Доказательство. Если мы разложим коэффициенты $A(x, y)$ по степеням разностей $(y_i - x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и затем выразим эти разности по формулам (2.12), то из формулы (6.17) получим формулу (6.18). Можно показать, что коэффициенты $A(x, y)$ дифференцируемы достаточное число раз.

Замечание. Если мы разложим коэффициенты $A(x, y)$ по степеням разностей $(x_i - y_i)$ и выразим эти разности по формулам (2.13), то получим для $w_{n-3}^{(1, j)}(x, y; t)$ разложение вида (6.18), в котором коэффициенты α зависят от y и полярных углов θ_i^* радиуса-вектора r_{yx}.

2. Имея разложение (6.18), нетрудно получить аналогичное разложение для $w_{n-3}^{(m, j)}(x, y; t)$ при $m > 1$. Мы рассмотрим подробно случай $m = 2$, так как случай произвольного $m > 1$ изучается аналогично.

Мы имеем:

$$w_{n-3}^{(2, j)}(x, y; t) = \frac{1}{\alpha_k} \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} w_{n-3}^{(1, j)}(z, y; t - r')\, N(x, z)\, dz,$$

где $r' = |x - z|$, $r'' = |y - z|$. Подставляя в эту формулу вместо $w_{n-3}^{(1, j)}(z, y; t - r')$ разложение (6.18), в котором коэффициенты α зависят от y и углов θ_i^* (см. замечание), а вместо $N(x, z)$ — разложение (3.4′) или (3.4″), мы представим $w_{n-2}^{(2, j)}(x, y; t)$ в виде суммы членов вида:

$$I = \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \alpha(y, \theta_i^*)\, \beta(x, \theta_i)\, (t - r')^{\lambda} \frac{1}{r''^{\mu}} \cdot \frac{1}{r'^{\nu}} [\ln (t - r')]^{\tau} (\ln r'')^{\sigma} (\ln r')^{\varepsilon}\, dz$$

и ограниченного члена. Положим

$$z_i = t\eta_i, \quad r' = tR', \quad r'' = tR''.$$

Тогда

$$I = t^{\lambda - \mu - \nu + 2k + 1} \int\limits_{R' + R'' \leqslant 1} \alpha(y, \theta_i^*)\, \beta(x, \theta_i)\, (1 - R')^{\lambda} \frac{1}{R''^{\mu}} \frac{1}{R'^{\nu}} \cdot$$

$$\cdot [\ln t + \ln (1 - R')]^{\tau} [\ln t + \ln R'']^{\sigma} [\ln t + \ln R']^{\varepsilon}\, d\eta.$$

Разлагая суммы под знаком интеграла по формуле бинома Ньютона, а $\ln (1 - R')$ — в степенной ряд по степеням R', мы представим I в виде суммы интегралов вида:

$$t^{\varkappa} (\ln t)^{\varkappa_1} \int\limits_{R' + R'' \leqslant 1} \alpha(y, \theta_1^*)\, \beta(x, \theta_i) \frac{1}{R'^{\lambda}} \frac{1}{R''^{\mu}} (\ln R')^{\nu} (\ln R'')^{\sigma}\, d\eta,$$

где $\varkappa \geqslant 4$, $\varkappa_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant k + j$. Асимптотическое поведение последнего интеграла можно изучить так же, как и прежде. В конечном счете мы его представим в виде суммы членов вида (6.14) и слагаемого, которое стремится к нулю вместе с ε. Аналогично можно изучить следующие

итерации $w_{n-3}^{(m,\,j)}(x,\,y;\,t)$. Очевидно, что начиная с некоторого конечного m, $w_{n-3}^{(m,\,j)}(x,\,y;\,t)$ есть ограниченная функция.

Таким образом, мы получили следующую важную теорему.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно. В таком случае для малых t справедливо разложение*

$$w_{n-3}^{(j)}(x,\,y;\,t) = \sum \alpha(x,\,\theta_i)\,\frac{t^\lambda}{r^\mu}(\ln t)^\nu(\ln r)^\sigma + O(1), \tag{6.19}$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant k+j-4$, $\lambda \geqslant \mu+1$, $\nu \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, $r = |x-y| < t$.

3. Вернемся к задаче Коши (1.1)—(1.2′). Полагая в формуле (1.21) $\lambda = n-3$, получим:

$$u(x,\,t) = \frac{\partial^{n-2} v_{n-3}^{(0)}(x,t)}{\partial t^{n-2}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int\limits_{r\leqslant t} w_{n-3}^{(j)}(x,\,y;\,t)\,f(y)\,dy. \tag{6.20}$$

Далее, так же как и в § 4, положим:

$$\sigma_j(x,\,y) = \frac{a_{1,1}^{(j)}}{r^{k+j-i}} + \sigma_i^*(x,\,y),$$

$$v_{n-3}^{(0)}(x,\,t) = z_{n-3}^{(0)}(x,\,t) + \tilde{z}_{n-3}^{(0)}(x,\,t),$$

где

$$z_{n-3}^{(0)}(x,\,t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{1,1}^{(j)}}{\alpha_k} \int\limits_{r\leqslant t} \frac{(t-r)^{k+j-3}}{(k+j-3)!}\,f(y)\,dy$$

соответствует случаю $q(x) \equiv 0$, а

$$\tilde{z}_{n-3}^{(0)}(x,\,t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_k} \int\limits_{r\leqslant t} \sigma_j^*(x,\,y)\,\frac{(t-r)^{k+j-3}}{(k+j-3)!}\,f(y)\,dy = \int\limits_{r\leqslant t} \lambda(x,\,y;\,t)\,f(y)\,dy,$$

где

$$\lambda(x,\,y;\,t) = \frac{1}{\alpha_k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^*(x,\,y)\,\frac{(t-r)^{k+j-3}}{(k+j-3)!}.$$

В силу разложений (3.3) и (3.3′),

$$\lambda(x,\,y;\,t) = \sum \alpha(x,\,\theta_i)\,\frac{t^\lambda}{r^\mu}(\ln r)^\sigma + O(1), \tag{6.21}$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant k+j-4$, $\lambda \geqslant \mu+1$, $\sigma \geqslant 0$.

Из разложений (6.19) и (6.21) следует

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть в окрестности точки x функция $q(y)$ имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно. Тогда решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) для малых t можно представить в виде* *:

* От начальной функции $f(y)$ также следует потребовать существования некоторого числа частных производных [см. (2), стр. 223], однако для наших приложений это несущественно.

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{\partial^{2k-1}}{\partial t^{2k-1}} \int\limits_{r \leqslant t} z(x, y; t) f(y)\, dy, \tag{6.22}$$

где $u_0(x, t)$ *есть решение задачи Коши* (1.1)—(1.2′) *при* $q(x) = 0$, *и*

$$z(x, y; t) = \sum \alpha(x, \theta_i) \frac{t^\lambda}{r^\mu} (\ln t)^\nu (\ln r)^\sigma + O(1), \tag{6.23}$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant 2k - 4$, $\lambda \geqslant \mu + 1$, $\nu \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$.

§ 7. Случай пятимерного пространства

Пятимерный случай, как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, представляет некоторую особенность, впрочем, как мы увидим сейчас, не очень существенную. Пусть $n = 5$, т. е. $k = 2$. Тогда (см. начало предыдущего параграфа)

$$v_3^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_2} \int\limits_{r \leqslant t} \frac{1}{r^2} f(y)\, dy + \frac{1}{\alpha_2} \int\limits_{r \leqslant t} \sigma_2(x, y)(t - r) f(y)\, dy,$$

$$w_3^{(1,2)}(x, y; t) = \frac{1}{\alpha_2} \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \sigma_2(x, z)(t - r' - r'') N(x, z)\, dz,$$

$$w_3^{(1,1)}(x, y; t) = \frac{1}{\alpha_2} \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \frac{1}{r''^2} N(x, z)\, dz = O(1), \tag{7.1}$$

где $r = |x - y|$, $r' = |x - z|$, $r'' = |y - z|$.

Найдем асимптотическое поведение $w_3^{(1,2)}(x, y, t)$. Подставляя разложения (2.4) и (3.2), получим:

$$w_3^{(1,2)}(x, y, t) = C \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \frac{1}{r''^3} \frac{a(x, \theta_i)}{r'^2} (t - r' - r'')\, dz + O(1) =$$

$$= Ct \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \frac{1}{r''^3} \frac{a(x, \theta_i)}{r'^2}\, dz + O(1). \tag{7.2}$$

Полагая $z_i = t\eta_i$ и переходя затем к полярным координатам, найдем:

$$I = \int\limits_{r' + r'' \leqslant t} \frac{1}{r''^3} \frac{a(x, \theta_i)}{r'^2}\, dz = \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \left\{ \int\limits_0^\rho \frac{R'^2\, dR'}{(R'^2 - 2\varepsilon R' \cos\theta + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\theta =$$

$$= \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \sin\theta \left\{ \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{[\cos\theta + z \sin\theta]^2}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz \right\} d\theta =$$

$$= \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \sin\theta \cos^2\theta \left\{ \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\theta +$$

$$+ 2 \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \sin^2\theta \cdot \cos\theta \left\{ \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{z}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz \right\} + \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \sin^3\theta \left\{ \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{z^2}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz \right\} =$$

$$= \int\limits_0^\pi A(x, \theta) \sin^3\theta \left\{ \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{z^2}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz \right\} + O(1), \tag{7.3}$$

где $A(x, \theta)$ есть результат интегрирования $a(x, \theta_i)$ по $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; $R' - \varepsilon \cos\theta = z\varepsilon \cdot \sin\theta$, $z_1 = -\operatorname{ctg}\theta$, $z_2 = -\operatorname{ctg}\theta + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon \sin\theta (1-\varepsilon\cos\theta)}$.

Далее,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} + O(1) = -\ln\varepsilon + O(|\ln\sin\theta|) + O(1).$$

Поэтому

$$I = a(x) \cdot \ln\varepsilon + O(1). \tag{7.4}$$

Из (7.2), (7.3) и (7.4) следует:

$$w_3^{(2,1)}(x, y; t) = ta(x) \cdot \ln\varepsilon + O(1). \tag{7.5}$$

Из (7.1) и (7.5) выводим, что для $m > 1$

$$w_3^{(m,j)}(x, y; t) = O(1).$$

Выделим главный член из $v_3^{(0)}(x, y; t)$. Из разложения (3.2) следует:

$$v_3^{(0)}(x, t) = z_3^{(0)}(x, t) + \int_{r \leqslant t} \lambda(x, y; t) f(y)\, dy,$$

причем $z_0(x, y; t)$ соответствует случаю $q(x) = 0$, и

$$\lambda(x, y; t) = \alpha(x, \theta_1, \ldots, \theta_4) \frac{t}{r} + O(1). \tag{7.6}$$

Из (7.1), (7.5) и (7.6) следует

ТЕОРЕМА 7.1. *Если функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до третьего порядка включительно, то решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) в случае $n = 5$ можно представить в виде:*

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_{r \leqslant t} z(x, y; t) f(y)\, dy, \tag{7.7}$$

где $u_0(x, t)$ есть решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) при $q(x) = 0$, и

$$z(x, y; t) = \alpha_1(x, \theta_1, \ldots, \theta_4) \frac{t}{r} + \alpha_2(x)\, t \ln\frac{r}{t} + O(1). \tag{7.8}$$

§ 8. Применение метода спуска

1. В случае четного $n = 2k$ мы применим метод спуска. Предположим сначала, что $n \geqslant 6$. Случай $n = 4$ изучается аналогично, и мы его кратко рассмотрим в конце параграфа.

Пусть $q(x)$ и $f(x)$ (x — точка E_{2k+1}) не зависят от x_{2k+1}. Положим

$$\rho^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{2k} - y_{2k})^2, \quad r^2 = \rho^2 + (x_{2k+1} - y_{2k+1})^2.$$

Применяя формулу (6.22), получим:

$$u(x, t) = u_0^*(x, t) + \frac{\partial^{2k-1}}{\partial t^{2k-1}} \int_{\rho \leqslant t} z^*(x, y; t) f(y)\, dy, \tag{8.1}$$

где x, y — точки E_{2k}, $dy = dy_1 \ldots dy_{2k}$,

$$z^*(x, y; t) = \int_{-\sqrt{t^2-\rho^2}}^{\sqrt{t^2-\rho^2}} z(x; y_1, y_2 \ldots, y_{2k}; z; t)\, dz \quad (z = y_{2k+1}).$$

Подставляя вместо $z(x, y_1, \ldots, y_{2k}, y_{2k+1}; t)$ разложение (6.23), найдем:

$$z^*(x, y; t) = 2\sum \alpha(x, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})\, t^\lambda (\ln t)^\nu \int_0^{\sqrt{t^2-\rho^2}} \frac{(\ln r)^\sigma}{r^\nu}\, dz + O(t), \quad (8.2)$$

где $\lambda \geqslant \mu + 1$, $\nu \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, $0 \leqslant \mu \leqslant 2k - 4$.

Итак, для того чтобы получить асимптотическое поведение функции $z^*(x, y; t)$ при малых $\varepsilon = \frac{\rho}{t}$, следует изучить асимптотическое поведение интегралов

$$t^\lambda (\ln t)^\nu \int_0^{\sqrt{t^2-\rho^2}} \frac{\left[\frac{1}{2}\ln(\rho^2 + z^2)\right]^\sigma}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{\mu}{2}}}\, dz. \quad (8.3)$$

Положим $z = \rho\zeta$. Тогда интеграл (8.3) примет вид:

$$I = \frac{t^\lambda (\ln t)^\nu}{\rho^{\mu-1}} \int_0^{\sqrt{\left(\frac{t}{\rho}\right)^2-1}} \frac{\left[\ln\rho + \frac{1}{2}\ln(1+\zeta^2)\right]^\sigma}{(1+\zeta^2)^{\frac{\mu}{2}}}\, d\zeta.$$

Раскрывая числитель по формуле бинома Ньютона, мы представим I (с точностью до постоянных множителей) в виде суммы интегралов вида:

$$i = \frac{t^\lambda (\ln t)^\nu (\ln\rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \int_0^T \frac{[\ln(1+\zeta^2)]^\beta}{(1+\zeta^2)^{\frac{\mu}{2}}}\, d\zeta,$$

где $T = \sqrt{\left(\frac{t}{\rho}\right)^2 - 1}$. Если $\frac{\rho}{t} > \theta > 0$ $(0 < \theta < 1)$, то

$$\frac{t}{\rho} < \frac{1}{\theta} = O(1).$$

Следовательно, в этом случае

$$i = O\left\{\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-1} t^{\lambda-\mu-1} (\ln t)^\nu \left[\ln\frac{\rho}{t} + \ln t\right]^\alpha\right\} = O(1). \quad (8.4)$$

Пусть $\frac{\rho}{t} \to 0$ и, значит, $\frac{t}{\rho} \to \infty$. Допустим, сначала, что $\mu = 0$. В этом случае

$$i = t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln\rho)^\alpha \int_0^T [\ln(1+\zeta^2)]^\beta\, d\zeta.$$

Так как для больших ζ

$$\ln(1+\zeta^2) = 2\ln|\zeta| + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

то

$$i = t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln\rho)^\alpha \int_0^T \left[2\ln\zeta + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^\beta d\zeta =$$

$$= 2^\beta t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln\rho)^\alpha \int_0^T (\ln\zeta)^\beta\, d\zeta + O(1).$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^T (\ln \zeta)^\beta \, d\zeta = T (\ln T)^\beta - \beta \int_0^T (\ln \zeta)^{\beta-1} \, d\zeta.$$

Далее,

$$T = \sqrt{\left(\frac{t}{\rho}\right)^2 - 1} = \frac{t}{\rho}\left[1 - \left(\frac{\rho}{t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{\rho}\left[1 + O\left(\frac{\rho^2}{t^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t}\right), \quad \ln T = \ln \frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho^2}{t^2}\right). \tag{8.5}$$

Поэтому

$$T (\ln T)^\beta = \left[\frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t}\right)\right]\left[\ln \frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho^2}{t^2}\right)\right] = \frac{t}{\rho}\left(\ln \frac{t}{\rho}\right)^\beta + O\left(\frac{\rho}{t} \ln \frac{t}{\rho}\right).$$

Следовательно, при $\rho \to 0$ (учитывая, что $\rho < t$), мы получим:

$$i = t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha \left\{\left[\frac{t}{\rho}\left(\ln \frac{t}{\rho}\right)^\beta + O\left(\frac{\rho}{t} \ln \frac{t}{\rho}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \beta \int_0^T (\ln \zeta)^{\beta-1} \, d\zeta\right\} = t^{\lambda+1} (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha \left(\ln \frac{t}{\rho}\right)^\beta -$$

$$- \beta t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha \int_0^T (\ln \zeta)^{\beta-1} \, d\zeta + o(1) = i_1 + i_2 + o(1).$$

i_1 можно представить в виде суммы членов вида:

$$t^{\lambda+1} (\ln t)^{\nu_1} (\ln \rho)^{\alpha_1} \quad (\lambda \geqslant 1, \quad \nu_1 \geqslant 0, \quad \alpha_1 \geqslant 0). \tag{8.6}$$

Оставшийся интеграл i_2 снова интегрируем по частям. Каждый раз мы будем выделять группу членов вида (8.6). После β интегрирований по частям мы придем к интегралу вида:

$$t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha \int_0^T d\zeta = t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha T =$$

$$= t^\lambda (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha \left[\frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t}\right)\right] = t^{\lambda+1} (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha + O(1). \tag{8.7}$$

Пусть теперь $\mu \geqslant 1$. В этом случае для больших ζ

$$\frac{1}{(1+\zeta^2)^{\frac{\mu}{2}}} = \frac{1}{|\zeta|^\mu} + O\left(\frac{1}{|\zeta|^{\mu+2}}\right).$$

Поэтому

$$I = t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \left\{\int_0^1 \ldots d\zeta + \int_1^T \left[2 \ln \zeta + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^\beta \left[\frac{1}{\zeta^\mu} + O\left(\frac{1}{\zeta^{\mu+2}}\right)\right] d\zeta\right\} =$$

$$= C t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} + 2^\beta t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \int_1^T \frac{(\ln \zeta)^\beta}{\zeta^\mu} \, d\zeta +$$

$$+ t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \int_0^T O\left[\frac{\ln \zeta)^\beta}{\zeta^{\mu+2}}\right] d\zeta = I_1 + I_2 + I_3.$$

Рассмотрим сначала I_3. Мы имеем:

$$I_3 = t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \left[\int_0^\infty O\left[\frac{(\ln \zeta)^\beta}{\zeta^{\mu+2}} \right] d\zeta - \int_T^\infty O\left[\frac{(\ln \zeta)^\beta}{\zeta^{\mu+2}} \right] d\zeta \right] = I_{31} + I_{32}.$$

Так как интегралы существуют, то

$$I_{31} = C \frac{t^\lambda}{\rho^{\mu-1}} (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha. \tag{8.8}$$

I_1 также имеет вид (8.8).

Оценим I_{32}. Обозначая через σ сколь угодно малое положительное число и принимая во внимание (8.5), имеем:

$$I_{32} = t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \int_T^\infty O\left(\frac{1}{\zeta^{\mu+2-\sigma}} \right) d\zeta = O\left\{ \frac{1}{T^{\mu+1-\sigma}} t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \right\} =$$

$$= O\left\{ t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \left(\frac{\rho}{t} \right)^{\mu+1-\sigma} \left[1 + O\left(\frac{\rho^2}{t^2} \right) \right] \right\} =$$

$$= O\{ t^{\lambda-\mu-1+\sigma} (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha \rho^{2-\sigma} \} = o(1). \tag{8.9}$$

Нам остается изучить асимптотическое поведение при $\frac{\rho}{t} \to 0$ интеграла

$$I_2 = t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \int_1^T \frac{(\ln \zeta)^\beta}{\zeta^\mu} d\zeta.$$

При $\mu = 1$ мы получим, учитывая (8.5):

$$I_2 = \frac{1}{\beta+1} t^\lambda (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha (\ln T)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} t^\lambda (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha \left[\ln \frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t} \right) \right]^{\beta+1} =$$

$$= \frac{1}{\beta+1} t^\lambda (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha (\ln t - \ln \rho)^{\beta+1} + O\{ t^{\lambda-1} (\ln t)^\nu \rho (\ln \rho)^\alpha \} =$$

$$= \frac{1}{\beta+1} t^\lambda (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha (\ln t - \ln \rho)^{\beta+1} + o(1). \tag{8.10}$$

Пусть теперь $\mu > 1$. Интегрируя по частям, найдем:

$$I_2 = t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \left\{ - \frac{(\ln T)^\beta}{(\mu-1) T^{\mu-1}} + \frac{\beta}{\mu-1} \int_1^T \frac{(\ln \zeta)^{\beta-1}}{\zeta^\mu} d\zeta \right\} = I_{21} + I_{22}.$$

В силу (8.5),

$$I_{21} = - t^\lambda (\ln t)^\nu \frac{(\ln \rho)^\alpha}{\rho^{\mu-1}} \frac{\left[\ln \frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t} \right) \right]^\beta}{(\mu-1) \left(\frac{t}{\rho} \right)^{\mu-1}} \left[1 + O\left(\frac{\rho}{t} \right) \right] =$$

$$= - \frac{1}{\mu-1} t^{\lambda-\mu+1} (\ln t)^\nu (\ln \rho)^\alpha \left(\ln \frac{t}{\rho} \right)^\beta + o(1). \tag{8.11}$$

Интегрируя по частям β раз, мы придем к интегралу вида:

$$t^{\lambda}(\ln t)^{\nu}\frac{(\ln\rho)^{\alpha}}{\rho^{\mu-1}}\int_{1}^{T}\frac{d\zeta}{\zeta^{\mu}}=\frac{1}{\mu-1}t^{\lambda}(\ln t)^{\nu}\frac{(\ln\rho)^{\alpha}}{\rho^{\mu-1}}\left[1-\frac{1}{T^{\mu-1}}\right]-$$

$$-\frac{1}{\mu-1}t^{\lambda}(\ln t)^{\nu}\frac{(\ln\rho)^{\alpha}}{\rho^{\mu-1}}\left\{1-\left(\frac{\rho}{t}\right)^{\mu-1}\left[1+O\left(\frac{\rho}{t}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mu-1}t^{\lambda}(\ln t)^{\nu}\frac{(\ln\rho)^{\alpha}}{\rho^{\mu-1}}-\frac{1}{\mu-1}t^{\lambda-\mu+1}(\ln t)^{\nu}(\ln\rho)^{\alpha}+o(1). \tag{8.12}$$

Из (8.6)—(8.12) следует

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть функция $q(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до $(2n-5)$-го порядка включительно. Тогда решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) в случае четного $n=2k$ для малых t может быть представлено в виде*

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\frac{\partial^{2k-1}}{\partial t^{2k-1}}\int\limits_{\rho<t}z^{*}(x,y;t)f(y)\,dy, \tag{8.13}$$

где $u_0(x,t)$ есть решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) при $q(x)=0$,

$$z^{*}(x,y;t)=\sum\alpha(x,\theta_i)\frac{t^{\lambda}}{\rho^{\mu}}(\ln t)^{\nu}(\ln\rho)^{\sigma}+O(1), \tag{8.14}$$

$\rho=|x-y|$, $\lambda\geqslant\mu+2$, $\nu\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$, *$\alpha(x,\theta_i)$ — ограниченные функции точки x и полярных углов радиуса-вектора ρ_{xy}.*

Замечание. Если мы в § 6 положим $\lambda=n-4$, то решение задачи Коши (1.1)—(1.2′) в случае четного $n=2k$ представится в виде:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\frac{\partial^{2k-2}}{\partial t^{2k-2}}\int\limits_{\rho<t}z^{*}(x,y;t)f(y)\,dy, \tag{8.15}$$

где функция $z^{*}(x,y;t)$ имеет вид (8.14). Однако, в отличие от предыдущего, мы будем иметь $\lambda\geqslant\mu+1$.

2. Рассмотрим случай $n=4$. Применяя к формуле (7.7) метод спуска, мы получим формулу для решения задачи Коши в случае $n=4$:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\frac{\partial^{3}}{\partial t^{3}}\int\limits_{\rho<t}z^{*}(x,y;t)f(y)\,dy, \tag{8.16}$$

где [см. формулу (7.8)]

$$z^{*}(x,y;t)=\alpha_1(x,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\,t\int_{0}^{\sqrt{t^2-\rho^2}}\frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_2(x)\,t\int_{0}^{\sqrt{t^2-\rho^2}}\ln(\rho^2+z^2)\,dz-\alpha_2(x)\,t\ln t\int_{0}^{\sqrt{t^2-\rho^2}}dz+O(t)=$$

$$=I_1+I_2+I_3+O(t).$$

Найдем асимптотическое поведение каждого слагаемого при $\frac{\rho}{t} \to 0$. Мы имеем:

$$I_3 = O(t^2 \ln t) = O(1). \tag{8.17}$$

Полагая $z = \rho\zeta$, получим [см. формулы (8.5)]:

$$t \int_0^{\sqrt{t^2-\rho^2}} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = t \int_0^T \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = t \ln\left(T + \sqrt{1+T^2}\right) =$$

$$= t \ln\left[2\frac{t}{\rho} + O\left(\frac{\rho}{t}\right)\right] = t \ln 2 \frac{t}{\rho} + t \ln\left(1 + O\left(\frac{\rho^2}{t^2}\right)\right) =$$

$$= t \ln \frac{t}{\rho} + O(1), \tag{8.18}$$

$$t \int_0^{\sqrt{t^2-\rho^2}} \ln(\rho^2+z^2)\, dz = 2t \ln \rho \int_0^T d\zeta + t \int_0^T \ln(1+\zeta^2)\, d\zeta =$$

$$= \frac{2t^2}{\rho} \ln \rho + o(1) + t\left[T \ln\left(1+T^2\right) - 2T + 2 \operatorname{arc\,tg} T\right] =$$

$$= \frac{2t^2}{\rho} \ln \rho - \frac{2t^2}{\rho} + O(1). \tag{8.19}$$

Аналогично,

$$\int_0^{\sqrt{t^2-\rho^2}} \ln(\rho^2+z^2)\, dz = \frac{2t}{\rho} \ln t - 2\frac{t}{\rho} + O(1). \tag{8.20}$$

Из (8.17), (8.18), (8.19) и (8.20) следует, что

$$z^*(x, y; t) = \alpha_1(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\, t(\ln t - \ln \rho) +$$

$$+ \alpha_2(x)\left(\frac{t^2}{\rho} \ln t - \frac{t^2}{\rho}\right) + O(1). \tag{8.21}$$

Дополнение

Решение задачи Коши для уравнения $\Delta u - q(x_1, \ldots, x_n)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ по методу С. Л. Соболева

В настоящем дополнении мы изложим более подробно, чем это было сделано в § 1, решение задачи Коши (1.1)—(1.2) по методу С. Л. Соболева.

Обозначим через $u(x, t)$ решение задачи (1.1)—(1.2) и пусть

$$v(x, t) = \frac{1}{(\lambda-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} u(x, \tau)\, d\tau,$$

где $\lambda \geqslant k$.

Как показано в первом параграфе, $v(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$\Delta v - q(x_1, \ldots, x_{2k+1})\, v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} f(x_1, \ldots, x_{2k+1}), \tag{1}$$

$$v\Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) и условий (2) следует:

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\frac{\partial^\lambda v}{\partial t^\lambda}\right|_{t=0} = 0. \tag{2'}$$

Окончательная наша цель состоит в выводе интегрального уравнения (1.7).

Пусть t_0 и $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)})$ фиксированы. Положим

$$t_1 = t - t_0 + r, \quad v(x, t) = v(x, t_1 + t_0 - r) = \bar{v}(x; t_1),$$

где

$$r = \{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \cdots + (x_{2k+1} - x_{2k+1}^{(0)})^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x_i}$ частную производную по x_i при независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$ и через $\frac{D}{Dx_i}$ — частную производную по x_i при независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t_1$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{D\bar{v}}{Dt_1}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{D^2\bar{v}}{Dt_1^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{D\bar{v}}{Dx_i} + \frac{D\bar{v}}{Dt_1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{D\bar{v}}{Dx_i} + \frac{D\bar{v}}{Dt_1}\frac{x_i - x_i^{(0)}}{r},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{D^2\bar{v}}{Dx_i^2} + 2\frac{D^2\bar{v}}{Dx_i Dt_1}\frac{x_i - x_i^{(0)}}{r} + \frac{D^2\bar{v}}{Dt_1^2}\left(\frac{x_i - x_i^{(0)}}{r}\right)^2 + \frac{D\bar{v}}{Dt_1}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}.$$

В результате этой замены уравнение (1) после несложных преобразований примет вид:

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{D^2\bar{v}}{Dx_i^2} - q(x)\bar{v} + 2\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{x_i - x_i^{(0)}}{r}\frac{D^2\bar{v}}{Dx_i Dt_1} + \sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\frac{D\bar{v}}{Dt_1} =$$

$$= -\frac{(t_1 + t_0 - r)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}f(x). \tag{3}$$

Определим операторы $L^{(0)}$ и $D^{(0)}$ при помощи равенств:

$$\left.\begin{aligned} L^{(0)}u &= 2\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{x_i - x_i^{(0)}}{r}\frac{Du}{Dx_i} + \sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}u. \\ D^{(0)}u &= \sum_{i=1}^{2k+1}\frac{D^2u}{Dx_i^2} - q(x)u. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Условимся обозначать через u_s значение $\frac{\partial^s u}{\partial t^s}$ на характеристическом конусе, т. е.

$$u_s(x) = \left.\frac{D^s\bar{u}}{Dt_1^s}\right|_{t_1=0} = \left.\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right|_{t=t^{(0)}-r}. \tag{5}$$

Из (3) и (4), при помощи обозначений (5), следует:

$$D^{(0)}v_0 + L^{(0)}v_1 = -\frac{(t_0-r)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}f(x). \tag{6}$$

Дифференцируя тождество (3) s раз по t и полагая затем $t_1 = 0$ (т. е. $t = t_0 - r$), мы получим:

$$D^{(0)}v_s + L^{(0)}v_{s+1} = -\frac{(t_0-r)^{\lambda-s-1}}{(\lambda-s-1)!}f(x) \quad (s = 1,2,\ldots,k-1). \tag{7}$$

Тождества (6) и (7) можно записать в виде:

$$M_{k-s}\{v_s, v_{s+1}\} = D^{(0)}v_s + L^{(0)}v_{s+1} =$$

$$= -\frac{(t_0-r)^{\lambda-s-1}}{(\lambda-s-1)!}f(x) \quad (s = 0,1,\ldots,k-1). \tag{8}$$

M_{k-s} суть k линейных операций на $(k+1)$ функциях $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Введем в рассмотрение систему $k+1$ линейных операций N_i^* на k функциях $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, сопряженных с операциями M_{k-s}. Операции N_i^* мы получим, интегрируя по частям выражение

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s M_s.$$

Положим

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s M_s = S_1 + S_2, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} L^{(0)}v_s, \\ S_2 &= \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{k-s} D^{(0)}v_s. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} D^{(0)}u &= \Delta u - q(x)u, \\ L^{(0)}u &= 2(\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} u) + \Delta r \cdot u, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то

$$S_1 = \sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} L^{(0)}v_s = \sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1}[2(\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} v_s) + \Delta r \cdot v_s] =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} v_s \cdot \Delta r + 2\sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1}(\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} v_s),$$

а так как

$$(\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} v_s) = -v_s \Delta r + \operatorname{div}(v_s \cdot \operatorname{grad} r),$$

то

$$2\sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1}(\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} v_s) = -2\sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} v_s \Delta r +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} \operatorname{div}(v_s \operatorname{grad} r) = -2\sum_{s=1}^{k} \sigma_{k-s+1} v_s \Delta r -$$

$$- 2\sum_{s=1}^{k} v_s (\operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} \sigma_{k-s+1}) + 2\sum_{s=1}^{k} \operatorname{div}(\sigma_{k-s+1} v_s \operatorname{grad} r).$$

Поэтому

$$S_1 = -\sum_{s=1}^{k} v_s L^{(0)} \sigma_{k-s+1} + 2\sum_{s=1}^{k} \operatorname{div}(\sigma_{k-s+1} v_s \operatorname{grad} r). \tag{12}$$

Аналогично,

$$S_2 = \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{k-s} D^{(0)} v_s = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j D^{(0)} v_{k-j} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \{\Delta v_{k-j} - q(x)\, v_{k-j}\} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k} \sigma_j q(x)\, v_{k-j} + \sum_{j=1}^{k} v_{k-j} \Delta \sigma_j + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}\{\sigma_j \operatorname{grad} v_{k-j} - v_{k-j} \operatorname{grad} \sigma_j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} v_{k-j} D^{(0)} \sigma_j + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}\{\sigma_j \operatorname{grad} v_{k-j} - v_{k-j} \operatorname{grad} \sigma_j\}. \tag{13}$$

Из (9), (10), (12) и (13) следует, на основании определения сопряженных операторов, что

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s M_s - \sum_{j=0}^{k} v_j N_j^* = \sum_{s=1}^{k} [\sigma_{k-s+1} L^{(0)} v_s - v_s(-L^{(0)} \sigma_{k-s+1})] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} (\sigma_j D^{(0)} v_{k-j} - v_{k-j} D^{(0)} \sigma_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}(\sigma_j \operatorname{grad} v_{k-j} - v_{k-j} \operatorname{grad} \sigma_j + 2\sigma_{k-j+1} v_j \operatorname{grad} r). \tag{14}$$

Из этого тождества выводим:

$$\sum_{j=0}^{k} v_j^* N_j^* = -\sum_{s=1}^{k} v_s L^{(0)} \sigma_{k-s+1} + \sum_{j=1}^{k} v_{k-j} D^{(0)} \sigma_j,$$

или

$$v_0 N_0^* + v_1 N_1^* + \ldots + v_k N_k^* = v_0 D^{(0)} \sigma_k + v_1 [-L^{(0)} \sigma_k + D^{(0)} \sigma_{k-1}] +$$

$$+ v_2 [-L^{(0)} \sigma_{k-1} + D^{(0)} \sigma_{k-2}] + \ldots + v_{k-1} [-L^{(0)} \sigma_2 + D^{(0)} \sigma_1] + v_k [-L^{(0)} \sigma_1].$$

Определим функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} N_k^* &= -L^{(0)}\sigma_1 = 0,\\ N_{k-1}^* &= -L^{(0)}\sigma_2 + D^{(0)}\sigma_1 = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ N_2^* &= -L^{(0)}\sigma_{k-1} + D^{(0)}\sigma_{k-2} = 0,\\ N_1^* &= -L^{(0)}\sigma_k + D^{(0)}\sigma_{k-1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Так как второе из уравнений (15) можно записать в виде

$$L^{(0)}(u) = 2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2k}{r}u,$$

то систему (15) можно записать в виде ($r = |x - x^0|$)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_1 = 0,\\ &2\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_2\right) = \Delta\sigma_1 - q(x)\sigma_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &2\left(\frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_{k-1}\right) = \Delta\sigma_{k-2} - q(x)\sigma_{k-2},\\ &2\left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_k\right) = \Delta\sigma_{k-1} - q(x)\sigma_{k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Покажем, что функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ можно выбрать так, чтобы каждая из них представлялась в виде

$$\sigma_{k-l} = \frac{2^l\Gamma(2k-l-1)\Gamma(k)}{\Gamma(l+1)\Gamma(2k-1)\Gamma(k-l)}\,\frac{1}{r^{2k-l-1}}\,[1 + r\Psi_l], \tag{17}$$

где Ψ_l — ограниченная функция r и полярных углов $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$.

Действительно, первое из уравнений (16) дает:

$$\sigma_1 = \chi(\theta_1, \ldots, \theta_{2k})\, e^{-\int \frac{k}{r}dr} = \chi(\theta_1, \ldots, \theta_{2k})\,\frac{1}{r^k}.$$

Полагая

$$\chi(\theta_1, \ldots, \theta_{2k}) = \frac{2^{k-1}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)},$$

мы получим наше утверждение для σ_1. Формулу (17) для любого l мы докажем при помощи математической индукции. Уравнение для σ_{k-l} имеет вид:

$$2\left[\frac{\partial \sigma_{k-l}}{\partial r} + \frac{k}{r}\sigma_{k-l}\right] = \chi_{k-l}(r;\ \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \tag{18}$$

где

$$\chi_{k-l}(r;\ \theta_1, \ldots, \theta_{2k}) = \Delta\sigma_{k-l-1} - q(x)\sigma_{k-l-1}.$$

Разделив обе части уравнения (18) на $2\sigma_1$ и интегрируя, мы получим:

$$\sigma_{k-l} = \sigma_1 \int \frac{\chi_{k-l}}{2\sigma_1}\, dr. \tag{19}$$

Из формулы (17) следует, что главный член функции χ_{k-l} равен

$$-\frac{2^{l+1}\Gamma(2k-l-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l-1)} \int \frac{1}{r^{2k-l}}\,.$$

Поэтому из формулы (19) выводим, что главный член функции σ_{k-l} есть

$$-\frac{1}{r^k}\frac{2^{l+1}\Gamma(k)\,\Gamma(2k-l-1)}{2\Gamma(2k-1)\,\Gamma(l+1)\,\Gamma(k-l-1)} \int \frac{r^k}{r^{2k-l}}\, dr =$$

$$= \frac{2^l \Gamma(2k-l-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l)} \int \frac{1}{r^{2k-l-1}}\,,$$

что доказывает формулу (17).

Оценим главный член N_0^*. Мы имеем:

$$N_0^* = \Delta\sigma_k - q(x)\,\sigma_k.$$

Так как

$$\sigma_k = \frac{1}{r^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{r^{2k-2}}\right)$$

и

$$\Delta \frac{1}{r^{2k-1}} = 0,$$

то

$$N_0^* = O\left(\frac{1}{r^{2k}}\right). \tag{20}$$

Из (8), (14) и (15) следует тождество:

$$-\sum_{j=1}^{k} \sigma_j(x_0, x)\frac{(t^{(0)}-r)^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} f(x) - N_0^*(x_0,\ x)\, v(x,\ t^{0)}-r) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}(\sigma_j \operatorname{grad} v_{k-j} - v_{k-j} \operatorname{grad}\sigma_j + 2\sigma_{k-j+1}\operatorname{grad} r). \tag{21}$$

Обозначим через D_0 сферу в E_{2k+1} радиуса t^0 с центром в точке x^0 и через D_ε — сферу радиуса ε с центром в точке x^0. Интегрируя тождество (21) по области $D_0' = D_0 - D_\varepsilon$, мы получим:

$$-\int_{D_0'} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(x^0, x)\frac{(t^0-r)^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda+j-k-1)!} f(x)\, dx - \int_{D_0'} N_0^*(x^0,\ x)\, v(x;\ t^0-r)\, dx =$$

$$= \int\limits_{r=t_0} \sum_{j=1}^{k} \left(\sigma_j \frac{\partial v_{k-j}}{\partial n} - v_{k-j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial n} + 2\sigma_{k-j+1} v_j \frac{\partial r}{\partial n} \right) \widetilde{dx} +$$

$$+ \int\limits_{D_\varepsilon} \sum_{j=1}^{k} \left(\sigma_j \frac{\partial v_{k-j}}{\partial n} - v_{k-j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial n} + 2\sigma_{k-j+1} v_j \frac{\partial r}{\partial n} \right) \widetilde{dx}, \qquad (22)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей область D_0'. Интеграл по поверхности $r = t^0$ обращается в нуль в силу начальных условий (2) и (2′).

Перейдем в равенстве (22) к пределу, полагая $\varepsilon \to 0$.

Из оценки (17) легко следует, что отличный от нуля предел получится лишь в том члене, который содержит $\frac{\partial \sigma_k}{\partial n}$. Именно этот предел равен

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} v_0 \frac{\partial \sigma_k}{\partial n} \widetilde{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} v_0 \frac{\partial \sigma_k}{\partial r} \widetilde{dx}.$$

Но из (17) следует, что

$$\sigma_k = \frac{1}{r^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{r^{2k-1}}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial r} = -\frac{(2k-1)}{r^{2k}} + O\left(\frac{1}{r^{2k-1}}\right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} v_0 \frac{\partial \sigma_k}{\partial r} \widetilde{dx} = -(2k-1)\,\omega_{2k+1} v(x^0, t^0), \qquad (23)$$

где

$$\omega_{2k+1} = 2 \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}$$

есть площадь поверхности единичной сферы в E_{2k+1}.

Подставляя (23) в уравнение (22), после несложных преобразований получим:

$$v(x^0; t^0) = \frac{1}{(2k-1)\,\omega_{2k+1}} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{r \leqslant t^0} \sigma_j(x^0, x) \frac{(t^0 - r)^{\lambda+j-k-1}}{(\lambda + j - k - 1)!} f(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{(2k-1)\,\omega_{2k+1}} \int\limits_{r \leqslant t^0} v(x, t^0 - r) N_0^*(x^0, x)\, dx. \qquad (24)$$

Интегральные уравнения (24) и (1.7) отличаются лишь обозначениями.

Поступило
28.XII.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$, Труды Моск. мат. об-ва, т. IV (1955), 237—290.

[2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. ун-та, 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 377—384

Н. П. ВЕКУА

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ КАРЛЕМАНА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* Н. И. Мусхелишвили)

В работе рассматривается одна граничная задача теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, представляющая собой некоторое обобщение известной граничной задачи Карлемана.

§ 1. Введение. Пусть D^+ — конечная область на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L. Через D^- мы будем обозначать область, дополняющую $D^+ + L$ до полной плоскости, и считать, что начало координат находится в D^+. За положительное направление на L принимаем то, которое оставляет область D^+ слева. Будем предполагать, далее, что угол, составляемый касательной к L с постоянным направлением, удовлетворяет условию H (Гельдера).

Пусть $\alpha(t)$ — заданная на контуре L функция, имеющая отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию H, и пусть $\alpha(t)$ взаимно однозначно переводит контур L в самого себя, причем t и $\alpha(t)$ описывают его в противоположных направлениях.

Функцию $\Phi(z)$ будем называть мероморфной в области D^+, если она голоморфна всюду в D^+, кроме, быть может, конечного числа точек, являющихся ее полюсами, и если она непрерывно продолжима всюду на L.

В настоящей работе мы рассматриваем следующую задачу:

Найти вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, *мероморфный в области* D^+, *по граничному условию:*

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = A(t_0)\,\Phi^+(t_0) + B(t_0)\,\overline{\Phi^+(t_0)} + g(t_0), \tag{1.1}$$

где

$$A(t_0) = \|A_{kl}(t_0)\|, \quad B(t_0) = \|B_{kl}(t_0)\| \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

— заданные матрицы, удовлетворяющие условию H, $g(t_0) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *— заданный вектор, также удовлетворяющий условию* H, $\Phi^+(t_0)$ *обозначает граничное значение вектора* $\Phi(z)$ *на контуре* L, *от которого мы будем требовать, чтобы он удовлетворял условию* H.

Мы будем предполагать далее, что $\det G(t_0)$ отличен от нуля всюду на L.

Из этой граничной задачи при $B(t_0) \equiv 0$ получается известная граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций, рассмотренная нами в работе [1] (§ 7—10).

Будем, как и Карлеман [2]*, предполагать, что

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t. \tag{1.2}$$

В силу (1.2), очевидно, будем иметь:

$$\alpha'[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = 1. \tag{1.3}$$

§ 2. Однородная задача. Рассмотрим сперва однородную задачу, соответствующую задаче (1.1):

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = A(t_0)\,\Phi^+(t_0) + B(t_0)\,\overline{\Phi^+(t_0)}. \tag{2.1}$$

В силу (1.2), заключаем, что для разрешимости задачи (2.1) естественно потребовать выполнения следующих условий:

$$A(t_0)\,A[\alpha(t_0)] + B(t_0)\,\overline{B[\alpha(t_0)]} = E, \tag{2.2}$$

$$A(t_0)\,B[\alpha(t_0)] + B(t_0)\,\overline{A[\alpha(t_0)]} = 0, \tag{2.3}$$

где E — единичная матрица. Ниже будет показано, что эти условия достаточны для разрешимости задачи (2.1).

Будем искать решения задачи (2.1) в следующем виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma(t)\,dt}{t-z} + R(z), \tag{2.4}$$

где $\sigma(t)$ — искомый вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\sigma[\alpha(t_0)] = A(t_0)\,\sigma(t_0) + B(t_0)\,\overline{\sigma(t_0)}, \tag{2.5}$$

а $R(z)$ — заданная главная часть искомого вектора $\Phi(z)$ в области D_+ (компоненты вектора $R(z)$ представляют собою рациональные функции, исчезающие на бесконечности).

Очевидно, что любое решение задачи (2.1) представимо формулой (2.4), в которой $\sigma(t)$ удовлетворяет условию (2.5).

Вычисляя граничные значения $\Phi^+[\alpha(t_0)]$, $\Phi^+(t_0)$, $\overline{\Phi^+(t_0)}$, подставляя их в (2.1) и принимая во внимание (2.5), мы получим сингулярное интегральное уравнение нормального типа (содержащее кроме искомого вектора $\sigma(t)$ его комплексно сопряженный вектор $\overline{\sigma(t)}$):

$$K_{\sigma^-} \equiv \int_L \left[\frac{A(t)\,\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} + \frac{A(t_0)}{t-t_0}\right]\sigma(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(t)\,B(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} - \frac{K(t_0,\,t)\,B(t_0)}{t-t_0}\right]\overline{\sigma(t)}\,dt =$$

$$= R[\alpha(t_0)] - A(t_0)\,R(t_0) - B(t_0)\,\overline{R(t_0)}, \tag{2.6}$$

* Карлеман рассматривал однородную задачу $\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)\,\Phi^+(t)$ при $n = 1$ и $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$.

где

$$K(t_0, t) = \frac{t - t_0}{\overline{t - t_0}}\, \overline{t'}^2 = 1 - 2i \frac{d\vartheta}{dt}(t - t_0),$$

причем $t' = \frac{dt}{ds}$ (s — дуговая абсцисса точки t), $\vartheta = \arg(t - t_0)$. Уравнения такого типа рассмотрены в работе ([3]), где показано, что для уравнения вида (2.6) имеют место теоремы, аналогичные известным теоремам Нетера.

Очевидно, что если $\sigma(t_0)$ — решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условию (2.5), то вектор $\Phi(z)$, определенный формулой (2.4), дает решение граничной задачи (2.1). Покажем, что имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Если* $\sigma(t_0)$ — *решение уравнения* (2.6), *то вектор* $\sigma_0(t_0)$, *определенный формулой*

$$\sigma_0(t_0) = A[\alpha(t_0)]\,\sigma[\alpha(t_0)] + B[\alpha(t_0)]\,\overline{\sigma[\alpha(t_0)]},$$

будет решением того же уравнения (2.6).

В самом деле, пусть $\sigma(t_0)$ — решение уравнения (2.6) и пусть

$$\omega(t_0) = R[\alpha(t_0)] - A(t_0)\,R(t_0) - B(t_0)\,\overline{R(t_0)}.$$

На основании (2.2) и (2.3) легко проверить, что для любого $R(t_0)$ имеет место равенство

$$\omega(t_0) = -\{A(t_0)\,\omega[\alpha(t_0)] + B(t_0)\,\overline{\omega[\alpha(t_0)]}\}. \tag{2.7}$$

Так как $K_\sigma = \omega(t_0)$, то будем иметь:

$$\omega[\alpha(t_0)] = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{A[\alpha(t)]}{t - t_0} + \frac{A[\alpha(t_0)]\,\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\right\}\sigma[\alpha(t)]\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{B[\alpha(t)]}{t - t_0} - \frac{B[\alpha(t_0)]\,K[\alpha(t_0), \alpha(t)]\,\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\right\}\overline{\sigma[\alpha(t)]}\,dt,$$

$$\overline{\omega[\alpha(t_0)]} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\overline{A[\alpha(t)]}}{\overline{t - t_0}} + \frac{\overline{A[\alpha(t_0)]}\,\overline{\alpha'(t)}}{\overline{\alpha(t) - \alpha(t_0)}}\right\}\overline{\sigma[\alpha(t)]}\,\overline{t'}^2\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\overline{B[\alpha(t)]}}{\overline{t - t_0}} - \frac{\overline{B[\alpha(t_0)]}\,\overline{K[\alpha(t_0), \alpha(t)]}}{\overline{\alpha(t) - \alpha(t_0)}}\right\}\sigma[\alpha(t)]\,\overline{t'}^2 dt.$$

Подставляя эти значения в (2.7), получим:

$$\omega(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{A(t_0)\,A[\alpha(t)]}{t - t_0} + \frac{A(t_0)\,A[\alpha(t_0)]\,\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} - \frac{B(t_0)\,\overline{B[\alpha(t)]}\,\overline{t'}^2}{\overline{t - t_0}} +\right.$$

$$\left. + \frac{B(t_0)\,\overline{B[\alpha(t_0)]}\,\overline{K[\alpha(t_0), \alpha(t)]}\,\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'}^2}{\overline{\alpha(t) - \alpha(t_0)}}\right\}\sigma[\alpha(t)]\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{A(t_0)\,B[\alpha(t)]}{t - t_0} - \frac{A(t_0)\,B[\alpha(t_0)]\,K[\alpha(t_0), \alpha(t)]\,\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} -\right.$$

$$\left. - \frac{B(t_0)\,\overline{A[\alpha(t)]}\,\overline{t'}^2}{\overline{t - t_0}} - \frac{B(t_0)\,\overline{A[\alpha(t_0)]}\,\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'}^2}{\overline{\alpha(t) - \alpha(t_0)}}\right\}\overline{\sigma[\alpha(t)]}\,dt. \tag{2.8}$$

Принимая во внимание условия (2.2), (2.3) и следующие легко проверяемые равенства:

$$\frac{\overline{K[\alpha(t_0),\alpha(t)]}\,\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'^2}}{\overline{\alpha(t)}-\overline{\alpha(t_0)}}=\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)},$$

$$\frac{K(t_0,t)}{t-t_0}=\frac{\overline{t'^2}}{\overline{t}-\overline{t_0}},\qquad \frac{d\alpha(t)}{d\alpha(t)}\alpha'(t)=\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'^2},$$

$$\frac{K[\alpha(t_0),\alpha(t)]}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\alpha'(t)=\frac{\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'^2}}{\overline{\alpha(t)}-\overline{\alpha(t_0)}},$$

убедимся, что (2.8) можно переписать так:

$$\omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{A(t)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}+\frac{A(t_0)}{t-t_0}\right](A[\alpha(t)]\sigma[\alpha(t)]+B[\alpha(t)]\overline{\sigma[\alpha(t)]})\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{B(t)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}-\frac{K(t_0,t)B(t_0)}{t-t_0}\right]\overline{(A[\alpha(t)]\sigma[\alpha(t)]+\overline{B[\alpha(t)]}\,\sigma[\alpha(t)])}\,dt,$$

и наша лемма доказана.

В силу этой леммы заключаем, что если $\sigma(t)$ — решение уравнения (2.6), то вектор $\rho(t)$, определенный формулой

$$\rho(t)=\frac{1}{2}\{\sigma(t)+A[\alpha(t)]\sigma[\alpha(t)]+B[\alpha(t)]\overline{\sigma[\alpha(t)]}\},\tag{2.9}$$

будет решением того же уравнения. Заметим, что если $\sigma(t)$ удовлетворяет условию (2.5), то

$$\rho(t)=\sigma(t).$$

В силу (2.2), (2.3) легко проверить, что $\rho(t)$ удовлетворяет условию (2.5):

$$\rho[\alpha(t_0)]=A(t_0)\rho(t_0)+B(t_0)\overline{\rho(t_0)}.$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму:

ЛЕММА 2. *Если $\sigma(t)$ — решение уравнения* (2.6), *то вектор*

$$\Phi(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\sigma(t)+A[\alpha(t)]\sigma[\alpha(t)]+B[\alpha(t)]\overline{\sigma[\alpha(t)]}}{t-z}\,dt+R(z)\tag{2.10}$$

представляет собою некоторое решение граничной задачи (2.1).

Нетрудно видеть, далее, что все решения задачи (2.1) можно получить указанным выше путем.

§ 3. Исследование уравнения (2.6). Установим условия разрешимости уравнения (2.6). Рассмотрим с этой целью граничную задачу: найти два вектора $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, голоморфные в D^+ и непрерывные в D^++L, по граничному условию:

$$\Psi_1^+(t_0)=\alpha'(t_0)A'(t_0)\Psi_2^+[\alpha(t_0)]+\overline{B'(t_0)\alpha'(t_0)}\,\overline{t_0'^2}\,\overline{\Psi_2^+[\alpha(t_0)]},\tag{3.1}$$

где $A'(t_0)$ и $B'(t_0)$ — матрицы, транспонированные к $A(t_0)$ и $B(t_0)$ соответственно. Задачу (3.1) будем называть задачей, *союзной* задаче (2.1).

Граничная задача вида (3.1) рассмотрена в работе [4]. На основе результатов этой работы можно утверждать, что *существует натуральное число r такое, что порядок нуля в точке $z = 0$ любого решения задачи* (3.1) *меньше r.*

Будем искать голоморфные решения этой задачи в следующем виде:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A'(t)\,\nu(t) + \overline{B'(t')}\,\overline{t'^2}\,\overline{\nu(t)}}{t - z}\,dt,$$
$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)]}{t - z}\,dt, \tag{3.2}$$

где $\nu(t)$ — искомый вектор, от которого мы будем требовать, чтобы он удовлетворял условию H.

Нетрудно показать, что каждое голоморфное решение задачи (3.1) представимо в виде (3.2).

Очевидно, будем иметь:

$$\Phi_1^+(t_0) = \frac{A'(t_0)\,\nu(t_0) + \overline{B'(t_0)}\,\overline{t_0'^2}\,\overline{\nu(t_0)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A'(t)\,\nu(t) + \overline{B'(t)}\,\overline{t'^2}\,\overline{\nu(t)}}{t - t_0}\,dt,$$

$$\overline{\Phi_2^+[\alpha(t_0)]} = \frac{\overline{\nu(t_0)}}{2\,\overline{\alpha'(t_0)}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\nu(t)}\,\overline{t'^2}}{\overline{\alpha(t)} - \overline{\alpha(t_0)}}\,dt,$$

$$\Phi_2^+[\alpha(t_0)] = \frac{\nu(t_0)}{2\alpha'(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}.$$

Подставляя эти значения в (3.1), получаем относительно $\nu(t)$ уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{A'(t)}{t - t_0} + \frac{\alpha'(t_0)\,A'(t_0)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\right]\nu(t)\,dt -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\overline{B'(t_0)}\,\overline{t_0'^2}\,\overline{\alpha'(t_0)}\,\overline{t'^2}}{\overline{\alpha(t)} - \overline{\alpha(t_0)}} - \frac{\overline{B'(t)}\,\overline{t'^2}}{t - t_0}\right]\overline{\nu(t)}\,dt = 0, \tag{3.3}$$

представляющее собой союзное однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.6) [см. [3]].

На основе результатов работы [3] необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (2.6) имеет вид:

$$\mathrm{Re}\int_L \{R[\alpha(t)] - A(t)\,R(t) - B(t)\,\overline{R(t)}\}\,\nu(t)\,dt = 0, \tag{3.4}$$

где $\nu(t)$ — любое решение уравнения (3.3).

Будем сначала считать, что задача (3.1) не имеет голоморфных решений. Тогда, в силу (3.2), легко получаем:

$$\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)] = \Omega_1^-(t), \tag{3.5}$$
$$A'(t)\,\nu(t) + \overline{B'(t)}\,\overline{t'^2}\,\overline{\nu(t)} = \Omega_2^-(t), \tag{3.6}$$

где $\Omega_1^-(t)$, $\Omega_2^-(t)$ — граничные значения векторов $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, голоморфных в D^- и исчезающих на бесконечности.

В силу (3.5), находим:

$$\int_L R[\alpha(t)]\,\nu(t)\,dt = \int_L R[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\Omega_1^-[\alpha(t)]\,dt = \int_L R(\tau)\,\Omega_1^-(\tau)\,d\tau = 0.$$

Далее, легко получить, что

$$\operatorname{Re}\int_L [A(t)\,R(t) + B(t)\,\overline{R(t)}]\,\nu(t)\,dt =$$

$$= Re\int_L A'(t)\,\nu(t)\cdot R(t)\,dt + \operatorname{Re}\int_L B'(t)\,\nu(t)\cdot\overline{R(t)}\,dt =$$

$$= \operatorname{Re}\int_L [A'(t)\,\nu(t) + \overline{B'(t)\,t'^2\,\nu(t)}]\,R(t)\,dt,$$

и, в силу (3.6), имеем:

$$\operatorname{Re}\int_L [A(t)\,R(t) + B(t)\,\overline{R(t)}]\,\nu(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_L \Omega_1^-(t)\,R(t)\,dt = 0.$$

Таким образом, условие (3.4) выполнено.

Принимая во внимание лемму 2, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если задача* (3.1), *союзная задаче* (2.1), *не имеет голоморфных решений, то уравнение* (2.6) *всегда разрешимо, и вектор* $\Phi(z)$, *представленный* (*при помощи решения этого уравнения*) *формулой* (2.10), *дает решение исходной задачи* (2.1), *причем таким путем можно получить все решения задачи* (2.1).

Перейдем теперь к общему случаю, когда условие нашей теоремы может быть не соблюдено.

Рассмотрим задачу:

$$\varphi^+[\alpha(t_0)] = [\alpha(t_0)]^r\,t_0^{-r}A(t_0)\,\varphi^-(t_0) + [\alpha(t_0)]^r B(t_0)\,(\overline{t_0})^{-r}\,\overline{\varphi^+(t_0)}, \qquad (3.7)$$

где r — натуральное число, упомянутое в начале этого параграфа.

Введя обозначения:

$$A_0(t_0) = [\alpha(t_0)]^r\,t_0^{-r}A(t_0), \quad B_0(t_0) = [\alpha(t_0)]^r\,(\overline{t_0})^{-r}B(t_0),$$

граничное условие (3.7) можно переписать так:

$$\varphi^+[\alpha(t_0)] = A_0(t_0)\,\varphi^+(t_0) + B_0(t_0)\,\overline{\varphi^+(t_0)}. \qquad (3.8)$$

Принимая во внимание (2.2) и (2.3), легко заключаем, что $A_0(t_0)$, $B_0(t_0)$ удовлетворяют условиям:

$$A_0(t_0)\,A_0[\alpha(t_0)] + B_0(t_0)\,\overline{B_0[\alpha(t_0)]} = E,$$

$$A_0(t_0)\,B_0[\alpha(t_0)] + B_0(t_0)\,\overline{A_0[\alpha(t_0)]} = 0.$$

Таким образом, для задачи (3.8) соблюдены те же условия разрешимости, что и для исходной задачи (2.1).

Очевидно, что задача, союзная с задачей (3.8), имеет вид:

$$t_0^r\psi_1^+(t_0) = \alpha'(t_0)\,A'(t_0)\,[\alpha(t_0)]'\,\psi_2^+[\alpha(t_0)] + \overline{t'^2_0}\,\alpha'(t_0)\,\overline{B'(t_0)}\,\overline{[\alpha(t_0)]'\psi_2^+[\alpha(t_0)]}.$$

Эта задача, как легко видеть, не может иметь голоморфных решений и, таким образом, для задачи (3.7) условие нашей теоремы соблюдено.

Очевидно, далее, что если $\varphi(z)$ — решение задачи (3.7), то

$$\Phi(z) = z^{-r}\varphi(z)$$

будет некоторым решением задачи (2.1).

§ 4. Неоднородная задача. Рассмотрим теперь неоднородную задачу:

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = A(t_0)\Phi^+(t_0) + B(t_0)\overline{\Phi^+(t_0)} + g(t_0), \tag{4.1}$$

где $A(t_0)$, $B(t_0)$ попрежнему удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} A(t_0)A[\alpha(t_0)] + B(t_0)\overline{B[\alpha(t_0)]} &= E, \\ A(t_0)B[\alpha(t_0)] + B(t_0)\overline{A[\alpha(t_0)]} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В силу (1.2) и (4.2), легко заключаем, что для разрешимости задачи (4.1) необходимо, чтобы вектор $g(t_0)$ удовлетворял условию:

$$A(t_0)g[\alpha(t_0)] + B(t_0)\overline{g[\alpha(t_0)]} + g(t_0) = 0. \tag{4.3}$$

Будем искать решения задачи (4.1) в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + R(z),$$

где $\mu(t)$ — искомый вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\mu[\alpha(t)] = A(t)\mu(t) + B(t)\overline{\mu(t)} + g(t). \tag{4.4}$$

Очевидно, все решения задачи (4.1) представимы таким образом.

Поступая далее так, как выше, получаем относительно $\mu(t)$ уравнение, отличающееся от уравнения (2.6) лишь правой частью:

$$K_\mu = H^-[\alpha(t_0)] + R[\alpha(t_0)] - A(t_0)R(t_0) - B(t_0)\overline{R(t_0)}, \tag{4.5}$$

где

$$H^-[\alpha(t_0)] = -\frac{g(t_0)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\alpha'(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}.$$

Очевидно, $H^-(t)$ представляет собой граничное значение на L вектора

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g[\alpha(t)]\,dt}{t-z}$$

из области D^-.

Поступая далее так, как при доказательстве леммы 1, легко убедимся в справедливости следующего предложения:

Если $\mu(t)$ — решение уравнения (4.5), то вектор

$$\mu_0(t_0) = A[\alpha(t_0)]\mu[\alpha(t_0)] + B[\alpha(t_0)]\overline{\mu[\alpha(t_0)]} + g[\alpha(t_0)]$$

будет некоторым решением того же уравнения.

В силу (4.2) и (4.3), нетрудно проверить, что вектор

$$\rho(t_0) = \frac{1}{2}\{\mu(t_0) + A[\alpha(t_0)]\mu[\alpha(t_0)] + B[\alpha(t_0)]\overline{\mu[\alpha(t_0)]} + g[\alpha(t_0)]\},$$

являющийся решением уравнения (4.5), удовлетворяет условию (4.4).

Таким образом, если $\mu(t)$ *— решение уравнения* (4.5), *то вектор*

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\mu(t) + A[\alpha(t)]\,\mu[\alpha(t)] + B[\alpha(t)]\,\overline{\mu[\alpha(t)]} + g[\alpha(t)]}{t - z}\,dt + R(z)$$

является решением неоднородной задачи (4.1).

Легко видеть далее, что все решения задачи (4.1) можно получить указанным выше способом.

Условие разрешимости уравнения (4.5) имеет вид:

$$\operatorname{Re}\int_L \{H^-[\alpha(t)] + R[\alpha(t)] - A(t)\,R(t) - B(t)\,\overline{R(t)}\}\,\nu(t)\,dt = 0,$$

где $\nu(t)$ — любое решение союзного однородного уравнения (3.3).

Легко видеть, далее, что *если задача* (3.1) *не имеет голоморфных решений, то это условие соблюдено и уравнение* (4.5) *всегда разрешимо.*

Рассмотрим теперь случай, когда задача (3.1) может иметь голоморфные решения. Как легко видеть, для задачи:

$$\varphi^+[\alpha(t_0)] = [\alpha(t_0)]^r t_0^{-r} A(t_0)\,\varphi^+(t_0) + [\alpha(t_0)]^r (\bar{t}_0)^{-r} B(t_0)\,\overline{\varphi^+(t_0)} + [\alpha(t_0)]^r g(t_0) \quad (4.6)$$

соблюдены условия приведенного выше предложения.

Далее, если $\varphi(z)$ — решение задачи (4.6), то

$$\Phi(z) = z^{-r}\varphi(z)$$

будет решением задачи (4.1).

Поступило
31.III.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа Н. П., Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 16 (1952), 157—180.

[2] Carleman T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. mathem. Kongr., Zürich, B. I, 1932.

[3] Манджавидзе Г. Ф., Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. Ак. наук Груз. ССР, 11, № 6 (1950), 355—360.

[4] Александрия Г. Н., Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. Ак. наук Груз. ССР, XIV, № 2 (1953), 65—70.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 385—412

С. Б. СТЕЧКИН

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(ТРЕТЬЕ СООБЩЕНИЕ)

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе обобщаются и уточняются известные результаты Сидона [9], [10], [12], [13] об абсолютной сходимости лакунарных рядов Фурье.

Введение

В 1906 г. П. Фату [2] установил, что если тригонометрический ряд

$$\mathfrak{T}(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x)$$

сходится в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$, а возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ является достаточно редкой, то ряд $\mathfrak{T}(x)$ абсолютно сходится, т. е.

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty.$$

Впоследствии А. Зигмунд [см. [18] или [17], § 5.7.10] отметил, что рассуждения Фату проходят в том случае, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \mu > 3 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Этот результат Фату получил развитие в нескольких различных направлениях.

Прежде всего, С. Сидон [9], [10] [см. также [17], § 6.4, где, впрочем, результат Сидона приведен не полностью и [14]] доказал такую теорему:

ТЕОРЕМА СИДОНА (А). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ее ряд Фурье является лакунарным, т. е. имеет вид*

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x), \tag{0.1}$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то этот ряд абсолютно сходится.

Позже С. Сидон [13] установил следующее более общее предложение:

ТЕОРЕМА СИДОНА (В). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ее ряд Фурье имеет вид* (0.1), *где последовательность $\{n_k\}$ разбивается на конечное число лакунарных, то этот ряд абсолютно сходится* *.

---

* Доказательство этой теоремы, данное Сидоном, не безупречно.

При доказательстве обеих теорем Сидон использует свойства тригонометрических полиномов вида

$$T_p(x) = \prod_{k=1}^{p} (1 + \alpha_k \cos m_k x),$$

впервые построенных Ф. Риссом ([6]) для другой цели.

Далее, А. Зигмунд ([18]) [см. также ([17]), § 5.7.10] получил прямое обобщение теоремы Фату.

ТЕОРЕМА ЗИГМУНДА. *Пусть лакунарный тригонометрический ряд* $\mathfrak{T}(x)$, *где* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, *сходится в каждой точке некоторого отрезка* $[a, b]$. *Тогда этот ряд абсолютно сходится.*

Наконец, из результатов Зигмунда без труда выводится такое, несколько более общее, предложение [см. ([4]), стр. 452—453]:

ТЕОРЕМА О КАТЕГОРИЯХ. *Пусть лакунарный тригонометрический ряд* $\mathfrak{T}(x)$, *где* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, *сходится в каждой точке некоторого множества* $E \subseteq [0, 2\pi]$ *не первой категории. Тогда этот ряд абсолютно сходится.*

Иными словами, для лакунарных тригонометрических рядов имеет место следующая альтернатива: в зависимости от того, будет ли ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|)$$

сходиться или расходиться, лакунарные тригонометрические ряды будут или абсолютно сходиться, или же расходиться на множествах точек второй категории. Это предложение представляет собою весьма редкий пример теоремы о тригонометрических рядах, в формулировку которой входит понятие категории.

Настоящая работа посвящена изучению абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами и примыкает как к исследованиям Сидона, так и к работам автора ([14]), ([15]).

Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Если последовательность N обладает тем свойством, что для всякой непрерывной функции $f(x)$, имеющей ряд Фурье вида

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x) \quad (n_k \in N),$$

этот ряд абсолютно сходится, то будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Обозначая через Λ класс всех лакунарных последовательностей и через Λ_σ — класс всех последовательностей, которые можно разбить на конечное число лакунарных, выводим из результатов Сидона, что

$$\Lambda \subset \Lambda_\sigma \subseteq \mathfrak{A}.$$

Сидоном ([12]) рассматривались также необходимые условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$.

Нам не удалось полностью охарактеризовать класс последовательностей $N \in \mathfrak{A}$. Однако мы получили как достаточные условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$, более широкие, чем условия Сидона, так и новые необходимые

условия для того, чтобы последовательность N принадлежала классу $\mathfrak{A}$. Вопрос о локализации полученных результатов в духе теоремы Зигмунда или теоремы о категориях нами не рассматривался.

План работы таков. В § 1 рассматриваются простые свойства некоторых редких последовательностей натуральных чисел.

В § 2 изучаются достаточные условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$. Мы указываем некоторый класс $\mathfrak{R}_\sigma$ возрастающих последовательностей натуральных чисел, более широкий, чем класс Λ_σ, относительно которого устанавливается, что $\mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}$. Определение класса $\mathfrak{R}_\sigma$ зависит от арифметических свойств последовательностей N. Аналогичные арифметические свойства, выражаемые в терминах числа решений определенных диофантовых уравнений, уже неоднократно встречались в теории тригонометрических рядов [см., напр., ([17]), § 5.4, ([11]) и ([12])]. Повидимому, они отвечают существу рассматриваемых задач.

§ 3 посвящен необходимым условиям для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$. Опираясь на одну важную теорему Литтльвуда ([3]), мы показываем, в частности, что если $N \in \mathfrak{A}$, то

$$n_k \geqslant \gamma^k \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

для некоторого $\gamma > 1$. Таким образом, все последовательности $N \in \mathfrak{A}$ растут не медленнее некоторой показательной функции. Как показывают простейшие примеры, этот результат не может быть улучшен.

Наконец, в § 4 исследуются уединенные коэффициенты Фурье суммируемых функций * и наилучшие приближения непрерывных функций, представимых тригонометрическими рядами с лакунами. Эти задачи тесно примыкают к рассмотренным выше.

§ 1. О некоторых последовательностях натуральных чисел

В этом параграфе исследуются свойства некоторых классов «достаточно редких» последовательностей натуральных чисел. Полученные здесь результаты используются в дальнейших разделах работы.

Последовательности класса Λ_σ. Пусть $\lambda > 1$ и $N = \{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $\Lambda(\lambda)$, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Далее, через Λ обозначим класс всех лакунарных последовательностей N, так что

$$\Lambda = \bigcup_{\lambda > 1} \Lambda(\lambda).$$

Наконец, через Λ_σ обозначим класс всех последовательностей N, которые могут быть разбиты на конечное число лакунарных, т. е. допускают представление:

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \Lambda \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{1.2}$$

* Определение этого понятия см. на стр. 404.

Структура последовательностей класса Λ весьма проста: $N \in \Lambda$ в том и только том случае, если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \gamma > 1. \tag{1.3}$$

Наша ближайшая цель — исследовать структуру последовательностей класса Λ_σ.

Через $N(n)$ мы будем обозначать число членов последовательности N, не превосходящих n:

$$N(n) = \sum_{n_k \leqslant n} 1.$$

ЛЕММА 1. *Для того чтобы $N \in \Lambda_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:*

1) *существует натуральное s, для которого*

$$\frac{n_{k+s}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{1.4}$$

2) $$\sum_{k=1}^{p} n_k = O(n_p); \tag{1.5}$$

3) $$N(2n) - N(n) = O(1). \tag{1.6}$$

Доказательство. Мы покажем, что

$$(1.4) \to (1.2) \to (1.5) \to (1.6) \to (1.4).$$

Прежде всего, ясно, что (1.4) влечет (1.2) с $r = s$: достаточно положить

$$N^{(j)} = \{n_k^{(j)}\}, \text{ где } n_k^{(j)} = n_{(k-1)s+j} \quad (j = 1, 2, \ldots s;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Далее, пусть выполняется условие (1.2) и

$$\frac{n_{k+1}^{(j)}}{n_k^{(j)}} \geqslant \lambda > 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Зафиксируем натуральное p и обозначим через p_j наибольший номер, для которого

$$n_{p_j}^{(j)} \leqslant n_p.$$

В силу (1.7) имеем:

$$\sum_{k=1}^{p_j} n_k^{(j)} = n_{p_j}^{(j)} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{n_k^{(j)}}{n_{p_j}^{(j)}} \leqslant n_{p_j}^{(j)} \sum_{k=1}^{p_j} \lambda^{k-p_j} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}\, n_{p_j}^{(j)}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{p} n_k = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{p_j} n_k^{(j)} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda-1} \sum_{j=1}^{r} n_{p_j}^{(j)} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda-1} \sum_{j=1}^{r} n_p = \frac{\lambda r}{\lambda - 1}\, n_p = O(n_p),$$

т. е. выполняется условие (1.5).

Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{p} n_k \leqslant Mn_p \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

где M — некоторое натуральное число. В силу монотонности последовательности N, отсюда вытекает, что

$$2Mn_{p+1} \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+2M} n_k \leqslant \sum_{k=1}^{p+2M} n_k \leqslant Mn_{p+2M} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$n_{p+2M} \geqslant 2n_{p+1} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

Зафиксируем натуральное число n, и пусть

$$n_p \leqslant n < n_{p+1} \quad (p \geqslant 0,\ n_0 = 0),$$

так что $N(n) = p$. Тогда, в силу (1.8),

$$n_{p+2M} \geqslant 2n_{p+1} > 2n$$

и, следовательно, $N(2n) < p + 2M$. Отсюда

$$N(2n) - N(n) < p + 2M - p = 2M = O(1),$$

т. е. выполняется (1.6).

Пусть, наконец,

$$N(2n) - N(n) \leqslant Q \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда, выбирая $p \geqslant 0$ из условий $n_p \leqslant n < n_{p+1}$, будем иметь:

$$N(n) = p \text{ и } N(2n) \leqslant N(n) + Q = p + Q,$$

откуда

$$n_{p+Q+1} > 2n \geqslant 2n_p,$$

т. е.

$$\frac{n_{p+s}}{n_p} \geqslant 2 \quad (s = Q + 1,\ p = 1, 2, \ldots),$$

что означает выполнение условия (1.4).

Лемма доказана.

Отметим, что из условия (1.6) непосредственно вытекает, что для последовательностей $N \in \Lambda_\sigma$

$$N(qn) - N(n) = O(1) \tag{1.9}$$

для любого $q > 1$. Далее, разбивая, если это необходимо, каждую из последовательностей $N^{(j)}$, входящих в представление (1.2), на конечное число частей, убеждаемся, что если $N \in \Lambda_\sigma$, то ее можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \Lambda(\mu) \tag{1.10}$$

и μ — любое наперед заданное число, большее 1.

Заметим, что при доказательстве леммы 1 мы нигде не использовали того факта, что числа n_k — натуральные; таким образом, эта лемма переносится на любые неубывающие последовательности положительных чисел.

Последовательности класса $\mathfrak{R}$. Пусть $N=\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $P_s(n)$ число различных представлений целого n в форме

$$n=\sum_{j=1}^{s}\varepsilon_j n_{k_j}, \tag{1.11}$$

где $\varepsilon_j=\pm 1$ и $0<k_1<k_2<\ldots<k_s$. Представление (1.11) мы будем называть s-членным представлением числа n. Положим

$$P_s=\sup_n P_s(n);$$

при этом не исключается, что для некоторых s $P_s=\infty$. Так как для любой последовательности N

$$P_s(n)=P_s(-n),$$

то ясно, что величину P_s можно также определить формулой

$$P_s=\sup_{n\geqslant 0} P_s(n),$$

т. е. при помощи s-членных представлений неотрицательных n.

Если для всех натуральных s

$$P_s\leqslant A^s, \tag{1.12}$$

где $A\geqslant 1$, то будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $\mathfrak{R}(A)$. Наконец, положим

$$\mathfrak{R}=\bigcup_{A\geqslant 1}\mathfrak{R}(A),$$

так что $N\in\mathfrak{R}$ в том и только том случае, если

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{1}{s}\ln P_s<\infty.$$

Изучим некоторые свойства последовательностей класса $\mathfrak{R}$. Как впервые отметил Ф. Рисс ([6]), если последовательность N является достаточно редкой, то $N\in\mathfrak{R}$. Точнее, пусть

$$2\sum_{k=1}^{p}n_k<n_{p+1}\quad(p=1,2,\ldots); \tag{1.13}$$

тогда для любых натуральных s и s' и любых ε_j, $\varepsilon_j'=\pm 1$

$$\sum_{j=1}^{s}\varepsilon_j n_{k_j}\neq\sum_{j=1}^{s'}\varepsilon_j' n_{k_j'},$$

кроме того случая, когда

$$s=s',\quad \varepsilon_j=\varepsilon_j',\quad k_j=k_j'\quad(j=1,2,\ldots,s);$$

в частности, $N\in\mathfrak{R}(1)$. В самом деле, иначе мы имели бы

$$\sum_{j=1}^{t}\eta_j n_{l_j}=0,$$

где η_j может принимать значения -2, -1, 1 или 2 и $0<l_1<$

$$\left|\sum_{j=1}^{t}\eta_j n_{l_j}\right| \geqslant \left|\eta_t n_{l_t}\right| - \sum_{j=1}^{t-1}|\eta_j n_{l_j}| \geqslant n_{l_t} - 2\sum_{k=1}^{l_t-1} n_k > 0.$$

Условие (1.13) выполняется, например, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda \geqslant 3 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.14}$$

так как тогда

$$2\sum_{k=1}^{p} n_k = 2n_{p+1}\sum_{k=1}^{p}\frac{n_k}{n_{p+1}} \leqslant 2n_{p+1}\sum_{k=1}^{p}\lambda^{k-p-1} < \frac{2}{\lambda-1}n_{p+1} \leqslant n_{p+1}.$$

Покажем, что класс Λ_σ не охватывает класса $\mathfrak{R}$.

ЛЕММА 2. *Существует последовательность N, для которой*

$$N \in \mathfrak{R}, \quad N \overline{\in} \Lambda_\sigma.$$

Доказательство. Искомую последовательность будем строить индуктивно. Положим $n_1 = 1$. Далее, если числа $n_1, \ldots, n_{p^2}$ уже определены, то построим числа $n'_{p^2+1}, \ldots, n'_{(p+1)^2}$ из условий:

$$n'_{p^2+r} = 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{r-1} n'_{p^2+j}\right\} + 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, 2p+1) \tag{1.15}$$

и положим

$$n_{p^2+r} = n'_{p^2+r} + m_p \quad (r = 1, 2, \ldots 2p+1),$$

где

$$m_p > 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{2p+1} n'_{p^2+j}\right\} \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{1.16}$$

Покажем, что $N \overline{\in} \Lambda_\sigma$. Для этого отметим, что

$$n_{p^2+1} = n'_{p^2+1} + m_p > m_p$$

и

$$n_{(p+1)^2} = n'_{(p+1)^2} + m_p = 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{2p} n'_{p^2+j}\right\} + 1 + m_p \leqslant 2m_p.$$

Отсюда следует, что

$$N(m_p) \leqslant N(n_{p^2+1}) = p^2 + 1$$

и

$$N(2m_p) \geqslant N(n_{(p+1)^2}) = (p+1)^2.$$

Таким образом,

$$N(2m_p) - N(m_p) \geqslant (p+1)^2 - p^2 - 1 = 2p \to \infty \quad (p \to \infty),$$

откуда, в силу леммы 1, $N \overline{\in} \Lambda_\sigma$.

Покажем, что $N \in \mathfrak{R}(1) \subset \mathfrak{R}$. Для этого допустим, что некоторое целое n имеет два представления:

$$n = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j n_{k_j} = \sum_{j=1}^{s'} \varepsilon'_j n_{k'_j} \tag{1.17}$$

и придем к противоречию. Из (1.17) вытекает, что

$$0 = \sum_{j=1}^{t} \eta_j n_j, \tag{1.18}$$

где η_j может принимать значения -2, -1, 0, 1 и 2. Без ограничения общности можно считать $\eta_t \neq 0$. Пусть

$$p^2 < t \leqslant (p+1)^2.$$

Тогда, выражая n_j $(p^2 < j \leqslant (p+1)^2)$ через n_j, выводим из (1.18), что

$$\sum_{j=1}^{p^2} \eta_j n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} \eta_j n'_j + a m_p = 0,$$

где $\eta_t \neq 0$ и a — некоторое целое число. Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$. В первом случае имеем:

$$\sum_{j=1}^{p^2} \eta_j n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} \eta_j n'_j = 0.$$

Но это равенство невозможно, так как, в силу (1.15),

$$n'_t > 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t-1} n'_j\right\}.$$

Если же $a \neq 0$, то имеем, в силу (1.16):

$$m_p > 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{(p+1)^2} n'_j\right\} \geqslant 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} n'_j\right\},$$

что вновь показывает невозможность равенства (1.18).

Итак, $N \in \mathfrak{R}(1)$, и лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится еще оценка для числа членов последовательности $N \in \mathfrak{R}$, не превосходящих n.

ЛЕММА 3. *Пусть* $N \in \mathfrak{R}$. *Тогда*

$$N(n) = O(\ln n). \tag{1.19}$$

Доказательство. Так как, по условию, $N \in \mathfrak{R}$, то найдется натуральное число $A > 1$ такое, что

$$P_s(n) \leqslant A^s$$

для всех n и s. Зафиксируем натуральные числа s и p, $s < p$, и рассмотрим числа $n_1, n_2, \ldots, n_p$. С их помощью можно получить

$$R = \frac{(2p)!}{}$$

различных s-членных представлений чисел n. Все такие числа n заключены в пределах

$$-sn_p < n < sn_p.$$

Отсюда вытекает, что хотя бы одно число n_0 имеет не менее

$$\frac{B_{p,s}}{2sn_p}$$

различных представлений, откуда

$$n_p \geqslant \frac{B_{p,s}}{2sP_s} \geqslant \frac{B_{p,s}}{2sA^s}. \tag{1.20}$$

Оценим это выражение, положив $p = As$. Используя формулу Стирлинга, выводим без труда, что

$$B_{As,s} \approx \frac{A^{2s}}{2\sqrt{\pi s}} \left(\frac{A}{A-1}\right)^{2(A-1)s+\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (1.20) выводим:

$$n_{As} \geqslant \frac{A^s}{4\sqrt{\pi}\, s^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{A}{A-1}\right)^{2(A-1)s+\frac{1}{2}} \{1 - o(1)\} \geqslant A^s = A_1^{A_1 s}$$

$$(s \geqslant s_0,\ A_1 > 1).$$

Поэтому

$$n_k \geqslant A_2^k \quad (k \geqslant k_0,\ A_2 > 1)$$

и, следовательно,

$$N(n) = O(\ln n).$$

Лемма доказана.

Последовательности класса $\mathfrak{R}_\sigma$. Если возрастающая последовательность натуральных чисел N допускает конечное представление

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \mathfrak{R},$$

то будем говорить, что она принадлежит классу $\mathfrak{R}_\sigma$. Этот класс последовательностей будет в дальнейшем играть основную роль К сожалению, нам не удалось найти для него независимых характеристик, например, аналогичных характеристикам класса $Л_\sigma$.

Из проведенного выше анализа классов $Л_\sigma$ и $\mathfrak{R}$ вытекает, что

$$\mathfrak{R}_\sigma \supset Л_\sigma \tag{1.21}$$

со строгим знаком включения, и что если $N \in \mathfrak{R}_\sigma$, то

$$N(n) = O(\ln n). \tag{1.22}$$

В самом деле, согласно замечанию к лемме 1, если $N \in Л_\sigma$, то эту по-

следовательность можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \Lambda(3).$$

В силу же замечания на стр. 391, $N^{(j)} \in \mathfrak{R}$, откуда $N \in \mathfrak{R}_\sigma$. Далее, лемма 2 показывает, что существует последовательность $N \in \mathfrak{R}$, $N \overline{\in} \Lambda_\sigma$. Наконец, для вывода оценки (1.22) достаточно заметить, что если каждая последовательность $N^{(j)}$ удовлетворяет условию (1.22), то этому условию удовлетворяет и их объединение, и сослаться на лемму 3.

§ 2. Достаточные условия

В этом параграфе устанавливаются новые достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами. В частности, из них вытекает, что

$$\mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху:*

$$f(x) \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x), \tag{2.1}$$

где $N = \{n_k\} \in \mathfrak{R}_\sigma$, то этот ряд абсолютно сходится.

Нам потребуется одна лемма.

ЛЕММА 4. *Пусть последовательность $M = \{m_k\}$ принадлежит классу $\mathfrak{R}(A)$,*

$$0 < \alpha \leqslant A^{-1}, \quad |\alpha_k| \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi_k < 2\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{2.2}$$

Тогда тригонометрический полином

$$T_p(x) = \prod_{k=1}^{p} \{1 + \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k)\} \tag{2.3}$$

обладает следующими свойствами:

1) $T_p(x) \geqslant 0$;

2) $T_p(x) = 1 + A_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) + \sum_{\nu=1}^{\nu_p} A_\nu \cos(\nu x - \psi_\nu)$, (2.4)

где все номера ν имеют вид:

$$\nu = \pm m_{k_1} \pm \cdots \pm m_{k_s} \quad (1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p, \ 2 \leqslant s \leqslant p); \tag{2.5}$$

в частности,

$$\nu_p = \sum_{k=1}^{p} m_k \leqslant p m_p \leqslant m_p^2; \tag{2.6}$$

3) $|A_\nu| \leqslant (A\alpha)^2 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, \nu_p)$.

Доказательство. Эта лемма аналогична лемме Сидона ([9]), ([10]). Так как $A \geqslant 1$, то $|\alpha_k| \leqslant 1$, и свойство 1) очевидно.

Далее, выполняя перемножение в формуле (2.3) и заменяя произведения косинусов суммами косинусов, получаем:

$$T_p(x) - 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) =$$

$$= \sum_{s=2}^{p} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p} \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s} \cos(m_{k_1} x - \varphi_{k_1}) \ldots \cos(m_{k_s} x - \varphi_{k_s}) =$$

$$= \sum_{s=2}^{p} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p} \frac{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\{(\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s}) x - (\pm \varphi_{k_1} \pm \ldots \pm \varphi_{k_s})\},$$

где допускаются лишь те комбинации знаков $\pm$, для которых

$$\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} \geqslant 0,$$

и если

$$\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = 0,$$

то из двух таких представлений, отличающихся всеми знаками, берется одно. Отсюда

$$T_p(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu_p} \sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p \\ \pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = \nu}} \frac{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\{\nu x - (\pm \varphi_{k_1} \pm \ldots \pm \varphi_{k_s})\},$$

где внутренняя сумма берется по всем указанным выше представлениям числа ν. Преобразуя сумму

$$\sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p \\ \pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = \nu}} \frac{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\{\nu x - (\pm \varphi_{k_1} \pm \ldots \pm \varphi_{k_s})\}$$

к виду

$$A_\nu \cos(\nu x - \psi_\nu),$$

убеждаемся, что полином $T_p(x)$ действительно представим в форме (2.4), где все номера $\nu\ (0 \leqslant \nu \leqslant \nu_p)$ имеют вид (2.5).

Наконец, оценим коэффициенты A_ν. Имеем:

$$|A_\nu| \leqslant \sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p \\ \pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = \nu}} \frac{|\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}|}{2^{s-1}}.$$

Так как, по условию, $M \in \mathfrak{R}(A)$, то число различных s-членных представлений числа ν не превосходит

$$P_s(\nu) \leqslant A^s.$$

Отсюда и из (2.2) следует:

$$|A_\nu| \leqslant \sum_{s=2}^{p} \frac{\alpha^s}{2^{s-1}} P_s(\nu) \leqslant 2 \sum_{s=2}^{p} \left(\frac{A\alpha}{2}\right)^s \leqslant (A\alpha)^2 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, \nu_p),$$

и лемма полностью доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Без ограничения общности можно положить $a_0 = 0$, так что ряд $\mathfrak{S}[f]$ имеет вид:

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \cos(n_k x - \varphi_{n_k}), \tag{2.7}$$

где $\rho_{n_k} \geqslant 0$ и $N = \{n_k\} \in \mathfrak{R}_\sigma$. Представим последовательность N в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \mathfrak{R}(A). \tag{2.8}$$

Тогда можем написать:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \cos(n_k x - \varphi_{n_k}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(j)} (\cos(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}).$$

Зафиксируем натуральное число n, и пусть

$$n_{p_j}^{(j)} \leqslant n < n_{p_j+1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Воспользуемся леммой 4, положив в ней

$$p = p_j, \quad m_k = n_k^{(j)}, \quad \alpha_k = \frac{1}{B}, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(j)} \quad (k = 1, 2, \ldots, p_j),$$

где

$$B = 3A^2 r.$$

Получаем, что существуют тригонометрические полиномы вида

$$T_{p_j}(x) = 1 + A_0^{(j)} + B^{-1} \sum_{n_k^{(j)} \leqslant n} \cos(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}) +$$

$$+ \sum_{\nu \leqslant n^2} A_\nu^{(j)} \cos(\nu x - \psi_\nu^{(j)}) \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

удовлетворяющие условиям:

$$T_{p_j}(x) \geqslant 0 \text{ и } |A_\nu^{(j)}| \leqslant \left(\frac{A}{B}\right)^2 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Исходя из этих полиномов, построим полином

$$T_{(n)}(x) = B \sum_{j=1}^{r} T_{p_j}(x) =$$

$$= B\sum_{j=1}^{r}\left\{1 + A_0^{(j)} + B^{-1}\sum_{n_k^{(j)}\leqslant n}\cos\left(n_k^{(j)}x - \varphi_k^{(j)}\right) + \sum_{\nu\leqslant n^2} A_\nu^{(j)}\cos\left(\nu x - \psi_\nu^{(j)}\right)\right\} =$$

$$= Br + A_0 + \sum_{n_k\leqslant n}\cos\left(n_k x - \varphi_k\right) + \sum_{\nu\leqslant n^2} A_\nu\cos\left(\nu x - \psi_\nu\right),$$

где теперь

$$|A_\nu| \leqslant Br\max_j |A_\nu^{(j)}| \leqslant Br\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2 r}{B} \leqslant \frac{1}{3} \quad (\nu = 0,1,2,\ldots). \tag{2.9}$$

Кроме того,

$$T_{(n)}(x) \geqslant 0$$

и

$$\int_0^{2\pi} |T_{(n)}(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} T_{(n)}(x)\,dx = 2\pi(Br + A_0) \leqslant C_1 A^2 r^2.$$

Воспользуемся равенством Парсеваля. Получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{(n)}(x) f(x)\,dx = \sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k} + \sum_{n_k\leqslant n^2} A_{n_k}\left(a_{n_k}\cos\psi_{n_k} + b_{n_k}\sin\psi_{n_k}\right).$$

В силу (2.9),

$$\left|\sum_{n_k\leqslant n^2} A_{n_k}\left(a_{n_k}\cos\psi_{n_k} + b_{n_k}\sin\psi_{n_k}\right)\right| \leqslant \frac{1}{3}\sum_{n_k\leqslant n^2}\rho_{n_k}.$$

С другой стороны, так как $f(x) \leqslant M$ и $T_n(x) \geqslant 0$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{(n)}(x) f(x)\,dx \leqslant \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{(n)}(x)\,dx \leqslant C_2 A^2 r^2 M.$$

Отсюда

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k} \leqslant C_2 A^2 r^2 M + \frac{1}{3}\sum_{n_k\leqslant n^2}\rho_{n_k}. \tag{2.10}$$

Итерируя это неравенство, получаем:

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k} \leqslant C_2 A^2 r^2 M\sum_{i=0}^{s-1} 3^{-i} + 3^{-s}\sum_{n_k\leqslant n^{2^s}}\rho_{n_k} \quad (s = 1,\ 2,\ldots).$$

Заметим, что так как, согласно (1.22),

$$N(n) = O(\ln n),$$

то при фиксированном n

$$N(n^{2^s}) = O(2^s)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n_k\leqslant n^{2^s}}\rho_{n_k} = O\left(N(n^{2^s})\right) = O(2^s).$$

Отсюда вытекает:

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k} \leqslant C_2 A^2 r^2 M\sum_{i=0}^{s-1} 3^{-i} + O\left(\frac{2}{3}\right)^s.$$

Устремляя s к ∞, получаем, что

$$\sum_{n_k \leqslant n} \rho_{n_k} \leqslant C_2 A^2 r^2 M \sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i} = C_3 A^2 r^2 M.$$

Наконец, полагая $n \to \infty$, выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \leqslant C_3 A^2 r^2 M, \tag{2.11}$$

и теорема доказана.

Отметим два следствия.

Замечая, что, согласно результатам § 1, $J_\sigma \subset \mathfrak{R}_\sigma$, и учитывая лемму 1, выводим из теоремы 1 такое следствие, эквивалентное теореме Сидона (B).

Следствие 1. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид* (2.1), *где последовательность $N = \{n_k\}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{p} n_k = O(n_p), \tag{2.12}$$

или (что то же самое) условию

$$\frac{n_{k+r}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

для некоторого фиксированного r, то ряд $\mathfrak{S}[f]$ абсолютно сходится.

Далее, напомним, что С. Банах (1) доказал такую теорему:

ТЕОРЕМА БАНАХА. *Следующие свойства последовательностей $N = \{n_k\}$ эквивалентны:*

α) *для любой ограниченной измеримой функции $f(x)$, имеющей ряд Фурье вида* (2.1), *где $n_k \in N$, этот ряд абсолютно сходится;*

β) *для любых последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, где $\alpha_k, \beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, найдется суммируемая функция $f(x)$, для которой*

$$a_{n_k} = \alpha_k, \quad b_{n_k} = \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Сопоставляя эту теорему с теоремой 1, получаем

Следствие 2. *Пусть $N \in \mathfrak{R}_\sigma$. Тогда для любых последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, удовлетворяющих условию*

$$\alpha_k, \beta_k \to 0 \quad (k \to \infty),$$

найдется суммируемая функция $f(x)$, для которой

$$a_{n_k} = \alpha_k, \quad b_{n_k} = \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Сделаем несколько замечаний.

Учитывая оценку (2.11), без труда получаем, что если

$$|f(x)| \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

и последовательность $N \in \mathfrak{R}_\sigma$ допускает представление

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \text{ где } N^{(j)} \in \mathfrak{R}(A) \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

то

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \leqslant C_4 A^2 r^2 M, \tag{2.15}$$

где C_4 — абсолютная константа.

Отметим также, что из результатов § 1 и теоремы 1 вытекают включения

$$\Lambda \subset \Lambda_\sigma \subset \mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}. \tag{2.16}$$

Возможно, что $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{A}$. Во всяком случае, методом, основанным на использовании полиномов Ф.Рисса, не удается получить более общих результатов.

§ 3. Необходимые условия

В этом параграфе исследуются условия, необходимые для того, чтобы последовательность N принадлежала классу $\mathfrak{A}$.

Впервые такого рода условия рассматривались С. Сидоном ([12]), который показал, что если $N \in \mathfrak{A}$, то

$$n_k \geqslant e^{k^{1-\varepsilon}} \quad (k \geqslant k_0(\varepsilon)) \tag{3.1}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку этот результат был высказан Сидоном в несколько иной форме, мы приведем здесь его простое доказательство.

Допустим, что $N \in \mathfrak{A}$, и покажем, что тогда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k < \infty \tag{3.2}$$

для любого $\eta > 0$. В самом деле, если для некоторого $\eta > 0$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k = \infty,$$

то положим

$$a_{n_k} = S_k^{-1} \ln^{-1-\eta} n_k \quad (k = 2, 3, \ldots), \text{ где } S_k = \sum_{\varkappa=2}^{k} \ln^{1-\eta} n_\varkappa. \tag{3.3}$$

Тогда будем иметь:

$$a_{n_k} > 0, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k \cdot S_k^{-1} = \infty \tag{3.4}$$

и

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{n_k}^2 \ln^{1+\eta} n_k = \sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k S_k^{-2} < \infty. \tag{3.5}$$

Воспользуемся теперь следующей теоремой Палея и Зигмунда ([5]) [см. также ([17]), § 5.61]: пусть $\eta > 0$ и сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln^{1+\eta} n;$$

тогда для почти всех комбинаций знаков $\pm$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

есть ряд Фурье некоторой непрерывной функции $f(x)$. В силу (3.5), из этой теоремы вытекает, что если последовательность $\{a_{n_k}\}$ определяется формулами (3.3), то существует такая комбинация знаков, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm a_{n_k} \cos n_k x$$

есть ряд Фурье некоторой непрерывной функции. Однако, согласно (3.4), этот ряд не является абсолютно сходящимся и, следовательно, $N \overline{\in} \mathfrak{A}$.

Остается показать, что условия (3.1) и (3.2) эквивалентны. С одной стороны, если имеет место (3.1), то

$$\ln^{-1-\eta} n_k \leqslant k^{-(1-\varepsilon)(1+\eta)} \quad (k \geqslant k_0),$$

откуда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k < \infty$$

для любого $\eta > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, т. е., в силу произвольности ε, для любого $\eta > 0$. С другой стороны, если имеет место (3.2), то, по теореме Оливье — Абеля,

$$\ln^{-1-\eta} n_k = o(k^{-1}),$$

откуда

$$n_k \geqslant e^{k^{\frac{1}{1+\eta}}} \quad (k \geqslant k_0),$$

что, в силу произвольности $\eta > 0$, эквивалентно (3.1).

Для получения дальнейших необходимых условий мы воспользуемся следующим замечанием С. Банаха [1]: для того чтобы $N \in \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа K, что для любого натурального p и любых $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ имело бы место неравенство:

$$\sum_{k=1}^{p} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) \leqslant K \left\| \sum_{k=1}^{p} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x) \right\|, \tag{3.6}$$

где

$$\|\varphi(x)\| = \max_x |\varphi(x)|.$$

Иначе говоря, для того чтобы $N \in \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы была ограничена последовательность $\{S_p[N]\}$, где

$$S_p[N] = \sup \sum_{k=1}^{p} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

и верхняя грань берется по всевозможным тригонометрическим полиномам вида

$$T_p(x) = \sum_{k=1}^{p} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x), \tag{3.8}$$

удовлетворяющим условию $\| T_p(x) \| \leqslant 1$.

Таким образом, для доказательства того факта, что та или иная последовательность N не принадлежит классу $\mathfrak{A}$, достаточно построить тригонометрические полиномы вида (3.8), для которых последовательность

$$S_p(T_p) = \frac{\sum_{k=1}^{p} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|)}{\| T_p(x) \|} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

не ограничена.

Экстремальная задача, определяемая формулой (3.7), изучена еще недостаточно подробно. В этом направлении нам известна только важная теорема Литтльвуда ([3]), на которую мы и будем опираться. Возможно поэтому, что те необходимые условия для $N \in \mathfrak{A}$, которые излагаются в этом параграфе, не окончательны.

ТЕОРЕМА ЛИТТЛЬВУДА. *Пусть* $a_n \geqslant 0$ $(0 \leqslant n \leqslant m)$. *Тогда существуют действительные числа* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$, *для которых*

$$\max_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{m} a_n e^{2\pi i \beta_n} z^n \right| \leqslant A \sqrt{\sum_{n=0}^{m} a_n^2 \cdot \ln(m+2)}, \tag{3.9}$$

где A *— абсолютная константа.*

Отметим, что эта теорема Литтльвуда была затем передоказана Р. Салемом [см. ([7]) и, для тригонометрического случая, ([8])].

Зададим возрастающую последовательность номеров $M = \{m_k\}$ и положим в теореме Литтльвуда $a_n = 1$ для $n = m_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ и $a_n = 0$ в противном случае. Тогда $m = m_p$ и мы получаем, что существуют действительные числа β_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$, для которых

$$\max_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \beta_k} z^{m_k} \right| \leqslant A \sqrt{p \ln(m_p + 2)}. \tag{3.10}$$

Переходим к формулировке основного результата этого параграфа. Пусть M — натуральное число, а P принимает значения $0, 1, \ldots, M-1$. Обозначим через $\{m_s(M, P)\}$ возрастающую последовательность натуральных чисел, состоящую из тех членов $\{n_{k_s}\}$ последовательности N, для которых

$$n_{k_s} \equiv P \pmod{M}.$$

Ясно, что для каждого фиксированного M хотя бы одна из последовательностей $\{m_s(M, P)\}$ $(P = 0, 1, \ldots, M-1)$ бесконечна.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $N \in \mathfrak{A}$, *то для любого натурального* M, *любого* $P = 0, 1, \ldots, M-1$ *и любых натуральных* p *и* q $(p < q)$

$$\ln \left\{ \frac{m_q(M, P) - m_p(M, P)}{M} + 2 \right\} \geqslant B(q - p), \tag{3.11}$$

где B *— положительная константа.*

Иными словами, условие (3.11) необходимо для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Допустим, что условие (3.11) не выполняется, и покажем, что тогда $N \in \mathfrak{A}$. Отрицание условия (3.11) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа M, P, p и $q > p$, для которых

$$\ln\left\{\frac{m_q(M,P)-m_p(M,P)}{M}+2\right\}<\varepsilon(q-p). \tag{3.12}$$

Согласно определению последовательности $\{m_p(M,P)\}$, числа

$$n_p'=\frac{m_p(M,P)-P}{M}$$

являются целыми. Воспользуемся неравенством (3.10), положив в нем

$$m_{l-p+1}=n_l'-n_p'=\frac{m_l(M,P)-m_p(M,P)}{M} \quad (l=p,\ p+1,\ \ldots,\ q).$$

Получаем, что существуют числа β_l $(l=p,\ p+1,\ \ldots,\ q)$, для которых

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{2\pi i\beta_l} z^{\frac{m_l(M,P)-m_p(M,P)}{M}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A\sqrt{(q-p+1)\ln\left\{\frac{m_q(M,P)-m_p(M,P)}{M}+2\right\}}.$$

Отсюда

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{2\pi i\beta_l} z^{\frac{m_l(P,M)}{M}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A\sqrt{(q-p+1)\ln\left\{\frac{m_q(M,P)-m_p(M,P)}{M}+2\right\}}.$$

Заменяя в этом неравенстве z на e^{iMx} и оценивая правую часть согласно (3.12), выводим, что

$$\max_x\left|\sum_{l=p}^{q} e^{i\{2\pi\beta_l+m_l(M,P)x\}}\right| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1),$$

т. е.

$$\max_x\left|\sum_{l=p}^{q} e^{i(n_{k_l}x+2\pi\beta_l)}\right| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1). \tag{3.13}$$

Теперь остается только заметить, что тригонометрический полином

$$T_{k_q}(x)=\operatorname{Re}\sum_{l=p}^{q} e^{i(n_{k_l}x+2\pi\beta_l)}=\sum_{l=p}^{q}(a_{n_{k_l}}\cos n_{k_l}+b_{n_{k_l}}\sin n_{k_l}x)$$

удовлетворяет условиям:

$$\|T_{k_q}(x)\| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1)$$

и

$$\sum_{l=p}^{q}(|a_{n_{k_l}}|+|b_{n_{k_l}}|) \geqslant \sum_{l=p}^{q}\sqrt{a_{n_{k_l}}^2+b_{n_{k_l}}^2}=q-p+1,$$

откуда

$$S_{k_q}(T_{k_q}) = \frac{\sum_{l=p}^{q} (|a_{n_{k_l}}| + |b_{n_{k_l}}|)}{\|T_{k_l}(x)\|} \geqslant \frac{q-p+1}{A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1)} = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}}.$$

В силу произвольности ε, отсюда вытекает, что последовательность $\{S_{k_q}(T_{k_q})\}$ не ограничена, и теорема доказана.

Замечание Банаха без труда переносится на степенные ряды в единичном круге. Поэтому, используя оценку (3. 13), немедленно получаем что если последовательность N не удовлетворяет условию (3.11), то существует функция вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} z^{n_k},$$

аналитическая в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, для которой $n_k \in N$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}| = \infty.$$

Условие (3.11) мало прозрачно. Однако из теоремы 2 непосредственно вытекает такое

Следствие. *Если* $N \in \mathfrak{A}$, *то*

$$n_k \geqslant C\gamma^k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3.14}$$

где $C > 0$, $\gamma > 1$.

Достаточно положить в (3.11) $M = 1$, $p = 1$.

Итак, если $N \in \mathfrak{A}$, то эта последовательность растет не медленнее некоторой показательной функции. В частности, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$

то $N \overline{\in} \mathfrak{A}$. Таким образом, если $N \in \mathfrak{A}$, то эта последовательность имеет бесконечно много таких лакун, что

$$\frac{n_{k_s+1}}{n_{k_s}} \geqslant \lambda > 1 \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

§ 4. Родственные задачи

В этом параграфе рассматриваются две задачи, которые по своему характеру весьма близки к изучавшимся выше. В обеих задачах существенную роль играют последовательности класса Λ_a.

О поведении уединенных коэффициентов Фурье. Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров. Совокупность номеров n, удовлетворяющих условию

$$\lambda^{-1} \leqslant \frac{n}{n_k} \leqslant \lambda \quad (\lambda > 1) \tag{4.1}$$

для некоторого натурального k, будем называть λ-окрестностью последовательности N. Последовательность N назовем уединенной для функции $f(x)$, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$a_n = 0, \quad b_n = 0$$

для всех номеров n из λ-окрестности последовательности N, за исключением номеров $n_k \in N$.

С. Сидон ([13]) доказал следующую теорему:

ТЕОРЕМА СИДОНА (С). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если последовательность $N \in \Lambda$ является уединенной для функции $f(x)$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty. \tag{4.2}$$

В этом предложении нельзя полностью отбросить условие, что последовательность N является уединенной. В самом деле, согласно результатам С.Банаха ([1]) и С. Сидона ([11]), если N — достаточно редкая последовательность номеров (например, $N \in \Lambda$), то соответствующие последовательности $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ коэффициентов Фурье непрерывных функций подчинены единственному ограничению

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) < \infty. \tag{4.3}$$

Отметим, что теорема Сидона (С) является прямым обобщением его теоремы (А), так как если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x),$$

где $N = \{n_k\} \in \Lambda$, то эта последовательность, очевидно, автоматически будет уединенной для функции $f(x)$.

Здесь мы покажем, что теорема Сидона (С) переносится на уединенные последовательности номеров класса Λ_σ. Дальнейшие обобщения наталкиваются на большие затруднения. Возможно, что другим классам редких последовательностей должны соответствовать свои определения уединенности.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху:*

$$f(x) \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Если последовательность $N = \{n_k\} \in \Lambda_\sigma$ является уединенной для функции $f(x)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно положить $a_0 = 0$, так что ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \varphi_n) \quad (\rho_n \geqslant 0).$$

Зафиксируем $\lambda > 1$ такое, что $\rho_n = 0$ для всех номеров n из λ-окрестности последовательности N, за исключением $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности можно считать $\lambda \leqslant 2$. Так как $N \in \Lambda_\sigma$, то, согласно замечанию к лемме 1, последовательность N можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad N^{(j)} \in \Lambda(\mu),$$

где μ — любое наперед заданное число, бо́льшее 1. Выберем μ из условий

$$n_p^{(j)} - \sum_{k=1}^{p-1} n_k^{(j)} > \lambda^{-1} n_p^{(j)}, \quad \sum_{k=1}^{p} n_k^{(j)} < \lambda n_p^{(j)} \tag{4.4}$$

$$(p = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, r),$$

для чего достаточно положить

$$\mu = \frac{2\lambda - 1}{\lambda - 1} \geqslant 3.$$

Зафиксируем номер p, и пусть

$$n_{p_j}^{(j)} \leqslant n_p < n_{p_j+1}^{(j)}.$$

Воспользуемся леммой 4, положив в ней

$$p = p_j, \quad m_k = n_k^{(j)}, \quad \alpha_k = \frac{1}{2r}, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(j)} = \varphi_{n_k^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \ldots p_j).$$

Так как $N^{(j)} \in \Lambda(\mu)$, где $\mu \geqslant 3$, то, согласно замечанию, сделанному на стр. 391, $N^{(j)} \in \mathfrak{R}(1)$. Таким образом, можно положить $A = 1$, и мы получаем, что существует тригонометрический полином вида

$$T_p^{(j)}(x) = 1 + (2r)^{-1} \sum_{k=1}^{p_j} \cos(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}) + \sum_{\nu=0}^{\nu_{p_j}} A_\nu^{(j)} \cos(\nu x - \psi_\nu^{(j)}),$$

удовлетворяющий условиям:

$$T_p^{(j)}(x) \geqslant 0, \quad |A_\nu^{(j)}| \leqslant \frac{1}{4r^2},$$

где каждое ν имеет вид:

$$\nu = \pm n_{k_1}^{(j)} \pm \ldots \pm n_{k_s}^{(j)} \quad (0 < k_1 < \ldots < k_s \leqslant p_j).$$

Отметим, что из последнего условия и неравенств (4.4) непосредственно вытекает, что все номера ν находятся в λ-окрестности последовательности N и, в частности, $\nu \neq 0$.

Построим полином

$$T_p(x) = 2r\sum_{j=1}^{r} T_p^{(j)}(x) = 2r^2 + \sum_{k=1}^{p}\cos(n_k x - \varphi_{n_k}) + \sum_{\nu=1}^{\nu_p} A_\nu \cos(\nu x - \psi_\nu).$$

Имеем:

$$T_p(x) \geqslant 0, \quad |A_\nu| \leqslant 2r\cdot r\frac{1}{4r^2} = \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu_p),$$

и снова все номера ν принадлежат λ-окрестности последовательности N. Учитывая, что все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ с номерами, принадлежащими этой окрестности и отличными от n_k, обращаются в нуль, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_p(x) f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} - \sum_{n_k\leqslant\nu_p}|A_{n_k}|\rho_{n_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} - \frac{1}{2}\sum_{n_p<n_k\leqslant\nu_p}\rho_{n_k}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_p(x) f(x)\,dx \leqslant \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} T_p(x)\,dx = 4r^2 M.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2 M + \sum_{n_p<n_k\leqslant\nu_p}\rho_{n_k}.$$

Но, в силу (4.4),

$$\nu_p \leqslant \lambda n_p \leqslant 2n_p.$$

Поэтому, в силу леммы 1,

$$\sum_{n_p<n_k\leqslant\nu_p}\rho_{n_k} \leqslant \{N(2n_p) - N(n_p)\}\,o(1) = o(1).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2 M + o(1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2 M,$$

и теорема доказана.

Эта теорема является прямым обобщением теоремы Сидона (B).

Наилучшие приближения функций, представимых рядами Фурье с лакунами. Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, имеющая ряд Фурье вида

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x); \tag{4.5}$$

через $s_n(x)$ будем обозначать n-ю частичную сумму ряда $\mathfrak{S}[f]$:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n_k \leqslant n} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x).$$

Положим

$$R_n(f) = \| f(x) - s_n(x) \|$$

и

$$E_n(f) = \inf_{t_n} \| f(x) - t_n(x) \| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где нижняя грань берется по всевозможным тригонометрическим полиномам порядка n. Таким образом, $R_n(f)$ есть приближение функции $f(x)$ ее n-й суммой Фурье, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n.

В работах автора ([14]), ([15]) установлено, что если $N \in \Lambda(\lambda)$, то

$$R_n(f) \leqslant C(\lambda) E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.6}$$

откуда вытекает, что в этом случае суммы Фурье дают тот же порядок приближения, что и наилучшие полиномы. Здесь я покажу, что этот результат переносится на последовательности $N \in \Lambda_\sigma$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида* (4.5), *причем $N \in \Lambda_\sigma$. Тогда*

$$R_n(f) \leqslant C E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.7}$$

где константа C зависит лишь от последовательности N.

Доказательство. Введем в рассмотрение суммы Валле-Пуссена

$$\sigma_{l,n}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=l-n}^{l} s_k(x).$$

Как хорошо известно [см., напр., ([16]), стр. 34], для любой непрерывной периодической функции $\varphi(x)$

$$\| \varphi - \sigma_{l,n}(\varphi) \| \leqslant 2 \frac{l+1}{n+1} E_{l-n}(\varphi).$$

В частности, если $l = 2n$, то

$$\| \varphi - \sigma_{2n,n}(\varphi) \| \leqslant 2 \frac{2n+1}{n+1} E_n(\varphi) \leqslant 4 E_n(\varphi).$$

Применяя эту оценку к заданной функции $f(x)$, получаем, что

$$\| f - s_n \| \leqslant \| f - \sigma_{2n,n} \| + \| \sigma_{2n,n} - s_n \| \leqslant 4 E_n(f) + \| \sigma_{2n,n} - s_n \|. \tag{4.8}$$

Но

$$\sigma_{2n,n}(x) - s_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=n+1}^{2n} \{ s_\nu(x) - s_n(x) \} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{n < n_k \leqslant 2n} (2n + 1 - n_k) \rho_{n_k} \cos(n_k x - \varphi_k),$$

откуда

$$\| \sigma_{2n,n} - s_n \| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{n<n_k\leqslant 2n} (2n+1-n_k)\,\rho_{n_k} \leqslant \sum_{n<n_k\leqslant 2n} \rho_{n_k}. \tag{4.9}$$

Далее, замечая, что [см., напр., (15)]

$$\rho_{n_k} \leqslant \frac{4}{\pi} E_{n_k-1}(f) \leqslant \frac{4}{\pi} E_n(f) \quad (n < n_k),$$

выводим из (4.8) и (4.9):

$$R_n(f) \leqslant 4E_n(f) + \frac{4}{\pi} \{N(2n) - N(n)\} E_n(f).$$

Теперь остается только заметить, что, в силу условия $N \in Л_\sigma$,

$$N(2n) - N(n) = O(1),$$

откуда

$$R_n(f) = O(E_n(f)),$$

и теорема доказана.

Заметим, что так как по теореме Сидона (B)

$$A_n(f) = \sum_{n_k>n} \rho_{n_k} = O(R_n(f))$$

и, кроме того, очевидно,

$$E_n(f) \leqslant A_n(f),$$

то из этой теоремы вытекает такое

Следствие. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида* (4.5), *причем $N \in Л_\sigma$. Тогда*

$$E_n(f) \sim R_n(f) \sim A_n(f). \tag{4.10}$$

В заключение получим небольшое уточнение теоремы 2 моей работы (14).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \cos(n_k x - \alpha_k) \quad (\rho_k \geqslant 0), \tag{4.11}$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 3 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Тогда

$$A_n(f) = \sum_{n_k>n} \rho_{n_k} \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda-1}} E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Доказательство. Для любого натурального k и любого целого p положим

$$x_p^{(k)} = \frac{p\pi + \alpha_k}{n_k}. \tag{4.14}$$

Зафиксируем числа k и p и обозначим через $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$ ближайшую к $x_p^{(k)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+1)}$, где m — целое. Очевидно, $m_1 = m_1(k,\ p)$ и

$$\left| x_p^{(k)} - x_{p+2m_1}^{(k+1)} \right| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+1}}.$$

Далее, обозначим через $x_{p+2m_2}^{(k+2)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+2)}$, ближайшую к $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$, и т. д. Таким путем мы получаем последовательность

$$\{x_{p+2m_l}^{(k+l)}\} \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m_0 = 0),$$

причем числа $m_l = m_l(k,\ p)$ — целые и

$$\left| x_{p+2m_l}^{(k+l)} - x_{p+2m_{l+1}}^{(k+l+1)} \right| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.15}$$

Так как, в силу (4.12), ряд $\sum n_k^{-1}$ сходится, то существует предел

$$\tilde{x}_p^{(k)} = \lim_{l \to \infty} x_{p+2m_l}^{(k+l)}.$$

Изучим некоторые свойства чисел $\tilde{x}_p^{(k)}$. В силу (4.15), имеем:

$$\left| x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \tilde{x}_p^{(k)} \right| \leqslant \sum_{h=l}^{\infty} \left| x_{p+2m_h}^{(k+h)} - x_{p+2m_{h+1}}^{(k+h+1)} \right| \leqslant \pi \sum_{h=l}^{\infty} \frac{1}{n_{k+h+1}},$$

откуда, согласно (4.12),

$$\left| x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \tilde{x}_p^{(k)} \right| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \sum_{h=l}^{\infty} \frac{n_{k+l+1}}{n_{k+h+1}} \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^{-s} =$$

$$= \frac{\pi\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{n_{k+l+1}} \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.16}$$

Покажем, что

$$\tilde{x}_{p+1}^{(k)} > \tilde{x}_p^{(k)} \quad \text{и} \quad \tilde{x}_{2n_k}^{(k)} - \tilde{x}_1^{(k)} < 2\pi. \tag{4.17}$$

В самом деле, в силу (4.14) и (4.16),

$$\tilde{x}_{p+1}^{(k)} - \tilde{x}_p^{(k)} = (\tilde{x}_{p+1}^{(k)} - x_{p+1}^{(k)}) - (\tilde{x}_p^{(k)} - x_p^{(k)}) + (x_{p+1}^{(k)} - x_p^{(k)}) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{2\pi\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{n_{k+1}} + \frac{\pi}{n_k} = \frac{\pi}{n_k}\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda - 1}\frac{n_k}{n_{k+1}}\right) \geqslant \frac{\pi}{n_k}\left(1 - \frac{2}{\lambda - 1}\right) > 0,$$

так как $\lambda > 3$. Аналогично устанавливается и второе неравенство (4.17).

Рассмотрим функцию

$$r_{n_{k-1}}(x) = f(x) - s_{n_{k-1}}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{n_{k+l}} \cos(n_{k+l}\, x - \alpha_{k+l}).$$

Имеем:

$$\cos(n_{k+l}\widetilde{x}_p^{(k)} - \alpha_{k+l}) = \cos\{n_{k+l}(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}) + n_{k+l}x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \alpha_{k+l}\} =$$

$$= \cos\{n_{k+l}(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}) + (2m_l + p)\pi\} = (-1)^p \cos n_{k+l}(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}),$$

откуда, в силу (4.16),

$$(-1)^p \cos(n_{k+l}\widetilde{x}_p^{(k)} - \alpha_{k+l}) \geqslant \cos\frac{\pi\lambda n_{k+l}}{(\lambda-1)n_{k+l+1}} \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Используя эту оценку, выводим, что

$$(-1)^p r_{n_{k-1}}(\widetilde{x}_p^{(k)}) \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{n_{k+l}} = \cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_{n_{k-1}}(f). \tag{4.18}$$

Таким образом, в силу (4.17) и (4.18), функция $r_{n_{k-1}}(x)$ принимает в $2n_k$ последовательных точках $\widetilde{x}_p^{(k)}$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n_k)$ одного периода с чередующимися знаками значения, по абсолютной величине не меньшие, чем

$$\cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_{n_{k-1}}(f).$$

Применяя теорему Валле-Пуссена ([16]), выводим отсюда, что

$$E_n(r_{n_{k-1}}) = E_n(f) \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_{n_{k-1}}(f) = \cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_n(f)$$

$$(n_{k-1} \leqslant n < n_{k+1}).$$

Итак,

$$A_n(f) \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda-1}}E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и теорема доказана.

Отметим несколько следствий.

Следствие 1. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k}\cos(n_k x - \alpha_k) \quad (\rho_{n_k} \geqslant 0),$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 3 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k} \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda-1}}\max_x|f(x)|. \tag{4.19}$$

Для вывода этого следствия достаточно положить в теореме $5n = 0$.

Следствие 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 5. *Тогда*

$$\cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_n(f)\leqslant E_n(f)\leqslant R_n(f)\leqslant A_n(f)\quad(n=0,\,1,\,2,\ldots). \tag{4.20}$$

Сопоставляем теорему 5 с очевидными неравенствами

$$E_n(f)\leqslant R_n(f)\leqslant A_n(f)\quad(n=0,\,1,\,2,\ldots).$$

Следствие 3. *Пусть непрерывная периодическая функция* $f(x)$ *имеет ряд Фурье вида* (4.11), *где*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}=q_k\to\infty\quad(k\to\infty). \tag{4.21}$$

Тогда

$$E_n(f)\approx R_n(f)\approx A_n(f)\quad(n\to\infty). \tag{4.22}$$

Применяем теорему 5 к $r_{n_{k-1}}(x)$. Это следствие совпадает с упомянутой выше теоремой 2 из работы [14].

Математический институт
имени В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
28. X. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach S., Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, Studia Math., 2 (1930), 207—220, 251.
[2] Fatou P., Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., 30 (1906), 335—400.
[3] Littlewood J. E., A Theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2), 23 (1924), 94—103.
[4] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.
[5] Paley R. E. A. C. and Zygmund A., On some series of functions, Proc. Cambr. Phil. Soc., 26 (1930), 337—357.
[6] Riesz F., Über die Fourier-Koeffizienten stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. Zeitschr., 2 (1918), 312—315.
[7] Salem R., Sur les proptiétés extrémales de certaines polynomes trigonométriques, C. R., 196 (1933), 1776—1778.
[8] Salem R., Essais sur les séries trigonométriques, Act. Sc. et Industr., No 862, Paris, 1940.
[9] Sidon S., Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen, in denen sehr viele Glieder fehlen, Math Ann., 96 (1926), 418—419.
[10] Sidon S., Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen mit Lücken, Math. Ann. 97 (1927), 675—676.
[11] Sidon S., Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, Math. Ann., 106 (1932), 536—539.
[12] Sidon S., Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen, Acta Szeged, 7 (1934), 85—94.
[13] Sidon S., Über orthogonale Entwicklungen, Acta Szeged, 10 (1943), 206—253.
[14] Стечкин С. Б., Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами, Доклады Ак. наук СССР, 76 (1951), 33—36.

[15] Стечкин С. Б., Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами, Успехи матем. наук, 7, в. 1(47), (1952), 147—149.

[16] Vallée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réele, profésées à la Sorbonne, Paris, 1919.

[17] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[18] Zygmund A., Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances, Studia Math., 3 (1931), 77—91.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 413—436

С. Л. СОБОЛЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматривается алгорифм решения интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма для функций одной независимой переменной с непрерывным ядром, основанный на замене интеграла суммой. Возможность такой замены устанавливается при помощи теоремы о регулярном приближении вполне непрерывных операторов (сильная сходимость при равномерной полной непрерывности приближающих операторов). Вводится понятие о замыкании вычислительного алгорифма и указывается на возможность потери знаков в вычислениях в случае, если алгорифм имеет нерегулярное замыкание. Указываются другие применения понятия о замыкании вычислительных алгорифмов [см. (1), (2)].

§ 1. Замыкание вычислительных алгорифмов

Решение многих задач математической физики и вообще задач анализа, в которых неизвестными служат функции одной или многих независимых переменных, или, более обще, — элемент какого-либо функционального пространства, подчас бывает довольно сложным и состоит из большого числа арифметических и логических операций. В конечном итоге эти действия приводят к приближенному решению, выражаемому при помощи конечного множества элементов, конечной значности. Приближенное решение по большей части зависит от некоторых параметров, одного или нескольких, определяющих качество этого приближения. Такими параметрами могут служить, например, размеры шагов в методе конечных разностей или количество последовательных приближений при итерациях.

При стремлении этих параметров к своим предельным значениям (в том числе, быть может, к бесконечности) приближенное решение стремится к истинному в смысле той сходимости, которая осуществляется в изучаемом пространстве.

Типичным приемом для решения уравнения

$$Lu = f \tag{1}$$

в функциональном пространстве U с правой частью из пространства F является замена оператора L таким приближенным оператором L_k над

конечной аппроксимацией U_k пространства U, для которого обращение может быть найдено конечным числом шагов. Уравнение

$$L_k u_k = f_k, \tag{2}$$

где $u_k \in U_k$, решают, преобразуя его в цепочку уравнений

$$L_k^{(m)} u_k = D_k^{(m)} f, \tag{3}$$

где m пробегает значения 1, 2, 3, ..., N. При $m = N$ $L_k^{(N)} \equiv E$, где E — тождественный оператор, т. е.

$$u_k = D_k^{(N)} f_k.$$

Аппроксимация зависит, вообще говоря, от некоторых параметров $h_1, h_2, \ldots, h_r$, и при $h_s \to 0$, $s = 1, 2, \ldots, r$, замыканием дискретного множества U_k будет служить пространство U, замыканием оператора L_k — оператор L, а пределом f_k — функция f.

Последовательность (3) вместе со способом аппроксимации U, L и f через U_k, L_k и f_k составляет вычислительный алгорифм T решения уравнения (1).

Иногда цепочку (3) записывают в виде:

$$L_k^{(m)} u_k = \varphi_k^{(m)}. \tag{3*}$$

вычисляя фактически $\varphi_k^{(m)} = D_k^{(m)} f_k$.

Может случиться, что не только u_k, L_k и f_k стремятся соответственно к u, L и f при $h_s \to 0$, $s = 1, 2, \ldots, r$, но и вся цепочка уравнений (3) [или (3*)], точнее $L_k^{(m)}$ и $D_k^{(m)}$ или $\varphi_k^{(m)}$, имеет в пределе некоторый смысл.

Пусть имеется некоторое упорядоченное множество функций $m(h_1, h_2, \ldots, h_r, z)$, зависящих от вещественного параметра z, определенных на множестве $\mathfrak{E}_z$ и таких, что

$$m(h_1, h_2, \ldots, h_r, z_1) \geqslant m(h_1, h_2, \ldots, h_r, z_2) \quad \text{при } z_1 > z_2. \tag{4}$$

Предположим, что при соответствующем определении предельного перехода (способ его определения обычно не представляет затруднений) и при $h_s \to 0$, $s = 1, 2, \ldots, q$, пространство U_k переходит в некоторое пространство $U_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}$, F_k переходит в $F_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}$, операторы $L_k^{(m)}$, $D_k^{(m)}$ стремятся к своим предельным значениям $L_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}$, $D_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}$ с областью значений в пространстве $\Phi^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}$ и, наконец, $\varphi_k^{(m)}$ и f_k также стремятся к пределу. Таким образом, вместо (3) или (3*) мы получим в пределе:

$$L_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} u^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} = D^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} f^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} \tag{5}$$

или

$$L_k^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} u^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)} = \varphi^{(z, h_{q+1}, \ldots, h_r)}. \tag{5*}$$

Определение. Если формулы (5) [или (5*)] имеют смысл, то мы будем называть их замыканием вычислительного алгорифма T.

Как легко видеть, замыкание вычислительного алгорифма зависит, вообще говоря, от способа предельного перехода. Укажем один пример замыкания вычислительного алгорифма.

Рассмотрим уравнение Пуассона с двумя переменными:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{6}$$

в квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{7}$$

Пусть требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям Дирихле:

$$u|_S = \omega(Q), \quad Q \in S. \tag{8}$$

Оператор Lu в данном случае есть оператор, приводящий в соответствие любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x, y)$ пару функций: $u|_S$, определенную на границе квадрата, и Δu, определенную внутри квадрата. U есть пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций в квадрате, а F — пространство пар непрерывных функций, из которых одна задана на границе квадрата, а другая — внутри него.

Исследуем вычислительный алгорифм итераций T_{un} для этой задачи, состоящий в следующем.

Пространство функций, заданных в квадрате, заменим пространствами дискретных функций, заданных на сетках $x = jh_1$, $y = lh_2$, где $h_1 = \frac{1}{M_1}$, $h_2 = \frac{1}{M_2}$ (M_1, M_2 — целые числа), вычисляемых с точностью до γ_i.

Оператор $L_k u$ определим при помощи простейшего приема: на границе это будут просто значения u в соответствующих точках, а внутри:

$$L_k u = -\frac{1}{h_1^2}[u(x + h_1, y) + u(x - h_1, y) - 2u(x, y)] - \\ - \frac{1}{h_2^2}[u(x, y + h_2) + u(x, y - h_2) - 2u(x, y)]. \tag{9}$$

Уравнение $L_k u_k = f_k$ при $h_1 = h_2$ будем решать при помощи метода итераций. В качестве нулевого приближения возьмем произвольную непрерывную функцию $u_0(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$u_0|_S = \omega(Q), \quad Q \in S. \tag{10}$$

Проводя вычисления с точностью до γ_i, мы для m-го приближения во всех внутренних точках будем иметь:

$$u_m(x, y) = \frac{h^2}{4} f(x, y) + \frac{1}{4}[u_{m-1}(x + h, y) + \\ + u_{m-1}(x - h, y) + u_{m-1}(x, y + h) + u_{m-1}(x, y - h)]. \tag{11}$$

В точках границы u_m и u_0 будут принимать значения $\omega(Q)$. При достаточно большом m u_m будет давать решение нашей задачи с любой точностью.

Еще O'Brien, Kaplan и Hyman [5] обратили внимание на аналогию между описанным алгорифмом и алгорифмом решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - f(x, y) \tag{12}$$

методом сеток. Проследим эту связь подробнее.

Если заменить область $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z < \infty$ сеточным множеством $x = jh,\ y = lh,\ z = m\frac{h^2}{4}$ и на нем оператор $\frac{\partial v}{\partial z} - \Delta v$ — оператором

$$\frac{4}{h^2} \cdot \Big\{ v(x, y, z+\tau) - \frac{1}{4}\,[v(x+h, y, z) + v(x-h, y, z) + v(x, y+h, z) + v(x, y-h, z)] \Big\}, \tag{13}$$

то формулы для $u\left(jh, lh, m\frac{h^2}{4}\right)$ будут теми же самыми, что формулы (11) для построения $u_m(jh, lh)$.

Функция $u_m(x, y)$, вычисленная по рекуррентным формулам (11), будет, следовательно, иметь вид:

$$u_m(jh, lh) = v\left(jh, lh, m\frac{h^2}{4}\right). \tag{14}$$

Равенство (14), где $v\left(jh, lh, m\frac{h^2}{4}\right)$ вычислено фактически, и представляет собою конкретное осуществление цепочки (3*) для нашей задачи. Здесь $v\left(jh, lh, m\frac{h^2}{4}\right)$ совпадает с $\varphi_k^{(m)}$. Легко убедиться, что алгорифм T_{um} имеет замыкание при $h \to 0$. Положим

$$m(h, \eta, z) = \left[\frac{4z}{h^2}\right] \tag{15}$$

(жирные прямые скобки, как обычно, обозначают целую часть). При $h,\ \eta \to 0$ вместо (14) получим:

$$u(x, y, z) = v(x, y, z). \tag{16}$$

Равенство (16), где $v(x, y, z)$ — решение (12) при условиях

$$v(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v|_S = \omega(Q), \quad Q \in S,$$

и дает замыкание алгорифма T_{um}.

Аналогичным образом можно построить и другие примеры замыкания алгорифмов. Например, переходя в (9) к пределу при $h_2 \to 0$, мы получим формулы так называемого «метода прямых» для уравнения (7).

§ 2. Регулярные и нерегулярные замыкания вычислительного алгорифма

Пусть $L^z u = D^z f$ есть замыкание вычислительного алгорифма T. Если операторы L^z и D^z действуют в метрическом пространстве, то они могут быть как ограниченными, так и неограниченными в соответствующей метрике.

Мы будем говорить, что алгорифм T имеет регулярное замыкание, если L^z и D^z равномерно ограничены. Если L^z и D^z не ограничены, то мы будем говорить, что алгорифм T имеет нерегулярное замыкание.

Нетрудно убедиться в том, что если алгорифм T имеет нерегулярное замыкание, то при его осуществлении могут возникнуть серьезные затруднения, как только мы будем повышать точность исследования.

В следующих параграфах на примере интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода с непрерывным ядром для функции $\varphi(x)$ одной независимой переменной мы подробно проиллюстрируем различные обстоятельства, которые при этом могут иметь место.

§ 3. Приближение решения интегральных уравнений типа Фредгольма

В настоящей работе мы будем рассматривать линейное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода для функции $\varphi(x)$ одной независимой переменной x, заданной в конечном промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{17}$$

или

$$(E - A)\varphi = f, \tag{18}$$

где

$$A\varphi \equiv \int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Ядро этого уравнения $K(x, y)$ мы будем считать непрерывной функцией по обеим переменным.

Для решения этого уравнения часто прибегают к замене его системой линейных алгебраических уравнений с N неизвестными $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ вида:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}\varphi_j + f_i, \tag{19}$$

где

$$\varphi_i = \varphi(t_i), \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqslant 1, \tag{20}$$

а K_{ij} — какие-либо квадратурные коэффициенты в приближенном выражении оператора A. Для решения системы уравнений (19) существует много различных приемов. В основном они сводятся к двум: к методу итераций и к методу последовательного исключения неизвестных. Итерации, как известно, сходятся далеко не всегда, что же касается метода последовательных исключений, то этот метод в принципе позволяет всегда найти решение задачи, хотя при этом иногда приходится проделывать очень большое количество действий.

Однако и в методе последовательных исключений, как мы покажем ниже, могут встретиться некоторые затруднения принципиального характера.

Мы покажем, что алгорифм решения уравнения (17) при помощи замены его конечной системой и последовательных исключений может иметь нерегулярное замыкание.

Как мы увидим далее, с этим будет связан и ряд дальнейших неприятностей: решая уравнение с помощью такого алгорифма, мы будем в вычислениях терять значащие цифры и поэтому для получения решения с нужной точностью нам придется вести счет с излишним количеством знаков.

§ 4. Приближения линейного оператора

Линейный оператор

$$A\varphi \equiv \int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

с непрерывным ядром $K(x, y)$ является вполне непрерывным оператором в пространстве C непрерывных функций, заданных в промежутке $(0,1)$. Если уравнение (17) разрешимо при любой правой части, то оператор $(E - A)$ имеет обратный $(E - A)^{-1} = E + \Gamma$, где

$$\Gamma f = \int_0^1 \Gamma(x, y)\,f(y)\,dy.$$

Функция $\Gamma(x, y)$ называется резольвентой ядра $K(x, y)$. Решение (18) представляется формулой

$$\varphi = (E + \Gamma) f. \tag{21}$$

Напомним, что $E + \Gamma$ является одновременно и левым и правым обратным оператором для $E - A$, а следовательно, является единственным обратным для него.

Очевидно, что из формул:

$$(E + \Gamma)(E - A) = E,$$
$$(E - A)(E + \Gamma) = E$$

после раскрытия скобок следует:

$$\Gamma - A - \Gamma A = 0, \tag{22}$$
$$\Gamma - A - A\Gamma = 0. \tag{23}$$

Эти уравнения называются интегральными уравнениями для резольвенты.

Рассмотрим некоторую последовательность линейных операторов $A_N\varphi$. Принято говорить, что эта последовательность сильно сходится к оператору A, если для любой функции φ из C последовательность

$$A_N\varphi \tag{24}$$

равномерно сходится к $A\varphi$ (сходится в метрике пространства C). Из сильной сходимости операторов A_N к оператору A, разумеется, не вытекает сходимость операторов A_N к A по норме, или так называемая равномерная сходимость. Иными словами,

$$\|A_N - A\| \tag{25}$$

при этом не обязана стремиться к нулю (напомним, что $\|A\|$ определяется равенством $\|A\| = \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|A\varphi\|$). Однако имеет место следующая теорема Банаха:

Если последовательность A_N сильно сходится к A, то $\|A_N\|$ ограничена.

$$\|A_N\| < M. \tag{26}$$

[Эта теорема справедлива для любых полных пространств, см., например, ([6])].

Будем говорить, что множество операторов A_N является равномерно вполне непрерывным, если оно преобразует всякое ограниченное множество из C в компактное, иными словами, если $\sum_N A_N \Phi$ — компактное множество.

Замечание. Равномерно вполне непрерывное множество операторов является ограниченным.

Это очевидно в силу того, что, допустив существование таких элементов ψ_n, для которых

$$\|\psi_n\| = 1, \quad A_n \psi_n \to \infty, \tag{27}$$

мы имели бы для такого ограниченного $\{\psi_n\}$ некомпактное множество $\{A_n \psi_n\}$, что противоречит условию равномерной полной непрерывности. Если операторы A_n сильно сходятся к A и, кроме того, равномерно вполне непрерывны, то будем говорить, что A_n правильно приближают оператор A.

ЛЕММА. *Если существует последовательность ψ_n такая, что $\|\psi_n\| \geqslant h$ и*

$$\lim_{n \to \infty} (E - A_n) \psi_n = 0, \tag{28}$$

причем A_n правильно приближают A, то оператор $(E - A)$ не имеет обратного.

Не уменьшая общности, можно считать, что $\|\psi_n\| = 1$. В противном случае мы выбрали бы новую последовательность

$$\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|},$$

которая снова будет удовлетворять условиям леммы.

Последовательность $A_n \psi_n$ будет компактной, и мы можем считать ее сильно сходящейся, сохранив в ней сходящуюся подпоследовательность и отбросив остальное.

Пусть

$$\lim A_n \psi_n = \xi_0. \tag{29}$$

Докажем, что ψ_n будет сильно сходиться в C к ξ_0. Действительно,

$$\lim \psi_n = \lim (E - A_n) \psi_n + \lim A_n \psi_n = \xi_0.$$

Очевидно, что $\|\xi_0\| = 1$. Покажем, что ξ_0 будет служить собственным элементом для оператора A. Действительно,

$$(E - A) \xi_0 = (A_n - A) \xi_0 + (E - A_n)(\xi_0 - \psi_n) + (E - A_n) \psi_n.$$

Первое слагаемое правой части этого равенства стремится к нулю в силу сильной сходимости A_n к A, второе — в силу сходимости ψ_n к ξ_0 и ограниченности операторов $(E - A_n)$ и, наконец, последнее слагаемое стремится к нулю в силу условия леммы. Следовательно, $(E - A) \xi_0$ по норме меньше любого наперед заданного числа и, значит, равно

нулю, т. е. ξ_0 есть собственный элемент для уравнения $(E-A)\xi_0$. В силу теорем Фредгольма, обратного оператора для $(E-A)$ не существует, что и требовалось доказать.

Обозначим через Γ оператор резольвенты для A, т. е. положим

$$(E-A)^{-1} = E + \Gamma, \tag{30}$$

и пусть Γ_n суть резольвенты для операторов A_n.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Если A_n — последовательность операторов, правильно приближающих оператор A, и если оператор $(E-A)$ имеет обратный, то все операторы $(E-A_n)$, начиная с некоторого, также будут иметь обратные. При этом последовательность резольвент Γ_n для A_n будет правильно приближать резольвенту Γ оператора A.*

В самом деле, операторы $(E-A_n)$, начиная с некоторого, должны иметь обратные, иначе, по теореме Фредгольма, среди них нашлась бы такая бесконечная последовательность, каждый член которой имел бы равный единице по норме собственный элемент ψ_n:

$$(E-A_n)\psi_n = 0, \quad \|\psi_n\| = 1. \tag{31}$$

По лемме, отсюда сразу следовало бы, что оператор $(E-A)$ не имеет обратного, а это противоречит условию теоремы.

Установим, что $E+\Gamma_n$ будут сильно сходиться к $E+\Gamma$. Предположим противное. Тогда найдется такой элемент ξ_0 и такая подпоследовательность Γ_{n_k}, что

$$(E-\Gamma_{n_k})\xi_0 - (E+\Gamma)\xi_0 = \psi_k, \tag{32}$$

где $\|\psi_k\| > h$. Применяя к обеим частям (32) оператор $E-A_{n_k}$, получим:

$$(E-A_{n_k})\psi_k = \xi_0 - (E-A_{n_k})(E+\Gamma)\xi_0 =$$

$$\xi_0 - (E-A)(E+\Gamma)\xi_0 + (A_{n_k}-A)(E+\Gamma)\xi_0 = (A_{n_k}-A)(E+\Gamma)\xi_0 \tag{33}$$

В силу сильной сходимости A_{n_k} к A, правая часть (33) стремится к нулю. Значит, к нулю стремится и левая часть, т. е.

$$\lim (E-A_{n_k})\psi_k = 0. \tag{34}$$

Применяя лемму, получим, что $(E-A)^{-1}$ не существует, а это противоречит условию теоремы. Значит, $E+\Gamma_n$ сильно сходится к $E+\Gamma$, т. е. Γ_n сильно сходится к Γ, что и требовалось доказать.

Остается показать равномерную полную непрерывность Γ_n.

В силу (23), имеем:

$$\Gamma_n = A_n(E+\Gamma_n). \tag{35}$$

По упомянутой выше теореме Банаха, операторы $E+\Gamma_n$ будут равномерно ограничены. Кроме того, A_n по условию равномерно вполне непрерывны. Следовательно, любое ограниченное множество преобразуется при помощи $A_n(E+\Gamma_n)$ в компактное и $\Gamma_n = A_n(E+\Gamma_n)$ равномерно вполне непрерывны, что и требовалось доказать.

§ 5. Приближения с помощью сумм

Вполне непрерывный оператор $A\varphi \equiv \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy$ можно приближать при помощи операторов вида

$$A_N\varphi = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)\varphi(t_n), \tag{36}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_N$ — точки из промежутка $0 \leqslant t \leqslant 1$.

К числу таких приближений относится, например, приближение при помощи замены интеграла в правой части суммой по методу прямоугольников (или с помощью какой-либо другой квадратурной формулы).

Разбивая промежуток $0 \leqslant y \leqslant 1$ на N равных частей длиной h, где $Nh = 1$, и взяв

$$t_n = \frac{h}{2} + (n-1)h,$$

$$K_n(x) = hK\left(x, (n-1)h + \frac{h}{2}\right),$$

получим приближенную формулу:

$$\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy \cong \sum_{n=1}^{N} K_n(x)\varphi(t_n) = A_N^*\varphi. \tag{37}$$

Для любой непрерывной функции φ при достаточно большом N левая часть (37) сколь угодно близка к правой и притом равномерно. Это следует из того, что $\operatorname{osc}_y K(x, y)\varphi(y)$ — колебание по y функций $K(x, \varphi)\varphi(y)$ — в промежутке $(n-1)h \leqslant y \leqslant nh$ стремится к нулю независимо от x, в силу теоремы Вейерштрасса, а разность

$$\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy - \sum_{n=1}^{N} K_n(x)\varphi(t_n)$$

не превосходит

$$\sup_n \operatorname*{osc}_{(n-1)h \leqslant y \leqslant nh} K(x, y)\varphi(y).$$

Операторы A_N вида (36) могут приближать оператор A правильно. В частности, это будет иметь место для приближений A_N^*, построенных выше при помощи интегрирования по способу прямоугольников.

Действительно, если

$$\|\varphi\| = \max|\varphi| = M, \tag{38}$$

то

$$|A_N\varphi| \leqslant M\sum|K_n(x)| \leqslant MA,$$

где $|K| < A$ и, значит,

$$\|A_N^*\| \leqslant MA.$$

Далее,

$$A_N\varphi(x'') - A_N\varphi(x') = \sum_{n=1}^{N} [K_n(x'') - K_n(x')]\varphi(y_n) \leqslant$$

$$\leqslant M\sum h \max|K_n(x'') - K_n(x')|. \tag{39}$$

При достаточно малом $|x'' - x'|$ правая часть (39) сколь угодно мала, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерной непрерывности функции $K(x, y)$.

Таким образом, семейство $K_N(\varphi_m)$, где φ_m равномерно ограничены само является равностепенно непрерывным и равномерно ограниченным.

В дальнейшем мы будем рассматривать не только операторы A_N, но и любые операторы, правильно приближающие A.

Пусть последовательность операторов $A_N\varphi$ вида (36) правильно приближает оператор $A\varphi$. Тогда, в силу доказанных лемм, решая уравнения

$$\varphi = A_N\varphi + f, \tag{40}$$

$$\varphi = A\varphi + f. \tag{41}$$

мы получим формулы

$$\varphi = f + \Gamma_N f, \tag{42}$$

$$\varphi = f + \Gamma f, \tag{42*}$$

где операторы Γ_N правильно приближают оператор Γ.

Будем называть алгорифмом сеток T_ε вычислительный алгорифм, сводящийся к замене уравнения (41) уравнением (40) и решению (40) последовательным исключением неизвестных. Рассмотрим этот алгорифм подробнее.

Решение уравнения $\varphi = A_N\varphi + f$ сводится, по существу, к решению линейной системы алгебраических уравнений (19).

Действительно, для того чтобы вычислить $A_N\varphi$, а следовательно, и φ, удовлетворяющее (40), достаточно знать значения φ в точках $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Пусть $B_1\varphi$ — оператор, приводящий в соответствие непрерывной функции φ вектор $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, где $\varphi_s = \varphi(t_s)$ из N-мерного пространства R_N.

Оператор A_N, действующий на функцию φ, очевидно, представляет собою произведение двух операторов:

$$A_N\varphi = A_N^* B_1\varphi, \tag{43}$$

где A_N^* — оператор, приводящий в соответствие вектору $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ непрерывную функцию

$$A_N^*\varphi = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)\varphi_n. \tag{44}$$

В таких обозначениях уравнение (40) принимает вид:

$$\varphi = A_N^* B_1\varphi + f. \tag{45}$$

Применяя к обеим частям этого уравнения оператор B_1, будем иметь:

$$B_1\varphi = B_1 A_N^* B_1\varphi + B_1 f. \tag{46}$$

Пусть оператор $B_1 A_N^* = \tilde{A}_N$, $B_1\varphi = \tilde{\varphi}$, $B_1 f = \tilde{f}$. Тогда для $B_1\varphi = \tilde{\varphi}$ получим:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{A}_N\tilde{\varphi} + \tilde{f} \tag{47}$$

Обозначим через $\mathscr{E}$ тождественный оператор в R_N. Решение уравнения (47) запишем в виде:

$$\tilde{\varphi} = (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N)\,\tilde{f}, \tag{48}$$

где

$$(\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N)(\mathscr{E} - \tilde{A}_N) = (\mathscr{E} - \tilde{A}_N)(\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) = \mathscr{E}, \tag{49}$$

или

$$\tilde{\Gamma}_N - \tilde{A}_N - \tilde{\Gamma}_N \tilde{A}_N = \tilde{\Gamma}_N - \tilde{A}_N - \tilde{A}_N \tilde{\Gamma}_N = 0.$$

Можно проверить, что резольвента оператора $(E - A_N^* B_1)$ дается формулой:

$$(E - A_N^* B_1)^{-1} = E + A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1,$$

или, если положить

$$A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) = \Gamma_N^*, \tag{50}$$

— формулой:

$$(E - A_N^* B_1)^{-1} = E - \Gamma_N^* B_1. \tag{51}$$

В самом деле, в силу (49), имеем:

$$(E - A_N^* B_1)(E + A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1) = E - A_N^* \mathscr{E} B_1 + A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1 - \\ - A_N^* \tilde{A}_N (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1 = E + A_N^* (\tilde{\Gamma}_N - \tilde{A}_N - \tilde{A}_N \tilde{\Gamma}_N) B_1 = E, \tag{52}$$

а также:

$$(E + A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1)(E - A_N^* B_1) = E - A_N^* \mathscr{E} B_1 + A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) B_1 - \\ - A_N^* (\mathscr{E} + \tilde{\Gamma}_N) \tilde{A}_N B_1 = E + A_N^* (\tilde{\Gamma} - \tilde{A}_N - \tilde{\Gamma}_N \tilde{A}_N) B_1 = E, \tag{53}$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Другой прием сведения задачи к алгебраической системе

Можно указать еще один прием для приближенного сведения уравнения (41) к линейной алгебраической системе.

Заменим ядро $K(x, y)$ приближенно кусочно-постоянной функцией

$$K_N^{(1)}(x, y) = K(t_k, t_l) \quad \left(|x - t_k| < \frac{h}{2}, \quad |y - t_l| < \frac{h}{2}\right), \tag{54}$$

где t_k и t_l определены, как прежде.

Оператор

$$A_N^{(1)} \varphi \equiv \int_0^1 K_N^{(1)}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

будет при этом осуществлять преобразование C уже не в C, а в пространство M ограниченных измеримых функций — изометричное расширение C. В этом пространстве оператор $A_N^{(1)}$ будет равномерно стремиться к A. В самом деле,

$$\|(A_N^{(1)} - A)\,\varphi\| \leqslant \max \int_0^1 |K_N^{(1)}(x, y) - K(x, y)|\, dy \max |\varphi| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|, \tag{55}$$

что и требовалось доказать.

Хорошо известно, что при равномерной сходимости $A_N^{(1)}$ к A из существования обратного у $(E - A)$ вытекает существование обратного элемента у всех $(E - A_N^{(1)})$, начиная с некоторого, причем

$$\Gamma_N^{(1)} = (E - A_N^{(1)})^{-1} - E$$

будут равномерно приближать

$$\Gamma = (E - A)^{-1} - E.$$

Уравнение

$$(E - A_N^{(1)})\,\varphi = f \tag{56}$$

можно решать приемом, аналогичным тому, который был использован для решения уравнений (40).

С этой целью введем оператор B_2, переводящий C (или M) в N-мерное эвклидово пространство векторов $\tilde{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ следующей формулой:

$$\varphi_k = \frac{1}{h} \int\limits_{(k-1)h + \frac{h}{2}}^{kh + \frac{h}{2}} \varphi(y)\,dy$$

Пусть, далее, $A_N^{(1)}$ — оператор, приводящий в соответствие вектору $\tilde{\varphi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ функцию по формуле:

$$A_N^{(1)}\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} K^{(1)}\left[x, (k-1)h + \frac{h}{2}\right]\varphi_k \tag{57}$$

Тогда, раскрывая выражение для $A_N^{(1)}\varphi$, будем иметь:

$$A_N^{(1)}\varphi = A_N^{(1)*}B_2\varphi. \tag{58}$$

Записывая уравнение (56) в виде

$$\varphi - A_N^{(1)*}B_2\varphi = f$$

и умножая обе его части на B_2, получим:

$$B_2\varphi - B_2A_N^{(1)}B_2\varphi = f. \tag{59}$$

Полагая $B_2\varphi = \tilde{\varphi}$, $B_2A_N^{(1)} = \tilde{\tilde{A}}_N$ и $B_2f = \tilde{\tilde{f}}$, перепишем (59) в виде

$$(\mathcal{E} - \tilde{\tilde{A}}_N)\,\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{f}}. \tag{60}$$

Это векторное уравнение, очевидно, решается, если найти

$$(\mathcal{E} - \tilde{\tilde{A}}_N)^{-1} = \mathcal{E} + \tilde{\tilde{\Gamma}}_N. \tag{61}$$

Отсюда, так же как и для уравнения (45), выводим:

$$(E - A_N^{(1)*}B_2)^{-1} = E + \Gamma_N^{(1)*}B_2, \tag{62}$$

где

$$\Gamma_N^{(1)*} = A_N^{(1)*}(\mathcal{E} + \tilde{\tilde{\Gamma}}_N). \tag{63}$$

§ 7. Частично разрешенные уравнения

Вернемся к изучению интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{64}$$

Уравнение (64) представляет собою частный случай уравнения:

$$\varphi(x) - \int_z^1 \Gamma(x, y, z)\varphi(y)\,dy = f(x) + \int_0^z \Gamma(x, y, z) f(y)\,dy, \tag{65}$$

получаемый из (65) при $z = 0$. Другим частным случаем этого уравнения при $z = 1$ будет уравнение:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 \Gamma(x, y) f(y)\,dy, \tag{66}$$

которое дает нам явное решение (64) при помощи резольвенты Фредгольма.

Мы покажем, что, вообще говоря, в соответствие уравнению (64) можно построить систему равносильных ему уравнений типа (65) для всех z из промежутка $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Пусть $z_1 < z_2$. Напишем уравнение (65) при $z = z_1$ в виде:

$$\varphi(x) - \int_{z_1}^{z_2} \Gamma(x, y, z_1)\varphi(y)\,dy =$$

$$= f(x) + \int_0^{z_1} \Gamma(x, y, z_1) f(y)\,dy + \int_{z_2}^1 \Gamma(x, y, z_1)\varphi(y)\,dy. \tag{67}$$

При $z_1 \leqslant x \leqslant z_2$ уравнение (67) можно рассматривать как интегральное уравнение для функции $\varphi(x)$ в этом промежутке.

Для удобства вместо функции φ, определенной в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, введем временно три функции:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant z_1, \\ &\varphi_2(x), \quad z_1 \leqslant x \leqslant z_2, \\ &\varphi_3(x), \quad z_2 \leqslant x \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

и пусть интегральное соотношение (67) записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + A_{13}\varphi_3 + f_1, \\ \varphi_2 &= A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_2 + A_{23}\varphi_3 + f_2, \\ \varphi_3 &= A_{31}\varphi_1 + A_{32}\varphi_2 + A_{33}\varphi_3 + f_3. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Положим, что

$$(E - A_{22})^{-1} = E + \Gamma_{22}, \tag{70}$$

т. е.

$$(E - A_{22})(E + \Gamma_{22}) = (E + \Gamma_{22})(E - A_{22}) = E,$$

или

$$A_{22}\Gamma_{22} = \Gamma_{22}A_{22} = \Gamma_{22} - A_{22}; \tag{71}$$

исключая φ_2 из правой части всех уравнений (69), после несложных выкладок получим:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= B_{11}\varphi_1 + B_{12}f_2 + B_{13}\varphi_3 + f_1, \\ \varphi_2 &= B_{21}\varphi_1 + B_{22}f_2 + B_{23}\varphi_3 + f_2, \\ \varphi_3 &= B_{31}\varphi_1 + B_{32}f_2 + B_{33}\varphi_3 + f_3, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

где

$$B_{ij} = A_{ij} + A_{i2}A_{2j} + A_{i2}\Gamma_{22}A_{2j}. \tag{73}$$

Формулы (73) упрощаются в случае, если i или $j = 2$. Используя (71), получим:

$$\left.\begin{aligned} B_{i2} &= A_{i2} + A_{i2}\Gamma_{22}, \\ B_{2j} &= A_{2j} + \Gamma_{22}A_{2j}, \\ B_{22} &= \Gamma_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Формулы (72) являются, очевидно, взаимными к (69), в чем можно легко убедиться, заметив, что

$$(E - A_{22}) = (E + \Gamma_{22})^{-1}.$$

В интегральной форме уравнение (73) записывается в виде

$$\Gamma(x, y, z_2) = \Gamma(x, y, z_1) + \int_{z_1}^{z_2} \Gamma(x, t, z_1)\,\Gamma(t, y, z_1)\,dt + \int_{z_1}^{z_2}\int_{z_1}^{z_2} \Gamma(x, t, z_1)\,\Gamma(t, u, z_2)\,\Gamma(u, y, z_1)\,dt\,du, \tag{75}$$

а система (72) — в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{z_2} \Gamma(x, y, z_2)\,f(y)\,dy + \int_{z_2}^{1} \Gamma(x, y, z_2)\,\varphi(y)\,dy. \tag{76}$$

Аналогичными уравнениями занимался еще М. Г. Крейн [3], а также Н. П. Сергеев [4].

Из уравнения (65), справедливого при любых z, можно получить еще одно важное уравнение типа Вольтерра. Полагая в нем $x = z$, будем иметь:

$$\varphi(x) - \int_x^1 \Gamma(x, y, x)\,\varphi(y)\,dy = f(x) + \int_0^x \Gamma(x, y, x)\,f(y)\,dy.$$

Обозначив $\Gamma(x, y, x) = V(x, y)$, получим:

$$\varphi(x) - \int_x^1 V(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) + \int_0^x V(x, y)\,f(y)\,dy. \tag{77}$$

Уравнение (77) мы будем называть разрешающим уравнением Вольтерра для уравнения (64). Решение этого уравнения может быть получено

или методом последовательных приближений или каким-либо другим. По самому построению видно, что решение его совпадает с решением (64) в случае, если $V(x, y)$ будет непрерывной функцией.

Одновременно с частично разрешенным интегральным уравнением для

$$\varphi = A\varphi + f \tag{41}$$

мы будем рассматривать еще частично разрешенные уравнения для

$$\varphi = A_N\varphi + f \tag{40}$$

или

$$\tilde{\varphi} = \tilde{A}_N\tilde{\varphi} + \tilde{f}.$$

Нетрудно провести фактическое вычисление этих операторов. Будем рассматривать вектор $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ как совокупность двух векторов $\varphi^{(1)}: \varphi_1, \ldots, \varphi_{k(z)}$ и $\varphi^{(2)}: \varphi_{k(z)+1}, \varphi_{k(z)+2}, \ldots, \varphi_N$. При этом оператор B_1, введенный нами выше, будет парой операторов $B_{11}^{(z)}$ и $B_{12}^{(z)}$; первый из них переводит C в k-мерный вектор $\varphi^{(1)}$, а второй — в $(N-k)$-мерный вектор $\varphi^{(2)}$. Соответственно, оператор A_N^* есть сумма двух операторов $A_{N,1}^*$ и $A_{N,2}^*$:

$$A_N^*\varphi = A_{N,1}^*\varphi^{(1)} + A_{N,2}^*\varphi^{(2)},$$

в то время, как оператор $\tilde{A}_N$ будет иметь вид квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} B_{11}^{(z)}A_{N,1}^* & B_{12}^{(z)}A_{N,1}^* \\ B_{11}^{(z)}A_{N,2}^* & B_{12}^{(z)}A_{N,2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{N,11} & \tilde{A}_{N,12} \\ \tilde{A}_{N,21} & \tilde{A}_{N,22} \end{pmatrix}.$$

Полагая $(\mathcal{E} - \tilde{A}_{N,11})^{-1} = \mathcal{E} + \tilde{\Gamma}_{N,11}$, мы можем вместо (47) написать частично разрешенную систему:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \tilde{B}_{N,11}\varphi^{(1)} + \tilde{B}_{N,12}f^{(2)} + f^{(1)}, \\ \varphi^{(2)} &= \tilde{B}_{N,21}\varphi^{(1)} + \tilde{B}_{N,22}\tilde{f}^{(2)} + \tilde{f}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}_{N,22} &= \tilde{A}_{N,22} + \tilde{A}_{N,21}\tilde{A}_{N,12} + \tilde{A}_{N,21}\tilde{\Gamma}_{N,11}\tilde{A}_{N,12}, \\ \tilde{B}_{N,21} &= \tilde{A}_{N,21} + \tilde{A}_{N,21}\tilde{\Gamma}_{N,11}, \\ \tilde{B}_{N,12} &= \tilde{A}_{N,12} + \tilde{\Gamma}_{N,11}\tilde{A}_{N,12}, \\ \tilde{B}_{N,11} &= \tilde{\Gamma}_{N,11}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Умножая слева первое из равенств (78) на $A_{N,1}^*$, а второе — на $A_{N,2}^*$, мы получим:

$$\varphi = (A_{N,1}^*\tilde{B}_{N,11} + A_{N,2}^*\tilde{B}_{N,21})\varphi + (A_{N,1}^*\tilde{B}_{N,12} + A_{N,2}^*\tilde{B}_{N,22})f + f. \tag{80}$$

Это равенство и есть частично разрешенное уравнение, соответствующее (47), так как очевидно, что правая часть зависит только от значений φ для $x < z$ и значений f для $x \geqslant z$.

Обозначая через $A_N^{(z)}$ оператор

$$A_N^{(z)} = A_{N,1}^{*}\tilde{B}_{N,11} + A_{N,2}^{*}\tilde{B}_{N,21},$$

мы можем заключить, на основании доказанной выше теоремы, что если $(E - A^{(z)})$ имеет обратный оператор

$$(E - A^{(z)})^{-1} = E + \Gamma^{(z)},$$

то

$$(E - A_N^{(z)})^{-1} = E + \Gamma_N^{(z)},$$

начиная с некоторого N, будут существовать, и $\Gamma_N^{(z)}$ будут правильно приближать $\Gamma^{(z)}$.

Из доказанного вытекает важное следствие: алгорифм T_c решения интегрального уравнения (17) имеет замыкание. Этим замыканием служат частично разрешенные интегральные уравнения (65).

Следствием из доказанного являются также следующие две теоремы

ТЕОРЕМА 1. *Если ни одно из интегральных уравнений*

$$\varphi(x) - \int_0^z K(x, y)\varphi(y)\,dy = \psi(x) \qquad (81)$$

для разных $z \leqslant 1$, получающихся укорачиванием области интегрирования в уравнении (64), *не является особым, что обозначает, что ни для одного из этих уравнений не имеет места второй случай альтернативы Фредгольма, то алгорифм для решения этого уравнения имеет регулярное замыкание.*

При достаточно хорошей замене интегрального уравнения (64) системой линейных уравнений (при достаточно малом h) полученную алгебраическую систему можно решать методом поочередного исключения неизвестных.

ТЕОРЕМА 2. *Если для какого-либо z уравнение* (81) *разрешимо не при любой правой части, то при последовательном исключении неизвестных в соответствующей системе алгебраических уравнений замыкание алгорифма T_c для решения этого уравнения будет нерегулярным.*

В процессе исключения неизвестных мы будем при этом проходить через систему, сколь угодно близкую к неразрешимой, в зависимости от величины шага h. Чем лучше мы приблизим оператор, тем худшая система будет получаться в промежуточных выкладках. В § 8 и 9 мы покажем на примере, каково значение этой теоремы.

§ 8. Пример построения частично разрешенного уравнения

Для иллюстрации некоторых приложений рассмотренной теории приведем один пример.

Пусть

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy + f(x), \qquad (82)$$

где

$$K(x, y) = a + b\cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y.$$

Построим частично разрешенное уравнение. Очевидно, что из (82) следует:

$$\varphi(x) - \int_0^z (a + b\cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y)\,\varphi(y)\,dy = \omega(x, z), \tag{83}$$

где

$$\omega(x, z) = f(x) + \int_z^1 (a + b\cos 2\pi x \cos 2\pi y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Из (83) получим:

$$\varphi(x) = \omega(x, z) + aC_1(z) + bC_2(z)\cos 2\pi x, \tag{84}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(z) &= \int_0^z \varphi(y)\,dy, \\ C_2(z) &= \int_0^z \cos 2\pi y\,\varphi(y)\,dy. \end{aligned} \tag{85}$$

Подставляя (84) в (85), будем иметь:

$$C_1(z) = C_1(z)\,a\int_0^z dy + C_2(z)\,b\int_0^z \cos 2\pi y\,dy + \int_0^z \omega(y, z)\,dy,$$

$$C_2(z) = C_1(z)\,a\int_0^z \cos 2\pi y\,dy + C_2(z)\,b\int_0^z \cos^2 2\pi y\,dy + \int_0^z \cos 2\pi y\,\omega(y, z)\,dy,$$

или

$$C_1(z)\,[1 - az] - C_2(z)\,\frac{b}{2\pi}\sin 2\pi z = \int_0^z \omega(y, z)\,dy,$$

$$C_1(z)\left[-\frac{a}{2\pi}\sin 2\pi z\right] + C_2(z)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin 4\pi z\right)\right] = \int_0^z \omega(y, z)\cos 2\pi y\,dy.$$

Отсюда, решая уравнения относительно $C_1(z)$ и $C_2(z)$, получим:

$$C_1(z) = \frac{\int_0^z \omega(y, z)\left\{\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] + \frac{b}{2\pi}\sin 2\pi z\cos 2\pi y\right\} dy}{(1 - az)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] - \frac{ab}{4\pi^2}\sin^2 2\pi z},$$

$$C_2(z) = \frac{\int_0^z \omega(y, z)\left\{(1 - az)\cos 2\pi y + \frac{a}{2\pi}\sin 2\pi z\right\} dy}{(1 - az)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] - \frac{ab}{4\pi^2}\sin^2 2\pi z}.$$

Наконец, возвращаясь к формуле (84) и подставляя туда $C_1(z)$ и $C_2(z)$, находим:

$$\varphi(x) = \omega(x, z) + \int_0^z \omega(y, z) \frac{a\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] + \frac{b}{2\pi}\sin 2\pi z \cos 2\pi y}{(1 - az)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] - \frac{ab}{4\pi^2}\sin^2 2\pi z} +$$

$$+ \frac{b\cos 2\pi x\left[(1 - az)\cos 2\pi y + \frac{a}{2\pi}\sin 2\pi z\right]}{(1 - az)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] - \frac{ab}{4\pi^2}\sin^2 2\pi z}\, dy. \qquad (86)$$

Из этой последней формулы видно, каково будет выражение для $\Gamma(x, y, z)$ при $x \leqslant z$, $y \leqslant z$. Оно будет совпадать с дробью, стоящей под интегралом. Мы видим также, что резольвента $\Gamma(x, y, z)$ представляет собою аналитическую функцию переменных x, y, z и, следовательно, должна совпадать с $K(x, y, z)$ для всех значений x, y, z. Мы получим окончательно:

$$\varphi(x) - \int_z^1 K(x, y, z)\varphi(y)\, dy = f(x) + \int_0^z K(x, y, z) f(y)\, dy, \qquad (87)$$

где

$$K(x, y, z) =$$

$$= \frac{a\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] + \frac{ab}{2\pi}\sin 2\pi z\,[\cos 2\pi x + \cos 2\pi y] + (1 - az)\, b\cos 2\pi x \cos 2\pi y}{(1 - az)\left[1 - b\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right] - \frac{ab}{4\pi^2}\sin^2 2\pi z}. \qquad (88)$$

Формулы (87) и (88) дают явное выражение замыкания алгорифма T_c для решения нашего уравнения. Посмотрим, как будет вести себя ядро $K(x, y, z)$ при изменении z.

Знаменатель в выражении $K(x, y, z)$ может обратиться в нуль при некоторых значениях z. Это будет отвечать тем z, для которых уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^z K(x, y, z)\varphi(y)\, dy + \omega(x, z) \qquad (89)$$

будет иметь 1 собственным значением.

В зависимости от того, будут ли корни знаменателя (88) лежать в промежутке (0, 1), замыкание алгорифма T_c будет регулярным или нерегулярным. Пусть, например, $a = 2$ и $b \neq 4$. Тогда $z = \frac{1}{2}$ будет корнем знаменателя, ибо при этом обращаются в нуль как $(1 - az)$, так и $\sin^2 2\pi z$, и замыкание T_c будем нерегулярным.

Рассмотрим более детально поведение ядра $K(x, y, z)$ при $z \to \frac{1}{2}$ в этом случае.

Разлагая числитель и знаменатель в выражении $K(x, y, z)$ по степеням $\left(z-\frac{1}{2}\right)$, получим:

$$K(x, y, z) =$$

$$= \frac{2\left[1-b\left(\frac{z}{2}+\frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right]+\frac{b}{\pi}\sin 2\pi z\,(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y)+(1-2z)\,b\cos 2\pi x\cos 2\pi y}{(1-2z)\left[1-b\left(\frac{z}{2}+\frac{\sin 4\pi z}{8\pi}\right)\right]-\frac{b}{2\pi^2}\sin^2 2\pi z} =$$

$$= \frac{-\left(2b-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)b\,(1+\cos 2\pi x+\cos 2\pi y+\cos 2\pi x\cos 2\pi y)+o\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^3\right]}{\left(2b-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)+o\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^4\right]}, \quad (90)$$

откуда видно, что для $K(x, y, z)$ вблизи $z=\frac{1}{2}$ справедлива формула:

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2b}{1-4b}\,[1+\cos 2\pi x]\cdot[1+\cos 2\pi y]+o\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right]. \quad (91)$$

Исследуем, как будет решаться система алгебраических уравнений, соответствующая (82).

Решая интегральное уравнение при $a=2$, $b=4$ методом сведения его к системе алгебраических уравнений, заменим интеграл с помощью квадратурных формул, т. е. составим уравнение

$$(E-A_N)\,\varphi = f.$$

Для значений $z=\frac{1}{2}-\eta$, где η — достаточно малое число, оператор Γ_N будет сколь угодно близок к оператору Γ и, следовательно, матрица $\frac{1}{h}\Gamma_{N,\,n,m}$ сколь угодно велика. При этом ее бесконечная часть, имеющая вид $\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$, будет иметь преобладающее значение и на некотором шагу исключения конечные члены окажутся относительно незначительными по величине.

Если мы будем вести вычисления, сохраняя одну и ту же относительную погрешность (например, одно и то же число знаков), то чем меньше мы возьмем h, т. е. чем лучше приблизим A с помощью A_N, тем хуже получится точность окончательного результата. Это показывает значение теоремы 2 предыдущего параграфа.

§ 9. Дифференциальное уравнение для резольвенты

Из уравнения (75) нетрудно получить одно интересное следствие. Перенося $\Gamma(x, y, z_1)$ в левую часть и деля на z_2-z_1, будем иметь:

$$\frac{\Gamma(x, y, z_2)-\Gamma(x, y, z_1)}{z_2-z_1} = \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}\Gamma(x, t, z_1)\,\Gamma(t, y, z_2)\,dt +$$

$$+\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}\int_{z_1}^{z_2}\Gamma(x, t, z_1)\,\Gamma(t, u, z_2)\,\Gamma(u, y, z_1)\,du\,dt. \quad (92)$$

Очевидно, что при $z_2 - z_1 \to 0$ правая часть (92) имеет предел, равный

$$\Gamma(x, z_1, z_1)\,\Gamma(z_1, y, z_1).$$

Следовательно, левая часть также имеет предел, и мы получим:

$$\frac{d\Gamma(x, y, z)}{dz} = \Gamma(x, z, z)\,\Gamma(z, y, z). \tag{93}$$

Уравнение (93) является обобщенным обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной z с функциональной правой частью.

Обозначим, как и выше, через $\omega(x, z)$ функцию:

$$\omega(x, z) = f(x) + \int_0^z \Gamma(x, y, z)\, f(y)\, dy. \tag{94}$$

Очевидно $\omega(x, 1) = \varphi(x)$. Дифференцируя обе части равенства (94) по z, получим:

$$\frac{d\omega(x, z)}{dz} = \Gamma(x, z, z) f(z) + \int_0^z \frac{d\Gamma(x, y, z)}{dz} f(y)\, dy =$$

$$= \Gamma(x, z, z)\left[f(z) + \int_0^z \Gamma(z, y, z) f(y)\, dy\right] = \Gamma(x, z, z)\,\omega(z, z). \tag{95}$$

Из уравнения (95) можно усмотреть, что нахождение функции $\omega(x, z)$ сводится к простой квадратуре, если известна функция $\Gamma(x, z, z)$. Из (95) следует:

$$\omega(z, z) = \omega(0, 0)\, e^{\int_0^z \Gamma(z_1, z_1, z_1)\, dz_1},$$

$$\omega(x, z) = \omega(x, 0) + \int_0^z \Gamma(x, z_1, z_1)\,\omega(z_1, z_1)\, dz_1.$$

Следовательно, если бы мы стремились найти решение нашего интегрального уравнения при помощи резольвенты, нам было бы достаточно знать функцию $\Gamma(x, y, z)$ только для $y \geqslant z$.

Отметим, что для уравнения (93) сохраняет смысл целый ряд теорем, справедливых для обыкновенных уравнений, касающихся существования и единственности решений этого уравнения.

Докажем одну такую теорему.

ТЕОРЕМА. *В любом промежутке* $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$ *ограниченное решение уравнения* (93), *удовлетворяющее условию*

$$K(x, y, \alpha) = \varphi(x, y), \tag{96}$$

единственно.

Докажем эту теорему. Пусть $K_1(x, y, z)$ и $K_2(x, y, z)$ — два решения этой задачи таких, что

$$|K_1| < M, \quad |K_2| < M$$

в рассматриваемом промежутке. Тогда

$$\frac{\partial (K_2 - K_1)}{\partial z} = K_2(x, z, z)\, K_2(z, y, z) - K_1(x, z, z)\, K_1(z, y, z) =$$
$$= [K_2(x, z, z) - K_1(x, z, z)]\, K_2(z, y, z) - K_1(x, z, z,)\, [K_2(z, y, z) - K_1(z, y, z)],$$

откуда следует:

$$\frac{\partial (K_2 - K_1)}{\partial z} < M\, |K_2(x, z, z) - K_1(x, z, z)| + M\, |K_2(z, y, z) - K_1(z, y, z)|.$$

Но

$$K_2 - K_1 = \int_\alpha^z \frac{\partial (K_2 - K_1)}{\partial z}\, dz$$

и, значит,

$$|K_2 - K_1| \leqslant M \int_\alpha^z |K_2(x, z, z) - K_1(x, z, z)|\, dz +$$
$$+ M \int_\alpha^z |K_2(z, y, z) - K_1(z, y, z)|\, dz. \qquad (96^*)$$

Отсюда обычным методом полной математической индукции получаем:

$$|K_2(x, y, z) - K_1(x, y, z)| \leqslant \frac{(2Mz)^n}{n!}. \qquad (97)$$

Как легко видеть, из предположения, что (97) верно для некоторого n, и из (96*) следует справедливость (97) и для $n + 1$. Теорема доказана.

Если в примере § 8 положить $b = 0$, то уравнение (82) приобретает вид:

$$\varphi(x) = a \int_0^1 \varphi(y)\, dy + f(x). \qquad (98)$$

В этом частном случае его резольвенту легко получить, просто интегрируя уравнение (93).

Начальные условия в этом случае не зависят от x и y:

$$\Gamma(x, y, 0) = a.$$

Естественно искать его решение, не зависящее от x, y. При этом

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma^2(z) \qquad (99)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\,\frac{1}{\Gamma}}{dz} = -1,$$

откуда

$$\Gamma(z) = \frac{a}{1 - az}, \qquad (100)$$

что совпадает с результатом, полученным ранее. Особенность у решения подвижная и в данном случае она возникает при $z = \frac{1}{a}$.

Представляет интерес проследить, в каком отношении находится алгорифм последовательных исключений в алгебраической системе уравнений к дифференциальному уравнению (93).

Мы покажем, что метод последовательных исключений алгебраических неизвестных весьма близок к известному методу ломаных Эйлера в применении к дифференциальному уравнению (93).

Отметим пока одно важное обстоятельство: в только что рассмотренном нами примере все неизвестные входят симметрично, поэтому порядок их исключения не играет никакой роли. Отсюда следует, что, вообще говоря, от указанных нами неприятных потерь знака не может избавить прием выборки главных элементов по Гауссу. Происхождение этих потерь зависит от более глубоких причин, нежели неудачный порядок исключения неизвестных.

Исследуем более подробно процесс решения системы уравнений:

$$\varphi_j = \sum_{n=1}^{N} K_{jn}\varphi_n + f_j \tag{101}$$

при помощи последовательного исключения неизвестных.

Пусть такая частично разрешенная система уравнений будет:

$$\varphi_i - \sum_{j=s+1}^{N} K_{ij}^{(s)}\varphi_j = f_i + \sum_{j=1}^{s} K_{ij}^{(s)} f_j, \quad (s = 0, 1, \ldots, N). \tag{102}$$

Нетрудно найти зависимость между числами $K_{ij}^{(s)}$ из условия, что все уравнения (102) при различных s должны быть эквивалентны между собой. Эта зависимость хорошо известна. Решаем относительно φ_{s+1} уравнение (102) с номером $s+1$ и подставляем это значение во все остальные уравнения системы.

После некоторых простых выкладок мы получим:

$$\varphi_i - \sum_{j=s+2}^{N} \left\{ K_{ij}^{(s)} + \frac{K_{i,\,s+1}^{(s)} K_{s+1,\,j}^{(s)}}{1 - K_{s+1,\,s+1}^{(s)}} \right\} \varphi_j = f_i + \sum_{j=1}^{s} \left\{ K_{ij}^{(s)} + \frac{K_{i,\,s+1}^{(s)} K_{s+1,\,j}^{(s)}}{1 - K_{s+1,\,s+1}^{(s)}} \right\} f_j, \tag{103}$$

откуда выводим известные окончательные формулы:

$$K_{ij}^{(s+1)} = K_{ij}^{(s)} + \frac{K_{i,\,s+1}^{(s)} K_{s+1,\,j}^{(s)}}{1 - K_{s+1,\,s+1}^{(s)}}, \tag{104}$$

$$K_{ij}^{(0)} = K_{ij}. \tag{105}$$

Как легко видеть, (105) получается из (104) при $s = 0$. Сходство между формулами (104) и (93) бросается в глаза.

Введя обозначение

$$h\Gamma(t_i, t_j, t_s) = \Gamma_{ij}^{(s)},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_N$ — введенные выше точки на отрезке 0, 1, мы получим приближенно:

$$\frac{\Gamma(t_i, t_j, t_{i+1}) - \Gamma(t_i, t_j, t_s)}{h} = \Gamma_{i,\,s+1}^{(s)} \Gamma_{s+1,\,j}^{(s)}, \tag{106}$$

что совпадает с (104) с точностью до малых высшего порядка.

Таким образом, главный член в (104) — тот же, который мы получили бы, интегрируя (93) методом ломаных Эйлера.

Высказанное нами замечание позволяет ожидать, что для решения интегрального уравнения могут существовать алгорифмы, основанные на приближенном решении уравнения (93) и ведущие к цели быстрее, чем оба указанных. Как известно, метод ломаных далеко не является наилучшим при решении дифференциальных уравнений. Возможно, что к уравнению (93) можно было бы применить некоторые приемы, основанные на более точных формулах, как, например, метод Рунге—Кутта или Адамса.

Особые точки в замыкании алгорифма, как мы видели, препятствуют нормальному ходу вычислений.

Мы укажем здесь один теоретический способ избежать этих особых точек.

Будем искать решение $\varphi(x)$ уравнения (18) в параметрическом виде:

$$\varphi = \psi + \Gamma_N^{(1)*} B_2 \psi = (E + \Gamma_N^{(1)})\psi, \tag{107}$$

где $\Gamma_N^{(1)*} B_2$ определяется формулой (63). При этом получится:

$$(E + \Gamma_N^{(1)})\psi = A(E + \Gamma_N^{(1)})\psi + f, \tag{108}$$

откуда следует:

$$\{E + [(\Gamma_N^{(1)} - A_N^{(1)} + A_N^{(1)}\Gamma_N^{(1)}) + (A_N^{(1)} - A)(E + \Gamma_N^{(1)})]\}\psi \equiv$$
$$\equiv [E + (A_N^{(1)} - A)(E + \Gamma_N^{(1)}]\psi = f.$$

Обозначая

$$(A - A_N^{(1)})(E + \Gamma_N^{(1)}) \equiv D, \tag{109}$$

получим новое уравнение:

$$(E - D)\psi = f. \tag{110}$$

Если взять $A_N^{(1)}$ достаточно близким к A, то норму оператора D и даже ядро этого интегрального оператора можно сделать меньшими единицы и тогда уравнение (110) окажется разрешимым при помощи любого из алгорифмов T_c или T_{um} (алгорифм последовательных приближений), имеющих при этом регулярное замыкание.

Оператор D в этом случае вычисляется без большого труда решением конечного числа уравнений для отыскания $\tilde{\tilde{\Gamma}}_N$.

Если $(E - A)$ разрешимо, то $\tilde{\tilde{\Gamma}}_N$ будут при некотором конечном N удовлетворять поставленным условиям.

После этого нетрудно вычислить φ по формулам (107).

Из всего сказанного видно, какое значение имеет регулярное замыкание вычислительного алгорифма для численного решения интегральных уравнений.

Как нам кажется, замыкание это может оказаться полезным и в других случаях, в частности, при решении различных краевых задач для уравнений в частных производных. Изучение замыкания операторов

поучительно еще с одной стороны. Можно думать, что системы уравнений со многими неизвестными окажутся подчас по своим свойствам ближе к своему замыканию, чем к своим дву- или трехмерным аналогам. Тогда следовало бы думать о распространении на такие системы некоторых методов математического анализа. Если настоящая работа привлечет внимание исследователей к этим вопросам, то наша цель будет достигнута.

Поступило
5. 1. 1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений, краткий реферат доклада в ММО, Успехи матем. наук, IX, вып. 3 (61) (1954), 234—235.

[2] Соболев С. Л., Замыкание вычислительных алгорифмов и некоторые его применения, М.—Л., 1955.

[3] Крейн М. Г., Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 3 (1955), 413 - 416.

[4] Сергеев Н. П., Диссертация, Ленинград, 1954.

[5] O'Brien G., Kaplan S., Hyman M., A study of the numerical solution of partial differential equations, J. Math. Phys., 29 (1951), 223—251.

[6] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.— Л., 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 437—468

Б. М. ЛЕВИТАН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЯ

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\, u = 0$$

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе изучается разложение по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, \ldots, x_n)\}\, u = 0$$

в конечной и бесконечной областях, а также асимптотическое поведение спектральной функции этого уравнения.

Введение

Настоящая работа основана на результатах работы (1), в которой мы изучили асимптотическое поведение при малых t решения задачи Коши

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{0.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{0.2}$$

Пусть D — конечная односвязная область * E_n и B — граница D. Предположим, что функция $q(x_1, \ldots, x_n)$ в области $D + B$ действительна и имеет ограниченные частные производные до порядка $(2n-7)$ включительно в случае нечетного n и до порядка $(2n-5)$ включительно в случае четного n.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, \ldots, x_n)\}u = 0, \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_B = 0. \tag{0.4}$$

Так как функция $q(x)$ в области $D + B$ ограничена, то, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр задачи (0.3) — (0.4) неотрицателен.

Обозначим через $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\ldots$, $\omega_m(x)$, $\ldots$ ортонормированные собственные функции задачи (0.3) — (0.4) и через μ_1^2, μ_2^2, $\ldots$, μ_m^2, $\ldots$ — соответствующие собственные значения. Сформулируем основные результаты.

---

* Мы пользуемся в этой работе теми же сокращенными обозначениями, что и в работе (1).

I. *Обозначим через* η *произвольное положительное число и через* D_η — *множество точек области* D, *расстояние которых до границы* B *области* D *не меньше, чем* η. *Существует такая константа* C_η, *что для* $x, y \in D_\eta$ *справедлива асимптотическая формула (с оценкой остатка)*

$$\left| \sum_{\mu_m < \mu} \omega_m(x)\,\omega_m(y) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} I_{\frac{n}{2}}(\mu r) \right| < C_\eta \mu^{n-1}. \tag{0.5}$$

II. *Пусть* $f(x) \in L_2(D)$, $n = 2k+1$ *нечетно. Положим*

$$c_m = \int_{(D)} f(x)\,\omega_m(x)\,dx, \quad R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_m < \mu} \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2}\right)^s c_m \omega_m(x), \tag{0.6}$$

$$R_s^*(x, \mu) = \int_{(D)} f(y)\,\theta_s^*(x, y; \mu)\,dy, \tag{0.7}$$

где

$$\theta_s^*(x, y; \mu) = \frac{2^s}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}-s}}{r^{\frac{n}{2}+s}} I_{\frac{n}{2}+s}(\mu r). \tag{0.8}$$

$R_s(x, \mu)$ *есть среднее по Риссу порядка* s *разложения функции* $f(x)$ *в ряд Фурье по собственным функциям задачи* (0.3) — (0.4); $R_s^*(x, \mu)$ *есть среднее по Риссу порядка* s *разложения в обычный интеграл Фурье функции, равной* $f(x)$, *если* $x \in D$, *и равной нулю для других* x.

Если в окрестности точки x *функция* $f(y)$ *ограничена, то при* $s = \frac{n-1}{2}$

$$\lim_{\mu \to \infty} \{R_s(x, \mu) - R_s^*(x, \mu)\} = 0. \tag{0.9}$$

Если функция $f(y)$ *ограничена в области* D, *то равенство* (0.9) *имеет место равномерно в каждой внутренней области.*

III. *Пусть* n *нечетно,* $n = 2k+1$. *Обозначим через* $2j$ *четное положительное число, удовлетворяющее условию*

$$0 < 2j \leqslant k.$$

Допустим, что функция $f(x)$ *в области* $D + B$ *имеет непрерывные частные производные до порядка* $2j$ *включительно, и пусть функции*

$$f(x), \quad L\{f(x)\} = \Delta\{f(x)\} - q(x) f(x), \quad L^2\{f(x)\}, \ldots, L^{j-1}\{f(x)\}$$

удовлетворяют граничному условию (0.4). *Продолжим функцию* $f(x)$ *во все пространство* E_n *так, чтобы все ее частные производные до порядка* $2j$ *включительно имели в* E_n *интегрируемый квадрат. Далее, положим* $l = k - 2j$. *Тогда* [см. обозначения (0.6), (0.7) и (0.8)]

$$\lim_{\mu \to \infty} \{R_l(x, \mu) - R_l^*(x, \mu)\} = 0$$

равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области D.

IV. Сопоставляя теорему предыдущего пункта с теоремой, доказанной во втором дополнении к настоящей работе, мы получаем:

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущего пункта и пусть $l = k - 2j$. Тогда равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области D,

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_m < \mu} \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2}\right)^l c_m \omega_m(x) = f(x). \tag{0.10}$$

В частности, если k четно и $2j = k$, то из равенства (0.10) следует:

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_m < \mu} c_m \omega_m(x) = f(x).$$

В заключение заметим, что основные результаты настоящей работы были нами опубликованы без доказательств в работе [2]. Однако сравнение с предыдущим показывает, что в этой работе необходимо внести исправление в предположение о числе производных функции $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а также в теорему 4.

§ 1. Предварительная оценка спектральной функции

1. Обозначим через D конечную односвязную область E_n и через B — границу D. Пусть функция $q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области $D + B$ действительна и имеет ограниченные частные производные до $(2n-7)$-го порядка включительно в случае нечетного n и до $(2n-5)$-го порядка включительно в случае четного n.

Рассмотрим задачу на собственные значения *:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} u = 0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_B = 0. \tag{1.2}$$

Так как функция $q(x)$ в области $D + B$, в частности, непрерывна и, значит, ограничена, то спектр задачи (1.1) — (1.2) снизу ограничен и поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что он неотрицателен. Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_m^2, \ldots$ собственные значения задачи (1.1) — (1.2) и через $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_m(x), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции. Положим

$$\left.\begin{aligned} &\theta(x, y; \mu) = \sum_{\mu_m < \mu} \omega_m(x)\omega_m(y), && \mu > 0, \\ &\theta(x, y; \mu) = -\theta(x, y; -\mu), && \mu < 0, \\ &\theta(x, y; 0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Функцию $\theta(x, y; \mu)$ мы будем называть в дальнейшем спектральной функцией задачи (1.1) — (1.2).

---

* Вместо граничного условия (1.2) можно взять любое самосопряженное граничное условие.

В настоящем параграфе мы дадим предварительную оценку спектральной функции и получим одновременно ряд важных в последующем тождеств. Мы рассмотрим подробно случай нечетного $n \geqslant 7$, ибо случай четного n, а также случай $n = 5$ изучаются аналогично.

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\Delta u - q(x)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.4}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_B = 0. \tag{1.6}$$

Если начальная функция $f(x)$ достаточно гладка, то задачу (1.4) — — (1.5) — (1.6) можно решить по методу Фурье, и мы получим:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\, \omega_m(x) \cos \mu_m t, \tag{1.7}$$

где

$$c_m = \int\limits_{(D)} f(x)\, \omega_m(x)\, dx.$$

Пусть точка x лежит внутри области D и t настолько мало, что сфера с центром в точке x радиуса t целиком лежит внутри D. В таком случае вместо смешанной задачи мы имеем чистую задачу Коши (1.4)—(1.5). Решая ее по формуле (6.22) работы [3] и сравнивая с формулой (1.7), мы получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m\, \omega_m(x) \cos \mu_m t = u_0(x, t) + \frac{\partial^{2k-1}}{\partial t^{2k-1}} \int\limits_{r \leqslant t} z(x, y; t)\, f(y)\, dy, \tag{1.8}$$

где $u_0(x, t)$ есть решение задачи Коши (1.4) — (1.5) при $q(x) = 0$, т. е. [см. [3]]

$$u_0(x, t) = \frac{1}{(n-2)!\, \omega_n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\limits_{r \leqslant t} \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r^{n-2}}\, f(y)\, dy \qquad (r = |x - y|), \tag{1.9}$$

$$z(x, y; t) = \sum \alpha(x; \theta_1, \ldots, \theta_{2k})\, \frac{t^\lambda}{r^\mu} (\ln t)^\nu (\ln r)^\sigma + z_1(x, y; t), \tag{1.10}$$

$$\lambda \geqslant \mu + 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 2k - 4, \quad \nu \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant 0, \quad z_1(x, y; t) = O(1).$$

2. Обозначим через ε произвольное положительное число и через $g_\varepsilon(t)$ — функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $g_\varepsilon(-t) = g_\varepsilon(t)$,

2) $g_\varepsilon(t) = 0$, если $t \geqslant \varepsilon$,

3) $g_\varepsilon(t)$ имеет ограниченные производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

Положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\, dt.$$

В силу условия (3), для больших μ справедлива оценка

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^{n+1}}\right). \tag{1.11}$$

Пусть точка x находится внутри D и ε настолько мало, что сфера с центром в точке x радиуса ε целиком лежит внутри D. Помножим обе части тождества (1.8) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем затем по t. Интегрируя справа по частям и меняя затем порядок интегрирования, мы получим тождество:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m\omega_m(x)\psi_\varepsilon(\mu_m) = \frac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\int_{r\leqslant\varepsilon} f(y)\left[\frac{1}{r^{n-2}}\int_r^\varepsilon (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} g_\varepsilon^{(2k)}(t)\,dt\right]dy -$$

$$-\int_{r\leqslant\varepsilon} f(y)\left[\int_r^\varepsilon z(x,y;t)\,g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt\right]dy. \tag{1.12}$$

В силу оценки (1.11), ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(x)\omega_m(y)\psi_\varepsilon(\mu_m)$$

сходится абсолютно и равномерно. Поэтому можно переставить местами сумму и интеграл, в результате чего мы получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m\omega_m(x)\psi_\varepsilon(\mu_m) = \int_{(D)} f(y)\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(x)\omega_m(y)\psi_\varepsilon(\mu_m)\right\}dy.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (1.12), мы получим, принимая во внимание произвольность функции $f(y)$, тождество:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(x)\omega_m(y)\psi_\varepsilon(\mu_m) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\dfrac{1}{r^{n-2}}\displaystyle\int_r^\varepsilon (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} g_\varepsilon^{(2k)}(t)\,dt - \int_r^\varepsilon z(x,y;t)\,g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt, & r\leqslant\varepsilon, \\ 0, & r\geqslant\varepsilon. \end{cases} \tag{1.13}$$

Покажем, что, используя разложение (1.10), можно существенно упростить это тождество. В самом деле, подставляя разложение (1.10) в тождество (1.13), мы получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(x)\,\omega_m(y)\,\psi_\varepsilon(\mu_m) = \frac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\,\frac{1}{r^{n-2}}\int_r^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k)}(t)\,(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt -$$

$$-\sum \alpha(x,\theta_i)\,\frac{(\ln r)^\sigma}{r^\mu}\int_0^\varepsilon t^\lambda(\ln t)^\nu\, g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt +$$

$$+\sum \alpha(x,\theta_i)\,\frac{(\ln r)^\sigma}{r^\mu}\int_0^r t^\lambda(\ln t)^\nu\, g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt - \int_r^\varepsilon z_1(x,y;t)\,g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt \quad (r<\varepsilon). \tag{1.14}$$

Пусть ε и x фиксированы и $y\to x$, т. е. $r\to 0$. Левая часть тождества (1.14) при этом остается ограниченной. Первый член справа также остается ограниченным, как это следует из результатов работы [4] (гл. II, § 2). Четвертый член справа остается ограниченным, ибо $z_1 = O(1)$ при $r\to 0$.

Покажем, что третий член справа также остается ограниченным при $r\to 0$. В самом деле, так как $\lambda \geqslant \mu+1$, то при $r\to 0$

$$\left|\frac{(\ln r)^\sigma}{r^\mu}\int_0^r t^\lambda(\ln t)^\nu g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt\right| = O\left(r^{\lambda+1-\mu}|\ln r|^{\sigma+\nu}\right) = o(1). \tag{1.15}$$

Таким образом, при $r\to 0$

$$\sum \alpha(x,\theta_i)\,\frac{(\ln r)^\sigma}{r^\mu}\int_0^\varepsilon t^\lambda(\ln t)^\nu g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt = O(1).$$

Последняя оценка возможна лишь в том случае, если ее левая часть тождественно равна нулю, т. е. если все коэффициенты ее равны нулю, ибо сумма бесконечностей различных порядков не может быть ограниченной.

Итак, тождество (1.13) принимает вид:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \omega_m(x)\,\omega_m(y)\,\psi_\varepsilon(\mu_m) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\,\dfrac{1}{r^{n-2}}\displaystyle\int_r^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k)}(t)\,(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt + \int_0^\varepsilon z^*(x,y;t)\,g_\varepsilon^{(2k-1)}(t)\,dt, & r\leqslant\varepsilon, \\ 0, & r\geqslant\varepsilon, \end{cases} \tag{1.16}$$

где

$$z^*(x,y;t) = \begin{cases} \sum \alpha(x,\theta_i)\,\dfrac{t^\lambda}{r^\mu}(\ln t)^\nu(\ln r)^\sigma, & 0\leqslant t<r, \\ -z_1(x,y;t), & r\leqslant t\leqslant\varepsilon. \end{cases}$$

Из (1.15) следует, что при $r \to 0$

$$z^*(x, y; t) = O(1). \tag{1.17}$$

3. Заменим в тождестве (1.16) $g_\varepsilon(t)$ на $g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at$, где a — произвольное действительное число. Мы получим, переходя от суммы к интегралу Стильтьеса [см. ([4]), гл. II, § 1]:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \theta(x, y; \mu) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\dfrac{1}{r^{n-2}}\displaystyle\int_r^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k)}(t, a)\,(t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt + \int_0^\varepsilon z^*(x, y; t) g_\varepsilon^{(2k-1)}(t, a)\, dt, & r \leqslant \varepsilon, \\ 0, & r \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{1.18}$$

Из тождества (1.18) следует важная

ЛЕММА 1.1. *Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D, расстояние которых до границы B области D не меньше, чем η. Существует константа $C = C_\eta$ такая, что если $x \in D_\eta$, то для всех $a > 0$ справедлива оценка:*

$$\sum_{a < \mu_m \leqslant a+1} \omega_m^2(x) < Ca^{n-1}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Как показано в работе ([4]) (гл. II, § 2), при $r = 0$, т. е. $x = y$, первый член справа в тождестве (1.18) есть $O(a^{2k})$. Второй член справа в этом тождестве, в силу оценки (1.17), есть $O(a^{2k-1})$. Поэтому существует константа $C = C_\eta$ такая, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \theta(x, x; \mu) \right| \leqslant Ca^{n-1}.$$

Теперь доказательство леммы заканчивается в точности так же, как и в случае теоремы 2.2.2 работы ([4]).

Замечание. Для четного $n = 2k$ первый член в тождестве (1.18) для больших a есть $O(a^{2k-1}) = O(a^{n-1})$ [см. ([4]), гл. II, § 2]. Поэтому оценка (1.19) справедлива и для четных n.

§ 2. Асимптотическое поведение спектральной функции

Тождество (1.18) позволяет изучить асимптотическое поведение спектральной функции $\theta(x, y; \mu)$ при $\mu \to \infty$. Обозначим через $\theta^*(x, y; \mu)$ спектральную функцию оператора Лапласа в случае всего пространства, т. е. пусть

$$\theta^*(x, y; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(\mu r) \quad (r = |x - y|). \tag{2.1}$$

Как показано в работе ([4]) (гл. II, § 3), справедливо тождество:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\theta^*(x,y;\mu)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)!\,\omega_n}\dfrac{1}{r^{n-2}}\displaystyle\int_r^\varepsilon(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\,g_\varepsilon^{(2k)}(t,a)\,dt, & r\leqslant\varepsilon,\\ 0, & r\geqslant\varepsilon.\end{cases}\tag{2.2}$$

Вычитая из тождества (1.18) тождество (2.2) и полагая

$$\theta(x,y;\mu)-\theta^*(x,y;\mu)=\Phi(x,y;\mu),$$

получим:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\Phi(x,y;\mu)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k-1)}(t,a)\,z^*(x,y;t)\,dt, & r\leqslant\varepsilon,\\ 0, & r\geqslant\varepsilon.\end{cases}\tag{2.3}$$

Преобразуем правую часть тождества (2.3). Так как

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a)\cos\mu t\,dt=\frac{1}{2}\left[\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\right],$$

то, в силу формулы обращения Фурье,

$$g_\varepsilon(t,a)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{2}\left[\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\right]\cos\mu t\,d\mu.\tag{2.4}$$

Дифференцируя это равенство по t $2k-1$ раз, мы получим:

$$g_\varepsilon^{(2k-1)}(t,a)=(-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{2}\left[\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\right]\mu^{2k-1}\sin\mu t\,d\mu.\tag{2.5}$$

Далее, положим:

$$\alpha(x,y;\mu)=\int_0^1 z^*(x,y;t)\sin\mu t\,dt.\tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует:

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k-1)}(t,a)\,z^*(x,y;t)\,dt=$$

$$=(-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{2}\mu^{2k-1}\left[\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\right]\alpha(x,y;\mu)\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\alpha_1(x,y;\mu),\tag{2.7}$$

где

$$\alpha_1(x,y;\mu)=(-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^\mu\nu^{2k-1}\alpha(x,y;\nu)\,d\nu.\tag{2.8}$$

Из (2.3) и (2.7) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi^*(x, y; \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \tag{2.9}$$

где

$$\Phi^*(x, y; \mu) = \Phi(x, y; \mu) - \alpha_1(x, y; \mu).$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть* η, D_η *и* C_η *имеют то же значение, что и в лемме* 1.1. *Тогда для* $x, y \in D_\eta$ *справедлива оценка*:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\Phi^*(x, y; \mu)\} < C_\eta \mu^{2k}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Для $\theta(x, y; \mu)$ оценка типа (2.10) следует из оценки (1.19) и неравенства Коши — Буняковского. Для $\theta^*(x, y; \mu)$ оценка типа (2.10) доказана в работе ([4]) (гл. II, § 3). Наконец,

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\alpha_1(x, y; \mu)\} = \frac{2}{\pi} \int_{\mu}^{\mu+1} \nu^{2k-1} |\alpha(x, y; \nu)|\, d\nu = o(\mu^{2k-1}).$$

Так как

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\Phi^*(x, y; \mu)\} \leqslant \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\theta(x, y; \mu\} + \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\theta^*(x, y; \mu)\} + \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\alpha_1(x, y, \mu)\},$$

то оценка (2.10) доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* η, D_η *и* C_η *имеют то же значение, что и в лемме* 1.1. *Тогда для* $x, y \in D_\eta$ *справедлива оценка* ($r = |x - y|$):

$$\left| \theta(x, y; \mu) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} I_{\frac{n}{2}}(\mu r) \right| < C_\eta \mu^{n-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Из тождества (2.9) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\Phi^*(x, y; \mu)$ в интервале $(-1,1)$ эквивалентно нулю. Поэтому из оценки (2.10) и теоремы 1.3.1 работы ([4]) следует оценка:

$$|\Phi^*(x, y; \mu)| < C_\eta \mu^{n-1}. \tag{2.12}$$

Далее,

$$\alpha_1(x, y; \mu) = C \int_0^{\mu} \nu^{2k-1} \left[\int_0^1 z^*(x, y; t) \sin \nu t\, dt \right] d\nu =$$

$$= C \int_0^{\mu} z^*(x, y; t) \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} \left[\frac{1 - \cos \mu t}{t} \right] dt.$$

Поэтому

$$|\alpha_1(x, y; \mu)| \leqslant C_\eta \mu^{2k-1} \int_0^\mu \left| \frac{d^{2k-1}}{dz^{2k-1}} \left(\frac{1-\cos z}{z} \right) \right| dz =$$

$$= C_\eta \mu^{2k-1} \int_0^1 \left| \frac{d^{2k-1}}{dz^{2k-1}} \left(\frac{1-\cos z}{z} \right) \right| dz + C_\eta \mu^{2k-1} \int_1^\mu \left| \frac{d^{2k-1}}{dz^{2k-1}} \left(\frac{1-\cos z}{z} \right) \right| dz \leqslant$$

$$\leqslant C_\eta \mu^{2k-1} + C_\eta \mu^{2k-1} \int_1^\mu \frac{dz}{z} \leqslant C_\eta \mu^{2k-1} \ln \mu. \tag{2.13}$$

Из оценок (2.12) и (2.13) следует оценка (2.11).

Замечание. Из предыдущих оценок следует, что в случае четного $n = 2k$ справедлива оценка:

$$\left| \theta(x, y; \mu) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} I_{\frac{n}{2}}(\mu r) \right| < C_\eta \mu^{2k-1} \ln \mu.$$

Однако если использовать формулу (8.15) работы [1], то нетрудно получить оценку:

$$\left| \theta(x, y; \mu) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} I_{\frac{n}{2}}(\mu r) \right| < C_\eta \mu^{2k-1}. \tag{2.14}$$

§ 3. Суммирование по Риссу разложений по собственным функциям

В настоящем параграфе мы получим ряд результатов о равной суммируемости по Риссу разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора (1.1) и разложения в обычный интеграл Фурье.

1. Рассмотрим задачу Коши (1.4) — (1.5). Если начальная функция $f(x)$ достаточно гладка и t настолько мало, что сфера радиуса t с центром в точке x лежит внутри D, то, как показано в работе [1], § 4, решение этой задачи может быть представлено в виде:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{\partial^k u_1(x, t)}{\partial t^k}, \tag{3.1}$$

причем $u_0(x, t)$ есть решение задачи Коши (1.4) — (1.5) при $q(x) \equiv 0$,

$$u_1(x, t) = \frac{\partial z_k^{(1)}(x, t)}{\partial t}$$

[см. формулу (4.5) работы [1]] и для малых t имеет место оценка [см. теорему 4.1 работы [1]]:

$$u_1(x, t) = O(t^{k+2}). \tag{3.2}$$

С другой стороны, решая задачу (1.4) — (1.5) — (1.6) по методу Фурье, мы получим:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \omega_m(x) \cos \mu_m t, \tag{3.3}$$

где

$$c_m = \int_{(D)} f(x)\, \omega_m(x)\, dx.$$

Сравнивая (3.1) и (3.3), мы получим, в силу единственности решения задачи Коши:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \omega_m(x) \cos \mu_m t = u_0(x, t) + \frac{\partial^k u_1(x, t)}{\partial t^k}. \tag{3.4}$$

Пусть функции $g_\varepsilon(t)$ и $\psi_\varepsilon(\mu)$ определены так же, как и в первом параграфе, и

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t) \cos at,$$

где a — произвольное действительное число. Помножим обе части равенства (3.4) на $g_\varepsilon(t, a)$ и проинтегрируем по t. После несложных преобразований мы получим:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R(x, \mu) = \int_0^\varepsilon u_0(x, t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt + \\ + (-1)^k \int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(k)}(t, a)\, u_1(x, t)\, dt, \tag{3.5}$$

где

$$R(x, \mu) = \sum_{\mu_m < \mu} c_m \omega_m(x) = \int_{(D)} \theta(x, y; \mu) f(y)\, dy.$$

Обозначим, как и во втором параграфе, через $\theta^*(x, y; \mu)$ спектральную функцию оператора Лапласа для всего пространства и положим

$$R^*(x, \mu) = \int_{(D)} \theta^*(x, y; \mu) f(y)\, dy.$$

Как показано в работе ([4]) (гл. III, § 1), имеет место тождество:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R^*(x, \mu) = \int_0^\varepsilon u_0(x, t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt. \tag{3.6}$$

Вычитая из тождества (3.5) тождество (3.6), мы получим:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \rho(x, \mu) = (-1)^k \int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(k)}(t, a)\, u_1(x, t)\, dt, \tag{3.7}$$

где

$$\rho(x, \mu) = R(x, \mu) - R^*(x, \mu).$$

Тождество (3.7) получено нами в предположении, что $f(x)$ — гладкая функция. Однако оно очевидным образом переносится на функции $f(x) \in L_p(D)$, $p \geqslant 1$.

Тождество (3.7) позволит нам доказать теорему о равной суммируемости.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного k. Пусть вначале k четно: $k = 2j$. В этом случае тождество (3.7) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \rho(x, \mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(2j)}(t, a)\, u_1(x, t)\, dt. \tag{3.8}$$

Дифференцируя равенство (2.4) $2j$ раза по t, мы получим:

$$g_\varepsilon^{(2j)}(t, a) = (-1)^j \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\dot{\psi}_\varepsilon(\mu + a) + \dot{\psi}_\varepsilon(\mu - a)\right] \mu^{2j} \cos \mu t\, d\mu. \tag{3.9}$$

Далее, положим:

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^1 u_1(x, t) \cos \mu t\, dt. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) следует:

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(k)}(t, a)\, u_1(x, t)\, dt = (-1)^j \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, \mu^{2j} \alpha(x, \mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \alpha_1(x, \mu), \tag{3.11}$$

где

$$\alpha_1(x, \mu) = (-1)^j \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \nu^{2j} \alpha(x, \nu)\, d\nu.$$

Из (3.8) и (3.11) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \rho^*(x, \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \tag{3.12}$$

где

$$\rho^*(x, \mu) = \rho(x, \mu) - \alpha_1(x, \mu).$$

ЛЕММА 3.1. *Если $f(x) \in L_2(D)$ и x — внутренняя точка области D, то при $\mu \to \infty$ справедлива оценка:*

$$\bigvee_\mu^{\mu+1} \{\rho^*(x, \mu)\} = o(\mu^k). \tag{3.13}$$

Доказательство. Из леммы 1.1 следует:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{R(x,\mu)\} = \sum_{\mu<\mu_m\leqslant\mu+1} |c_m\omega_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{\mu<\mu_m\leqslant\mu+1} c_m^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{\mu<\mu_m\leqslant\mu+1} \omega_m^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}} = o(\mu^k). \tag{3.14}$$

Оценка (3.14) имеет также место для $R^*(x,\mu)$, что показано нами в работе ([4]) (гл. III, § 1). Наконец,

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\alpha_1(x,\mu)\} = C\int_{\mu}^{\mu+1} \nu^k |\alpha(x,\nu)|\,d\nu = o(\mu^k). \tag{3.15}$$

Таким образом, (3.13) следует из (3.14) и (3.15).

2. Из тождества (3.12) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\rho^*(x,\mu)$ в интервале (-1.1) эквивалентно нулю. Поэтому из оценки (3.13) и теоремы 1.3.3 работы ([4]) следует, что (см. дополнение 3 к настоящей работе)

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu\rho^*(x,\nu) = 0. \tag{3.16}$$

Из последнего равенства нетрудно получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $f(y)\in L_2(D)$ и пусть в окрестности точки x, находящейся внутри D, функция $f(y)$ ограничена. Тогда*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu\rho(x,\nu) = 0, \tag{3.17}$$

т. е. разность между средними по Риссу порядка k разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1.1) — (1.2) и разложения в обычный n-кратный интеграл Фурье функции, равной $f(y)$ для $y\in D$ и равной 0 для y вне D, в точке x стремится к нулю. Если функция $f(y)$ в области D ограничена, то равенство (3.17) имеет место равномерно в каждой внутренней области.

Доказательство. В силу (3.16), достаточно показать, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k \nu^k\alpha(x,\nu)\,d\nu = 0.$$

Мы имеем [см. ([5]), формула (2.35)]:

$$I = \int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k \nu^k\alpha(x,\nu)\,d\nu = C\int_0^1 u_1(x,t)\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{k+\frac{1}{2}}}\right]\mu\,dt.$$

Обозначим через τ_1 произвольное положительное число и положим

$$I = \int_0^1 u_1(x, t)\, \frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{k+\frac{1}{2}}}\right] \mu\, dt = \int_0^{\eta} \ldots dt + \int_{\eta}^1 \ldots dt = I_1 + I_2.$$

Мы имеем:

$$I_2 = \int_{\eta}^1 u_1(x, t)\, \sqrt{\mu}\, \left\{\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\mu^l} C_k^l I_{k+\frac{1}{2}}^{(k-l)}(\mu t)\left[\frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}\right]_t^{(l)}\right\} dt =$$

$$= \int_{\eta}^1 u_1(x, t)\sqrt{\mu t}\, I_{k+\frac{1}{2}}^{(k)}(\mu t)\, \frac{1}{t^{k+1}}\, dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = I_2^* + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right).$$

В силу леммы Римана — Лебега, при фиксированном τ_1 и $\mu \to \infty$

$$I_2^* = o(1).$$

Поэтому при $\mu \to \infty$

$$I_2 = o(1). \tag{3.18}$$

Далее, пользуясь оценкой (3.2), имеем:

$$|I_1| \leqslant C \int_0^{\eta} t^{k+2} \left|\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{k+\frac{1}{2}}}\right]\right| \mu\, dt =$$

$$= \frac{C}{\mu^2} \int_0^{\mu\eta} z^{k+2} \left|\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(z)}{z^{k+\frac{1}{2}}}\right]\right| dz = \frac{C}{\mu^2} \int_0^{\mu\eta} O(z)\, dz = O(\tau_1^2). \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) выводим (выбирая вначале τ_1, а затем μ):

$$\lim_{\mu \to \infty} I = 0,$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть теперь k нечетно: $k = 2j - 1$. Интегрируя правую часть тождества (3.7) по частям, получим:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \rho(x, \mu) = \int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon^{(k+1)}(t, a)\, u_1^*(x, t)\, dt, \tag{3.20}$$

где

$$u_1^*(x, t) = \int_0^t u_1(x, s)\, ds.$$

Продолжим функцию $u_1^*(x, t)$ из интервала (0,1) в интервал (1,2) так, чтобы она осталась дифференцируемой и чтобы выполнялось условие

$$u_1^*(x, 2) = 0.$$

Далее положим

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^2 u_1^*(x, t) \cos \mu t \, dt,$$

$$\alpha_1(x, \mu) = (-1)^j \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \nu^{2j} \alpha(x, \nu) \, d\nu.$$

Тогда

$$\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon^{(k+1)}(t, a) u_1^*(x, t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a) \, d_\mu \alpha_1(x, \mu). \tag{3.21}$$

Из (3.20) и (3.21) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a) \, d_\mu \rho^*(x, \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \tag{3.22}$$

где

$$\rho^*(x, \mu) = \rho(x, \mu) - \alpha_1(x, \mu).$$

Покажем, что

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\rho^*(x, \mu)\} = o(\mu^k). \tag{3.23}$$

В силу предыдущего, для доказательства оценки (3.23) достаточно получить оценку

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\alpha_1(x, \mu)\} = o(\mu^k).$$

Мы имеем (интегрируя по частям):

$$\alpha(x, \nu) = -\frac{1}{\mu} \int_0^2 u_1(x, t) \sin \nu t \, dt = o\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Поэтому

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\alpha_1(x, \mu)\} = C \int_{\mu}^{\mu+1} \nu^{2j} |\alpha(x, \nu)| \, d\nu = o(\mu^{2j-1}) = o(\nu^k).$$

Далее,

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu \alpha_1(x, \nu) = C \int_0^2 u_1^*(x, t) \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{k+\frac{1}{2}}} \right] \mu \, dt =$$

$$= -C \int_0^2 u_1(x, t) \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^k} \right] \mu \, dt.$$

Доказательство заканчивается теперь в точности так же, как и в случае четного k.

§ 4. Понижение порядка суммирования

Если функция $f(x)$ имеет ограниченные частные производные во всей области D, то можно понизить порядок суммирования разложения функции в ряд Фурье. В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Обозначим через $2j$ четное положительное число, удовлетворяющее условию $0 < 2j \leqslant k\ (n - 2k + 1)$. Предположим, что функция $f(x)$ в области $D + B$ имеет непрерывные частные производные до порядка $2j$ включительно и пусть функции*

$$f(x), \quad L\{f(x)\} = \Delta\{f(x)\} - q(x) f(x),$$
$$L^2\{f(x)\}, \ldots, L^{j-1}\{f(x)\}$$

*удовлетворяют граничному условию (1.2). Продолжим функцию $f(x)$ во все пространство E_n таким образом, чтобы все ее частные производные до порядка $2j$ включительно имели в E_n интегрируемый квадрат *.*

Далее, обозначим через μ_m собственные значения и через $\omega_m(x)$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (1.1)—(1.2) и пусть

$$c_m = \int\limits_{(D)} f(x)\, \omega_m(x)\, dx.$$

Положим $l = k - 2j$,

$$R_l(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(l+1)} \sum_{\mu_m < \mu} \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2}\right)^l c_m\, \omega_m(x),$$

$$R_l^*(x, \mu) = \int\limits_{E_n} f(y)\, \theta_l^*(x, y; \mu)\, dy,$$

где

$$\theta_l^*(x, y; \mu) = \frac{2^l}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{\frac{n}{2}-l}}{r^{\frac{n}{2}+l}} J_{\frac{n}{2}+l}(\mu r) \quad (r = |x - y|).$$

Тогда

$$\lim_{\mu \to \infty} [R_l(x, \mu) - R_l^*(x, \mu)] = 0$$

равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области D. Иначе говоря, разность между средними по Риссу порядка l разложения функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (1.1) — (1.2) и средними по Риссу того же порядка разложения в обычный интеграл Фурье функции, равной $f(x)$ для $x \in D$ и продолженной во все пространство E_n так, как об этом было сказано выше, стремится к нулю равномерно в каждой внутренней области.

---

* Как известно, это возможно.

Доказательство. Исходным пунктом доказательства настоящей теоремы является тождество (3.7). В силу теоремы 4.2 работы [1], функция $u_1(x, t)$ имеет ограниченные частные производные по t до $2j$-го порядка включительно, причем справедлива оценка:

$$\frac{\partial^{2j} u_1(x, t)}{\partial t^{2j}} = O(t^{k+2-2j}). \tag{4.1}$$

Интегрируя правую часть тождества (3.7) $2j$ раз по частям, мы получим ($l = k - 2j$):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \rho(x, \mu) = (-1)^l \int_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(l)}(t, a)\, \frac{\partial^{2j} u_1(x, t)}{\partial t^{2j}}\, dt. \tag{4.2}$$

Покажем, что при $\mu \to \infty$

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\rho(x, \mu)\} = o(\mu^l). \tag{4.3}$$

Так как

$$\rho(x, \mu) = R(x, \mu) - R^*(x, \mu),$$

то оценку (4.3) достаточно доказать для $R(x, \mu)$ и $R^*(x, \mu)$. Применяя j раз тождество Грина, мы получим:

$$c_m = \int_{(D)} f(x)\, \omega_m(x)\, dx = (-1)^j \frac{1}{\mu_m^{2j}} \int_{(D)} f(x)\, L^j \{\omega_m(x)\}\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^j}{\mu_m^{2j}} \int_{(D)} L^j \{f(x)\}\, \omega_m(x)\, dx = \frac{(-1)^j}{\mu_m^{2j}}\, d_m,$$

где

$$d_m = \int_D L^j \{f(x)\}\, \omega_m(x)\, dx.$$

Поэтому

$$\sum_{\mu < \mu_m \leqslant \mu+1} |c_m \omega_m(x)| \leqslant \frac{1}{\mu^{2j}} \sum_{\mu < \mu_m \leqslant \mu+1} |d_m \omega_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^{2j}} \left(\sum_{\mu < \mu_m \leqslant \mu+1} d_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mu < \mu_m \leqslant \mu+1} \omega_m^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} = o(\mu^{k-2j}) = o(\mu^l).$$

Чтобы доказать оценку (4.3) для $R^*(x, \mu)$, положим

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-i(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{\mu^{2j}} \int_{E_n} \Delta^j \{f(x)\}\, e^{-i(\alpha, x)}\, dx = \frac{G(\alpha)}{\mu^{2j}},$$

где

$$\mu^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = |\alpha|^2.$$

Поэтому [см. (4), гл. II, § 3]

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{R^*(x,\mu)\} = \int_{\mu}^{\mu+1} d\mu \Big| \int_{|\alpha|=\mu} E(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\, e^{i(\alpha,x)} d\alpha \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^{2j}} \Big\{ \int_{\mu}^{\mu+1} d_\mu \Big[\int_{|\alpha|=\mu} |G(\alpha)|^2 d\alpha \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_{\mu}^{\mu+1} d\mu \Big[\int_{|\alpha|=\mu} d\alpha \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}} = o(\mu^j).$$

Доказательство заканчивается в точности так же, как и в случае теоремы 3.1.

§ 5. Спектральное разложение в бесконечной области

Формула (1.18) позволяет без особого труда получить спектральное разложение оператора (1.1) в случае бесконечной области. Так как эта часть работы вполне аналогична случаю $n = 3$, подробно разобранному нами в работе (5), то мы ограничимся лишь краткими указаниями и формулировкой окончательных результатов. При этом мы ограничимся случаем всего пространства E_n.

Итак, пусть уравнение (1.1) задано во всем пространстве E_n. Обозначим через D_N бесконечную последовательность областей, расширяющихся до всего пространства E_n, т. е. $D_N \to E_n$ при $N \to \infty$, и через B_N — границу D_N. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{B_N} = 0. \tag{5.2}$$

Обозначим через $\lambda_{-1}^{(N)}, \lambda_{-2}^{(N)}, \ldots$ отрицательные собственные значения задачи (5.1) — (5.2) и через $\lambda_0^{(N)}, \lambda_1^{(N)}, \lambda_2^{(N)}, \ldots$ — неотрицательные собственные значения этой задачи. Через $\omega_m^{(N)}$ обозначим соответствующие собственные функции.

Далее, положим:

$$\theta^{(N)}(x, y; \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_m^{(N)} < \lambda} \omega_m^{(N)}(x)\, \omega_m^{(N)}(y), & \lambda > 0, \\ -\sum\limits_{\lambda_m^{(N)} < \lambda} \omega_m^{(N)} \omega_m^{(N)}(y), & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

В этих обозначениях формула (1.18) примет вид:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda_m^{(N)} < 0} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda_m} + a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda_m} - a)\}\, \omega_m^{(N)}(x)\, \omega_m^{(N)}(y) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\lambda_m^{(N)} \geqslant 0} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda_m} + a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda_m} - a)\}\, \omega_m^{(N)}(x)\, \omega_m^{(N)}(y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)!\,\omega_n} \dfrac{1}{r^{n-2}} \displaystyle\int_r^\varepsilon g_\varepsilon^{(2k)}(t, a)\, (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt + \int_0^\varepsilon z^*(x, y; t)\, g_\varepsilon^{(2k-1)}(t, a)\, dt, & r \leqslant \varepsilon, \\ 0, & r \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (5.3), нетрудно получить следующие результаты [см. (5), гл. III]:

ЛЕММА 5.1. *Обозначим через* Ω *произвольную конечную область* E_n *и через* T *— произвольное положительное число. Существует константа* $C = C(\Omega, T)$, *не зависящая от* N, *такая, что если* $x \in \Omega$ *и* $t < T$, *то*

$$\sum_{\lambda_m^{(N)} < 0} [\omega_m^{(N)}(x)]^2 e^{\sqrt{|\lambda_m^{(N)}|}\, t} < C.$$

Положим для $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$

$$\theta^{(N)}(x, y; \lambda) = \theta_1^{(N)}(x, y; \mu).$$

ЛЕММА 5.2. *Обозначим через* Ω *произвольную конечную область* E_n *и через* a *— произвольное положительное число. Существует константа* $C = C(\Omega)$, *не зависящая от* N *и* a, *такая, что если* $x \in \Omega$, *то*

$$\sum_{a < \mu_m^{(N)} \leqslant a+1} \{\omega_m^{(N)}(x)\}^2 < C \cdot a^{n-1}$$

ЛЕММА 5.3. *Обозначим через* Ω *произвольную конечную область* E_n *и через* Λ *и* η *— произвольные положительные числа. Существует положительное число* $\delta = \delta(\Omega, \Lambda, \eta)$, *не зависящее от* N, *такое, что если* $|\lambda| \leqslant \Lambda$, $x_1, x_2; y_1, y_2 \in \Omega$, $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$, *то*

$$|\theta^{(N)}(x_2, y_2; \lambda) - \theta^{(N)}(x_1, y_1; \lambda)| < \eta.$$

Из лемм 5.1, 5.2 и 5.3 следует

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует по крайней мере одна подпоследовательность* N_k, *обладающая тем свойством, что функции* $\theta^{(N_k)}(x, y; \lambda)$ *сходятся равномерно по* x, y *в каждой конечной области и по* λ *— в каждой точке непрерывности предельной функции* $\theta(x, y; \lambda)$. *Функция* $\theta(x, y; \lambda)$ *называется спектральной функцией оператора* (1.1) *в случае всего пространства и обладает следующими свойствами:*

1) *по* x, y *она непрерывна;*

2) *по* λ *имеет ограниченное изменение в каждом конечном интервале.*

Для функции $\theta(x, y; \lambda)$ при $\lambda > 0$ можно получить асимптотическую формулу (2.11). Теоремы разложения § 3 и 4 также легко переносятся на случай бесконечного пространства [см. (5), гл. III].

Дополнение 1

Суммирование по Риссу разложения в обычный интеграл Фурье

1. Пусть $f(x) \in L(E_n)$ (n — целое число, безразлично четное или нечетное). Положим

$$R_s(x, \mu) = \frac{2^s}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mu^{\frac{n}{2}-s} \int_{E_n} f(y) \frac{I_{\frac{n}{2}+s}(\mu r)}{r^{\frac{n}{2}+s}}\, dy \quad (r = |x - y|). \tag{1}$$

$R_s(x, \mu)$ есть среднее по Риссу порядка s разложения функции $f(x)$ в обычный интеграл Фурье [см. ([4]), гл. 3, § 1]. В настоящем приложении мы изучим поведение $R_s(x, \mu)$ при $\mu \to \infty$ и $s = \frac{n-1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а также при $s = \frac{n-1}{2}$. Излагаемые в этом дополнении результаты принадлежат С. Бохнеру ([6]).

Обозначим через σ_r поверхность сферы в E_n радиуса r с центром в точке x и положим

$$\varphi(x, r) = \int_{\sigma_r} f(y)\, d\sigma_r.$$

Так как

$$\int_{E_n} f(y)\, dy = \int_0^\infty \varphi(x, r)\, dr \tag{2}$$

и $f(y) \in L(E_n)$, то

$$\int_0^\infty |\varphi(x, r)|\, dr < \infty.$$

Точно так же

$$R_s(x, \mu) = \frac{2^s \mu^{\frac{n}{2}-s}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x, r)}{r^{\frac{n}{2}+s}} I_{\frac{n}{2}+s}(\mu r)\, dr. \tag{3}$$

Пусть вначале $s = \frac{n-1}{2} + \varepsilon$. Тогда

$$R_s(x, \mu) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x, r)}{r^{n-1}} \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mu r)}{\mu^\varepsilon r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\, dr. \tag{4}$$

Допустим, что при некотором фиксированном x существует предел

$$\lim_{r \to 0} \frac{\varphi(x, r)}{r^{n-1}} = a(x). \tag{5}$$

В частности, если функция $f(y)$ в точке x непрерывна, то предел (5) существует, причем

$$a(x) = \omega_n f(x) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} f(x). \tag{6}$$

В силу известной формулы [см. ([7]), стр. 428],

$$\frac{2^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\mu^{\varepsilon - \frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mu r)}{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\, dr = \frac{2^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)}{z^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{(\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(s+1)} \quad \left(s = \frac{n-1}{2} + \varepsilon\right).$$

Помножив обе части этого равенства на $a(x)$ и вычтя результат из равенства (4), мы получим:

$$R_s(x, \mu) - \frac{2}{(\sqrt{\pi})^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(s+1)} a(x) =$$

$$= \frac{2^s}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \int_0^\infty \left[\frac{\varphi(x, r)}{r^{n-1}} - a(x)\right] \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}^{(\mu r)}}{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} dr =$$

$$= \frac{2^s}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left\{\int_0^\eta \ldots dr + \int_\eta^\infty \ldots dr\right\} = I_1 + I_2, \tag{7}$$

где через η мы обозначили произвольное положительное число.

Так как при $x \to \infty$ $\sqrt{x} I_p(x) = O(1)$, то при фиксированном η и $\mu \to \infty$

$$I_2 = O\left\{\frac{1}{\mu^\varepsilon} \int_\eta^\infty \frac{dr}{r^{1+\varepsilon}}\right\} = o(1). \tag{8}$$

Далее, при $\eta \to 0$, в силу (5), мы имеем:

$$I_1 = o\left\{\mu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \int_0^\eta \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}^{(\mu r)}}{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} dr\right\} = o\left\{\int_0^\infty \frac{I_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)}{z^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} dz\right\} = o(1). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует:

$$\lim_{\mu \to \infty} R_s(x, \mu) = \frac{2}{(\sqrt{\pi})^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(s+1)} a(x).$$

В частности, если функция $f(y)$ в точке x непрерывна, так что справедливо равенство (6), то

$$\lim_{\mu \to \infty} R_s(x, \mu) = \frac{f(x)}{\Gamma(s+1)}.$$

Таким образом нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Допустим, что функция* $f(y) \in L(E_n)$ *и в точке* x *непрерывна. Тогда среднее по Риссу порядка* $s = \frac{n-1}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ *разложения функции* $f(y)$ *в интеграл Фурье стремится в точке* x *к* $\frac{1}{\Gamma(s+1)} f(x)$.

2. Пусть теперь $\varepsilon = 0$, т. е. $s = \frac{n-1}{2}$, и предположим для простоты, что $f(y)$ в точке x непрерывна. Тогда формула (7) примет вид:

$$R_s(x, \mu) - \frac{f(x)}{\Gamma(s+1)} = \frac{2^s}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\mu} \int_0^\infty \left[\frac{\varphi(x, r)}{r^{n-1}} - a(x)\right] \frac{I_{n-\frac{1}{2}}^{(\mu r)}}{r^{\frac{1}{2}}} dr = I_1 + I_2.$$

В силу леммы Римана — Лебега, при $\mu \to \infty$ и фиксированном η

$$I_2 = o(1). \tag{10}$$

Наложим на функцию $f(y)$ дополнительное ограничение, а именно предположим, что при $r \to 0$

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int_{\sigma_r} f(y)\, d\sigma_r - \omega_n f(x) = O(r^\delta), \tag{11}$$

где $\delta > 0$. Тогда при $\eta \to 0$

$$I_1 = O\left(\int_0^\eta \frac{dr}{r^{1-\delta}}\right) = o(1). \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(y) \in L(E_n)$ и в точке x удовлетворяет условию* (11). *Тогда*

$$\lim_{\mu \to \infty} R^{\frac{n-1}{2}}(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} f(x).$$

Дополнение 2

Понижение порядка суммирования разложения в обычный интеграл Фурье

1. Если функция $f(y) \in L(E_n)$ и имеет некоторое число частных производных с интегрируемым квадратом в E_n, то порядок суммирования по Риссу разложения функции в интеграл Фурье можно понизить.

В настоящем приложении мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Пусть $f(y) \in L_2(E_n)$, $n = 2k+1$ — нечетное число. Предположим, что функция $f(x)$ имеет частные производные до порядка $\lambda > 0$ включительно с интегрируемым квадратом в E_n и пусть эти частные производные в окрестности некоторой точки x ограничены. Положим $l = k - \lambda$,*

$$R_l^*(x; \mu) = \frac{2^l}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mu^{\frac{n}{2}-l} \int_{E_n} f(y)\, \frac{J_{\frac{n}{2}+l}(\mu r)}{r^{\frac{n}{2}+l}}\, dy.$$

Тогда

$$\lim_{\mu \to \infty} R^*(x; \mu) = \frac{1}{\Gamma(l+1)} f(x),$$

т. е. средние по Риссу порядка l разложения функции в интеграл Фурье сходятся к функции. В частности, при $\lambda = k$ сферические суммы интеграла Фурье сходятся к функции.*

* Интересно отметить, что случай $k = 0$, т. е. $n = 1$, для этой теоремы является исключительным.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x_1, \ldots, x_{2k+1}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Решая задачу (1) — (2) по методу С. Л. Соболева, мы получим [см. (1), приложение]:

$$u = \frac{\partial^k v(x, t)}{\partial t^k},$$

где

$$v(x, t) = \frac{a_1}{t^k} \int\limits_{r=t} f(y)\, d\widetilde{y} + \sum_{j=2}^{k} a_j \int\limits_{r \leqslant t} \frac{(t-r)^{j-1}}{(j-2)!} \frac{1}{r^{k+j-1}} f(y)\, dy \tag{3}$$

и $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные числа, точное значение которых для нас в дальнейшем несущественно.

Из формулы (3) непосредственно видно, что если функция $f(y)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные до порядка λ включительно ($\lambda > 0$), то функция $v(x, t)$ имеет для малых t производные по t до порядка λ включительно, причем справедлива оценка

$$\frac{\partial^\lambda v(x, t)}{\partial t^\lambda} = O(t^l). \tag{4}$$

Если $f(y) = C$, где C — константа, то

$$\begin{aligned} v(x, t) = v_0(x, t) &= C \frac{t^k}{k!}, \\ \frac{\partial^\lambda v_0(x, t)}{\partial t^\lambda} &= C \frac{t^l}{l!}. \end{aligned} \tag{5}$$

Как показано в работе (4), справедливо тождество:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R^*(x, \mu) = (-1)^k \int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(k)}(t, a)\, v(x, t)\, dt, \tag{6}$$

где

$$R^*(x, \mu) = \int\limits_{E_n} \theta^*(x, y; \mu) f(y)\, dy.$$

Интегрируя правую часть тождества (6) λ раз по частям, мы получим:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R^*(x, \mu) = (-1)^l \int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon^{(l)}(t, a) \frac{\partial^\lambda v(x, t)}{\partial t^\lambda}\, dt. \tag{7}$$

Докажем оценку

$$\underset{\mu}{\overset{\mu+1}{\mathrm{V}}}\{R^*(x,\mu)\} = o(\mu^l). \tag{8}$$

Положим

$$E(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, e^{-i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}\, dx_1\ldots dx_n.$$

Тогда

$$R^*(x,\mu) = \int\limits_0^{\mu} d\nu \left\{ \int\limits_{|\alpha|=\nu} E(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\, e^{i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}\, \widetilde{d\alpha}\right\},$$

причем

$$|\alpha|^2 = \alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2$$

и, следовательно,

$$\underset{\mu}{\overset{\mu+1}{\mathrm{V}}}\{R^*(x,\mu)\} = \int\limits_{\mu}^{\mu+1} d\nu \left| \int\limits_{|\alpha|=\nu} E(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\, e^{i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}\, \widetilde{d\alpha}\right|.$$

Зафиксируем числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ и пусть $|\alpha_j|$ — наибольшее из чисел $|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|$. Тогда

$$\nu = \sqrt{\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2} \leqslant \sqrt{n}\,|\alpha_j|$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|\alpha_j|} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\nu}.$$

Интегрируя λ раз по частям, мы получим:

$$|E(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \leqslant \frac{C}{|\alpha_j|^{\lambda}}\left|\int\limits_{E_n} \frac{\partial^{\lambda} f}{\partial x_j^{\lambda}}\, e^{-i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}\, dx\right| \leqslant \frac{C}{\nu^{\lambda}}\, G_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

$$G_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} \frac{\partial^{\lambda} f}{\partial x_j^{\lambda}} e^{-i(\alpha,\,x)}\, dx.$$

Поэтому

$$\underset{\mu}{\overset{\mu+1}{\mathrm{V}}}\{R^*(x,\mu)\} \leqslant \frac{C}{\mu^{\lambda}}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int\limits_{\mu}^{\mu+1} d\nu\left[\int\limits_{|\alpha|=\nu}|G_j|^2\,\widetilde{d\alpha}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{\mu}^{\mu+1} d\nu\left[\int\limits_{|\alpha|=\nu}\widetilde{d\alpha}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= o(\mu^{k-\lambda}) = o(\mu^l),$$

что и требовалось доказать.

Предположим, для определенности, что число l четно: $l = 2j$. Случай нечетного l изучается аналогично (см. § 3).

Положим

$$\alpha(x, \nu) = \int_0^1 v^{(\lambda)}(x, t) \cos \nu t \, dt,$$

$$\alpha_1(x, \mu) = (-1)^j \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \nu^{2j} \alpha(x, \nu) \, d\nu.$$

Из равенства (7) следует (см. § 3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a) \, d_\mu \rho(x, \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \tag{9}$$

где

$$\rho(x, \mu) = R^*(x, \mu) - \alpha_1(x, \mu).$$

Из определения функции $\alpha_1(x, \mu)$ и оценки (8) следует оценка

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\rho(x, \mu)\} = o(\mu^l). \tag{10}$$

Из равенства (9), оценки (10) и теоремы 1.3.1 работы [4] следует (см. следующее дополнение к настоящей работе):

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} d_\nu \rho(x, \nu) = 0. \tag{11}$$

С другой стороны [см. [5], формула (2.35)],

$$\frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} d_\nu \rho(x, \nu) = \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} d_\nu R^*(x, \nu) -$$

$$- \frac{2(-1)^j}{\pi} \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} \nu^{2j} \alpha(x, \nu) \, d\nu =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} d_\nu R^*(\alpha, \nu) -$$

$$- \frac{2(-1)^j}{\pi} \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^1 v^{(\lambda)}(x, t) \left\{ \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} \cos \nu t \, d\nu \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{2j} d_\nu R^*(\alpha, \nu) - \frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mu \int_0^1 v^{(\lambda)}(x, t) \left[\frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \frac{I_{2j+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac{1}{2}}} \right] dt. \tag{12}$$

Из тождества

$$v^{(\lambda)}(x, t) = \left[v(x, t) - f(x) \frac{t^k}{k!} \right]^{(\lambda)} + f(x) \frac{t^{2j}}{(2j)!}$$

следует:

$$\frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\mu^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{(\lambda)}(x,t)\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[\frac{I_{2j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac{1}{2}}}\right]dt =$$

$$=\frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\mu^{\frac{1}{2}}\int_0^1\left[v(x,t)-f(x)\frac{t^k}{k!}\right]_t^{(\lambda)}\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[\frac{I_{2j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac{1}{2}}}\right]dt +$$

$$+\frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2j)!}\mu f(x)\int_0^1 t^{2j}\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[\frac{I_{2j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac{1}{2}}}\right]dt = I_1+I_2.$$

Если $j=0$, то

$$I_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\int_0^1\frac{I_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\frac{1}{2}}}d(\mu t)=$$

$$=f(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\int_0^\infty\frac{I_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}}dz-\int_\mu^\infty\frac{I_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}}dz\right\}=f(x)+O\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{13}$$

ибо [см. ([7]), стр. 428]

$$\int_0^\infty\frac{I_n(z)}{z^n}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \tag{14}$$

Если $j>1$, то, интегрируя по частям $2j$ раз и принимая во внимание формулу (14), мы получим:

$$I_2=\frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}f(x)\int_0^1\frac{I_{2j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac{1}{2}}}d(\mu t)+O\left(\frac{1}{\mu^{2j}}\right)=\frac{f(x)}{\Gamma(2j-1)}+O\left(\frac{1}{\mu^{2j}}\right). \tag{15}$$

Нам остается показать, что при $\mu\to\infty$

$$I_1=o(1).$$

Для этого оценим при малых t

$$\left[v(x,t)-f(x)\frac{t^k}{k!}\right]_t^{(\lambda)}.$$

В силу формулы (3), имеем:

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial t^\lambda}\left[v(x,t)-f(x)\frac{t^k}{k!}\right]=\sum_{j=1}^{\lambda+1}a_j\frac{\partial^{\lambda-j+1}}{\partial t^{\lambda-j+1}}\left\{t^{k-j+1}\int_{|\alpha|=1}f(x+\alpha t)-f(x)]\,\widetilde{d\alpha}\right\}+$$

$$+\sum_{j=\lambda+2}^{k}a_j\int_{r\leqslant t}[f(y)-f(x)]\frac{(t-r)^{j-\lambda-2}}{(j-\lambda-2)!\,r^{k+j-1}}dy=J_1+J_2,$$

где α — переменная точка поверхности единичной сферы в E_n, $r=|x-y|$.

В силу дифференцируемости функции $f(y)$, имеем:

$$|f(x+\alpha t)-f(x)|=O(t),$$
$$|f(y)-f(x)|=O(t).$$

Поэтому

$$J_2=O(t^{2j+1}). \tag{16}$$

Чтобы оценить сумму J_1, рассмотрим общий член этой суммы:

$$\frac{\partial^{\lambda-j+1}}{\partial t^{\lambda-j+1}}\left\{t^{k-j+1}\int\limits_{|\alpha|=1}[f(x+\alpha t)-f(x)]\,\widetilde{d\alpha}\right\}=$$
$$=\sum_{s=0}^{\lambda-j+1}C^s_{\lambda-j+1}\frac{\partial^{\lambda-j+1-s}}{\partial t^{\lambda-j+1-s}}[t^{k-j+1}]\frac{\partial^s}{\partial t^s}\left\{\int\limits_{|\alpha|=1}[f(x+\alpha t)-f(x)]\,\widetilde{d\alpha}\right\}.$$

Если $s>0$, то

$$\frac{\partial^{\lambda-j+1-s}}{\partial t^{\lambda-j+1-s}}[t^{k-j+1}]=O(t^{k-\lambda+s})=O(t^{2j+1}). \tag{17}$$

Для $s=0$ имеем:

$$\frac{\partial^{\lambda-j+1-s}}{\partial t^{\lambda-j+1-s}}[t^{k-j+1}]\left\{\int\limits_{|\alpha|=1}[f(x+\alpha t)-f(x)]\,\widetilde{d\alpha}\right\}=O(t^{k-\lambda+1})=O(t^{2j+1}). \tag{18}$$

Из (16), (17) и (18) следует, что

$$\left[v(x,t)-f(x)\frac{t^k}{k!}\right]_t^{(\lambda)}=O(t^{2j+1}). \tag{19}$$

Обозначим через η произвольное положительное число и положим

$$I_1=C\int_0^1\left[v(x,t)-\frac{t^k}{k!}f(x)\right]_t^{(\lambda)}\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[\frac{I_{2j+\frac12}(\mu t)}{(\mu t)^{2j+\frac12}}\right]d(\mu t)=$$
$$=C\left\{\int_0^{\eta}\ldots d(\mu t)+\int_{\eta}^{1}\ldots d(\mu t)\right\}=I_{11}+I_{12}.$$

В силу оценки (19),

$$|I_{11}|\leqslant\frac{C}{\mu}\int_0^{\mu\eta}z^{2j+1}\left|\frac{d^{2j}}{dz^{2j}}\left[\frac{I_{2j+\frac12}(z)}{z^{2j+\frac12}}\right]\right|dz=O(\eta). \tag{20}$$

Далее, если $j=0$, то при $\mu\to\infty$

$$I_{12}=C\int_{\eta}^{1}\beta(x,t)\frac{I_{\frac12}(\mu t)}{(\mu t)^{\frac12}}\mu\,dt=C\int_{\eta}^{1}\frac{\beta(x,t)}{t}I_{\frac12}(\mu t)\sqrt{\mu t}\,dt=o(1),$$
$$\beta(x,t)=\left[v(x,t)-\frac{t^k}{k!}f(x)\right]_t^{(\lambda)}, \tag{21}$$

в силу леммы Римана — Лебега.

Если $j > 0$, то при $\mu \to \infty$

$$I_{12} = C \int_{\eta}^{1} \beta(x,t) \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{J^{(2j)}_{2j+\frac{1}{2}}(\mu t)}{t^{2j+\frac{1}{2}}} \mu dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) =$$

$$= C \int_{\eta}^{1} \frac{\beta(x,t)}{t^{2j+1}} J^{(2j)}_{2j+\frac{1}{2}}(\mu t)\, dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = o(1), \tag{22}$$

в силу той же леммы.

Сформулированная в начале дополнения теорема следует из (12), (13), (15), (20), (21) и (22).

2. В случае четного $n = 2k$ мы можем искусственно повысить на единицу число измерений и применить доказанную теорему. Таким образом, мы получим, что если $f(x) = f(x_1, \ldots, x_{2k})$ имеет частные производные с интегрируемым квадратом до порядка λ включительно, ограниченные в точке x, то средние по Риссу порядка $k - \lambda$ разложения функции $f(y)$ в интеграл Фурье сходятся в точке x к $f(x)$. Вероятно, в случае четного n вместо средних порядка $k - \lambda$ можно брать средние порядка $k - \frac{1}{2} - \lambda$, однако нам не удалось этого доказать.

В заключение заметим, что, применяя методы настоящей работы, нетрудно доказанную нами теорему перенести с интегралов Фурье на ряды Фурье.

Дополнение 3

Суммирование по Риссу интегралов Стильтьеса

В работе ([4]) мы изучили поведение при $\mu \to \infty$ средних по Риссу

$$R_s(\mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d\sigma(\nu), \tag{1}$$

изучив предварительно поведение при $\mu \to \infty$ средних

$$T_s(\mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)^s d\sigma(\nu). \tag{2}$$

В настоящем приложении мы покажем, что методы, использованные в работе ([4]), позволяют изучить непосредственно средние (1), причем с более точными оценками.

Пусть $\sigma(\nu)$ — нечетная функция, определенная на всей числовой прямой, и пусть выполняется оценка

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \{\sigma(\nu)\} = o(|\mu|^r), \tag{3}$$

где $r \geqslant 0$. Далее, допустим, что преобразование Бохнера — Стильтьеса (соответствующего порядка) функции $\sigma(\nu)$ в некотором интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ эквивалентно нулю. Тогда на основании теоремы 1.3.1 работы ([4]) мы получим оценку *:

$$\sigma(\mu) = o(|\mu|^r), \tag{4}$$

или

$$\int_0^{\mu} d\sigma(\nu) = o(|\mu|^r). \tag{4'}$$

Далее, $\nu\sigma(\nu)$ четна и ее преобразование Бохнера в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ эквивалентно нулю. Кроме того, справедлива оценка [см. оценку (4)]:

$$\int_{\mu}^{\mu+1} |\nu\sigma(\nu)|\, d\nu = o(|\mu|^{r+1}).$$

Из этой оценки и теоремы 1.3.1 работы ([4]) следует оценка:

$$\sigma_2(\mu) = \int_0^{\mu} \nu\sigma(\nu)\, d\nu = \int_0^{\mu} \nu \left[\int_0^{\nu} d\sigma(\nu_1)\right] d\nu = o(|\mu|^{r+1}),$$

или после перемены порядка интегрирования:

$$\sigma_2(\mu) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)\, d\sigma(\nu) = o(|\mu|^{r+1}).$$

Функция $\sigma_2(\mu)$ нечетна. Поэтому функция $\mu\sigma_2(\mu)$ четна и для нее справедлива оценка:

$$\int_{\mu}^{\mu+1} \nu\,|\sigma_2(\nu)|\, d\nu = o(\mu^{r+2}).$$

Поэтому, снова применяя теорему 1.3.1 работы ([4]), мы получим:

$$\sigma_3(\mu) = \int_0^{\mu} \nu\sigma_2(\nu)\, d\nu = \frac{1}{2}\int_0^{\mu} \nu_1 \left[\int_0^{\nu_1} (\nu_1^2 - \nu^2)\, d\sigma(\nu)\right] d\nu_1 =$$

$$= \frac{1}{2^2 \cdot 2}\int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^2\, d\sigma(\nu) = o(\mu^{r+2}).$$

Продолжая этот процесс, нетрудно получить оценку:

$$\sigma_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^n\, d\sigma(\nu) = o(\mu^{r+n}). \tag{5}$$

Пользуясь оценкой (5), докажем следующую теорему.

---

* $\sigma(\mu)$ нечетна и поэтому постоянная интегрирования равна нулю.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\sigma(\nu)$ — нечетная функция, определенная на всей числовой прямой и удовлетворяющая оценке (3). Допустим, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\sigma(\nu)$ в некотором интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ $(\Lambda > 0)$ эквивалентно нулю. Тогда для любого неотрицательного s справедлива оценка*

$$\int_0^{\nu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d\sigma(\nu) = o(\mu^{r-s}). \tag{3}$$

В частности, при $s = r$ получим:

$$\int_0^{\nu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^r d\sigma(\nu) = o(1). \tag{7}$$

Доказательство. Если s есть целое число, $s = n$, то оценка (6) следует из оценки (5) (после деления на μ^{2n}). Допустим, что $s = n + \alpha$, где $n > 0$ — целое число и $0 < \alpha < 1$.

Интегрируя правую часть равенства (6) $n + 1$ раз по частям мы получим:

$$\sigma_{s+1}(\mu) = \int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^s d\sigma(\nu) = C \int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-1} \nu \sigma_{n+1}(\nu)\, d\nu,$$

где $\sigma_{n+1}(\nu)$ определяется равенством (5) и C — константа.

Обозначим через ε произвольное положительное число и через $A = A(\varepsilon)$ — столь большое положительное число, что для $\nu > A$ выполняется оценка:

$$|\sigma_{n+i}(\nu)| \leqslant \varepsilon \nu^{n+r+i-1} \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Такое число A найдется в силу оценки (5). Далее, положим:

$$\int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-1} \nu \sigma_{n+1}(\nu)\, d\nu = \int_0^{\mu-1} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-1} \nu \sigma_{n+1}(\nu)\, d\nu +$$

$$+ \int_{\mu-1}^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-1} \nu \sigma_{n+1}(\nu)\, d\nu = I_1 + I_2.$$

Из оценки (8) при $\mu - 1 > A$ следует:

$$|I_2| \leqslant \varepsilon \mu^{n+r} \int_{\mu-1}^{\mu} \nu (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-1} d\nu = \frac{\varepsilon}{2\alpha} \mu^{n+r} (2\mu - 1)^{\alpha} \leqslant C\varepsilon \mu^{r+s}. \tag{9}$$

Для того чтобы оценить I_1, снова интегрируем по частям. Мы получим:

$$I_1 = (2\mu - 1)^{\alpha-1} \sigma_{n+2}(\mu - 1) + C \int_0^{\mu-1} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-2} \nu \sigma_{n+2}(\nu)\, d\nu = I_{11} + I_{12}.$$

Из оценки (8) следует:

$$|I_{11}| \leqslant C\varepsilon\mu^{r+s}. \tag{10}$$

Далее, положим:

$$I_{12} = C\int_0^{\mu-1} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-2}\,\nu\alpha_{n+2}(\nu)\,d\nu =$$

$$= C\left\{\int_0^A \ldots d\nu + \int_A^{\mu-1} \ldots d\nu\right\} = i_1 + i_2.$$

Мы имеем:

$$|i_1| \leqslant C\int_0^A (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-2}\,\nu^{n+r+2}\,d\nu \leqslant CA^{n+r+1} \tag{11}$$

Из оценки (8) следует:

$$|i_2| \leqslant C\cdot\varepsilon\int_A^{\mu-1} (\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-2}\,\nu^{n+r+2}\,d\nu \leqslant C\varepsilon\mu^{n+r+1}\int_A^{\mu-1} \nu\,(\mu^2 - \nu^2)^{\alpha-2}\,d\nu =$$

$$= C\varepsilon\mu^{r+n+1}\,[(2\mu-1)^{\alpha-1} - (\mu^2 - A^2)^{\alpha-1}] < C\varepsilon\mu^{r+s}. \tag{12}$$

Из оценок (9), (10), (11) и (12) выводим:

$$|\sigma_{s+1}(\mu)| < C_1\varepsilon\mu^{r+s} + C_2A^{n+r+1}. \tag{13}$$

Так как $\mu \to \infty$, то мы вправе считать, что

$$A^{n+r+1} < \varepsilon\mu^{r+s}.$$

Поэтому из оценки (13) следует для достаточно больших μ оценка:

$$\left|\int_0^{\mu} (\mu^2 - \nu^2)^s\,d\sigma(\nu)\right| < C\cdot\varepsilon\mu^{r+s}. \tag{14}$$

Разделив обе части неравенства (14) на μ^{2s}, мы получим:

$$\left|\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d\sigma(\nu)\right| < C\cdot\varepsilon\mu^{r-s}.$$

Последняя оценка, в силу произвольности числа ε, эквивалентна оценке (6).

Замечание. Если в оценке (3) вместо o стоит O, т. е. справедлива оценка

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1}\{\sigma(\nu)\} = O(\mu^r),$$

то и с оценкой (6) произойдет то же самое.

Поступило
28.XII.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., О решении задачи Коши для уравнения $\Delta u + q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ по методу С. Л. Соболева, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 337—376.

[2] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, \ldots, x_n)\}\ u = 0$, Доклады Ак. наук СССР, 97, № 6 (1954), 961—964.

[3] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1945.

[4] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Мат. сборник, 35 (77): 2 (1954), 267—316.

[5] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\}\ u = 0$, Труды Моск. мат. об-ва, IV, 1955.

[6] Bochner S., Summation of multiple Fourier series by spherical means, Trans. Amer. math. soc., 40, № 2 (1936), 175—207.

[7] Ватсон Г., Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, Москва, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 469—484

О. В. БЕСОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В статье исследуются некоторые дифференциальные свойства гармонических функций, заданных на полупространстве, в зависимости от свойств граничных функций.

Введение

Работа посвящена выяснению свойств гармонических функций, заданных на полупространстве $x_n > 0$ полупространства точек с вещественными координатами $R_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Относительно произвольных, не обязательно гармонических функций, заданных на полупространстве $x_n > 0$, известно следующее:

I) Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_p^{(r)}(x_n > 0)$, где r — не целое, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $r - \frac{1}{p} > 0$. (Определение классов $H_p^{(r)}$ см. в (2).) Тогда функцию f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

будет принадлежать классу $H_p^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(R_{n-1})$ и для нее выполняется условие:

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})|^p \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} = 0. \quad (1)$$

Это следует из возможности продолжения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ через гиперплоскость $x_n = 0$ на все пространство с сохранением дифференциальных свойств и теоремы С. М. Никольского [см. (3), стр. 267], обобщающей теоремы вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашова [см. (5)].

II) Обратно, пусть на $x_n = 0$ задана функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(R_{n-1}),$$

где $r - \frac{1}{p} > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ на $x_n > 0$ (и даже на R_n) такую, что

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in H_p^{(r)} \quad (x_n > 0)$$

и выполняется условие (1) [см. (2), стр. 300].

Подобное обстоятельство в несколько измененном виде, по крайней мере для некоторых r, имеет место и для гармонических на $x_n > 0$ функций. Именно:

Г) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и пусть на полупространстве $x_n > 0$ задана функция U со следующими свойствами:

(A) U — гармоническая для $x_n > 0$.

(B) Существует константа M такая, что для всех $x_n > 0$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |U(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^p \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M.$$

(C) Все производные (обобщенные) от $U(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ порядка от 1 до $\bar{r}$ (при $p = \infty$ от 0 до $\bar{r}$) ограничены в смысле нормы, определенной на полупространстве $x_n > 0$:

$$\| f(x_1, \dots, x_n) \| = \left(\int_{x_n > 0} |f(Q)|^p \, dQ \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(D) Производные $\bar{r}$-го ($\bar{r} \geqslant 1$ для $1 \leqslant p < \infty$; $\bar{r} \geqslant 0$ для $p = \infty$) порядка подчинены следующему условию:

$$\left\| \frac{\partial^{\bar{r}} U(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - \frac{\partial^{\bar{r}} U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right\| \leqslant \overline{N} |h_i|^{\alpha}$$

при $0 < \alpha < 1$ или

$$\left\| \frac{\partial^{\bar{r}} U(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 2h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\partial^{\bar{r}} U(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} + \frac{\partial^{\bar{r}} U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right\| \leqslant \overline{N} |h|$$

при $\alpha = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \bar{r}$, $\quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h_n > 0$.

Тогда существует функция

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(r - \frac{1}{p}\right)}(R_{n-1}), \qquad r = \bar{r} + \alpha,$$

для которой имеет место условие:

$$\text{(E)} \quad \lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |U(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})|^p \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Это утверждение является следствием сформулированного выше утверждения I), если учесть, что функция U, подчиняющаяся условиям (B),

(C) и (D), может быть продолжена за полосу $0 < x_n \leqslant a$ на $x_n > a$ таким образом, что новая функция, определенная на $x_n > 0$, будет принадлежать классу $H_p^{(r)}(x_n > 0)$, $r = \bar{r} + \alpha$ [см. (2)].

II′) Обратная теорема справедлива, по крайней мере, в следующей формулировке:

Пусть граничная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(R_{n-1}; N)$, причем $r > 1$, $r - \frac{1}{p}$ — не целое (для $1 \leqslant p < \infty$) и $r > 0$, r — не целое (для $p = \infty$). Тогда существует гармоническая для $x_n > 0$ функция, для которой выполняются условия (B), (C), (D), (E) и имеет место условие

(F) $\overline{N} < c(N + \| \varphi \|)$.

В работе доказывается теорема II′). Она представляет собой обобщение соответствующей теоремы С. М. Никольского (1).

Заметим, что из того факта, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{(\varepsilon)}(R_{n-1}) \text{ при } \varepsilon > 0,$$

следует уже, что существует лишь единственная функция со свойствами (A), (B), (E).

Эта функция эффективно выражается формулой

$$U(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K(u_1 - x_1, \ldots, u_{n-1} - x_{n-1}, x_n)\, \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})\, du_1 \ldots du_{n-1}, \quad (2)$$

где

$$K = K(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2x_n}{\omega_n \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{n}{2}}}$$

и ω_n — постоянная, которая находится из условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \equiv 1 \quad (3)$$

(для $p = 2$ см. (1), стр. 252).

Часть доказательства проводится для $n = 2$, однако там, где пространство большего числа измерений вносит некоторую специфику в рассуждения, мы будем делать соответствующие оговорки.

Для случая $p = \infty$ будет проведено отдельное доказательство.

Везде считается, что $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$.

В работе часто будет применяться обобщенное неравенство Минковского (см. по этому поводу (4), стр. 13).

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть граничная функция*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(1 - \frac{1}{p} + \varepsilon\right)}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{p}.$$

Тогда соответствующая гармоническая для $x_n > 0$ *функция удовлетворяет условию* (C) *при* $\bar{r} = 1$.

Доказательство этой теоремы при $p = 2$ имеется в работе [1] (стр. 255). При произвольном p оно аналогично.

В дальнейшем нам понадобится следующая, касающаяся оценки остаточного члена формулы Тейлора

ЛЕММА 1. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_p^{(m+\alpha)}$, *где* m — *целое*, $0 < \alpha < 1$, *и пусть*

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + R_m$$

— *разложение функции* f *в окрестности точки* $(x_1, \ldots, x_n)$ *по степеням* h_i *с остаточным членом* R_m. *Тогда*

$$\| R_m \| \leqslant M \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{}' h_i^2} \right)^{m+\alpha}.$$

(Здесь R_m рассматривается как функция $x_1, \ldots, x_n$.)

Доказательство. Заметим, что

$$f(x + h) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) h + \frac{1}{2!} f''(x) h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x) h^m + R_m,$$

$$R_m = \int_0^h \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{m-1}} [f^{(m)}(u_m + x) - f^{(m)}(x)] \, du_m \, du_{m-1} \ldots du_1.$$

Известным способом происходит обобщение на функции многих переменных. Введем функцию

$$\chi(t) = f(x_1 + t h_1, x_2 + t h_2, \ldots, x_n + t h_n);$$

тогда

$$R_m = \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{m-1}} [\chi^{(m)}(u_m) - \chi^{(m)}(0)] \, du_m \, du_{m-1} \ldots du_1,$$

$$\chi^{(m)}(t) = \left(\sum_1^{n-1} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m f(x_1 + t h_1, \ldots, x_n + t h_n).$$

Следовательно,

$$\| R_m \| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} | R_m |^p \, dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 | \chi^{(m)}(u_m) - \chi^{(m)}(0) | \, du_m \right\}^p dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \text{(по обобщ. нер-ву Минковского)} \leqslant \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m \cdot [f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f(x_1, \dots, x_n)] \right|^p dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\Sigma k_i = m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} | h_1 |^{k_1} \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. \dots | h_n |^{k_n} \frac{\partial^m [f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) - f(x_1, \dots, x_n)]}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|^p dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \sum_{\Sigma k_i = m} \frac{m}{k_1! \dots k_n!} | h_1 |^{k_1} \dots | h_n |^{k_n} \left\| \frac{\partial^m [f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) - f(x_1, \dots, x_n)]}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\| dt \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \right)^{m+\alpha}$$

Лемма доказана.

Теорема 1 допускает обобщение на случай производных высшего порядка.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть граничная функция*

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(\bar{r} - \frac{1}{p} + \varepsilon\right)}, \quad \bar{r} \geqslant 1,$$

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{p};$$

тогда соответствующая гармоническая для $x_n > 0$ функция удовлетворяет условию (C).

Доказательство. Эту теорему мы будем доказывать с помощью индукции по $\bar{r}$. Для $\bar{r} = 1$ справедливость утверждения доказана (теорема 1). Пусть теорема верна при $\bar{r} = k$. Покажем, что тогда она верна и при $\bar{r} = k + 1$. Пусть $(k+1)$-я производная получена дифференциро-

ванием производной k-го порядка по одному из первых $n-1$ аргументов (для определенности — по первому). Тогда

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{s_1+1}\dots\partial x_n^{s_n}}U(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial^k}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots$$

$$\dots\int_{-\infty}^{\infty}K(u_1,\dots,u_{n-1},x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(u_1+x_1,\dots,u_{n-1}+x_{n-1})\,du_1\dots du_{n-1}=$$

$$=\frac{\partial^k}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots$$

$$\dots\int_{-\infty}^{\infty}K(u_1,\dots,u_{n-1},x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(u_1+x_1,\dots,u_{n-1}+x_{n-1})\,du_1\dots du_{n-1}.$$

Но это — выражение производной k-го порядка от гармонической функции, соответствующей граничной функции

$$\psi(x_1,\dots,x_{n-1})=\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

причем если

$$\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\in H_p^{\left(k+1-\frac{1}{p}+\varepsilon\right)},$$

то

$$\psi(x_1,\dots,x_{n-1})\in H_p^{\left(k-\frac{1}{p}-\varepsilon\right)}.$$

Ввиду индуктивного предположения, производные этого типа $(k+1)$-го порядка от u суммируемы в p-й степени на полупространстве $x_n>0$.

Случай, когда производная $(k+1)$-го порядка образована дифференцированием производной k-го порядка по x_n, рассматривается следующим образом.

$U'_{x_n}(x_1,\dots,x_n)$ — гармоническая функция, причем $\|U'_{x_n}\|<\infty$ (теорема 1). Тогда (подобно тому, как это сделано у С. М. Никольского для гармонической функции, удовлетворяющей условию (B), при $p=2$) доказывается неравенство для $x_n\geqslant\delta$:

$$|U'_{x_n}(x_1,\dots,x_n)|\leqslant\frac{\|U'_{x_n}\|(2\delta)^{-\frac{n}{p}}\cdot 2^n\cdot n}{\omega_n},\qquad(4)$$

которое дает возможность на основании классической теоремы представить U'_{x_n} для $x_n>\delta$ в виде:

$$U'_{x_n}(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}K(u_1-x_1,\dots,\ u_{n-1}-x_{n-1},\ x_n)U'_{x_n}(u_1,\dots,u_{n-1},\delta)du_1,\dots,du_{n-1}.$$

Итак, для $x_n > \delta$

$$\frac{\partial^{k+1} U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} U(x_1, \ldots, x_n) \right] =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K(u_1 - x_1, \ldots, u_{n-1} - x_{n-1}, x_n - \delta) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K'_{x_n}(t_1 - u_1, \ldots, t_{n-1} - u_{n-1}, \delta) \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) dt_1 \ldots dt_{n-1} \right\} du_1 \ldots du_{n-1} \right].$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K'_{x_n}(t_1 - u_1, \ldots, t_{n-1} - u_{n-1}, \delta) \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) dt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \psi_\delta(u_1, \ldots, u_{n-1}) = A_\delta[\varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})].$$

Мы покажем ниже (см. лемму 2), что если

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(k+1+\frac{1}{p}+\varepsilon\right)},$$

то

$$\psi_\delta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(k-\frac{1}{p}+\varepsilon\right)}(N),$$

где N не зависит от δ, а ψ_δ и все ее производные до $(k-1)$-го порядка ограничены числом M, не зависящим от δ. Имеем:

$$\left\{ \int_{x_n > \delta} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n+1}} U(x_1, \ldots, x_n) \right|^p dx_1 \ldots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{подст. } x_n - \delta = \eta \\ \text{и замена } \eta \text{ на } x_n \end{matrix} \right) = \left\| \frac{\partial^k U_\delta}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right\|,$$

где $U_\delta(x_1, \ldots, x_n)$ — гармоническая для $x_n > 0$ функция, порожденная $\psi_\delta(x_1, \ldots, x_{n-1})$, заданной на $x_n = 0$. Поскольку числа N и M не зависят от δ, то найдется число k, не зависящее от δ, такое, что

$$\left\| \frac{\partial^k U_\delta}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right\| \leqslant k.$$

Поскольку неравенство

$$\left\{ \int_{x_n > \delta} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n+1}} U(x_1, \ldots, x_n) \right|^p dx_1 \ldots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant k$$

справедливо при любом δ, то и

$$\left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n+1}} U(x_1, \ldots, x_n) \right\| \leqslant k.$$

Таким образом, и случай, когда производная $(k+1)$-го порядка образована дифференцированием по x_n, будет исчерпан после того, как мы докажем неравенство (4) и лемму 2.

Доказательство неравенства (4). Пусть U_1 — гармоническая для $x_n>0$ функция с ограниченной нормой. Для $x_n\geqslant\delta$ справедливо равенство:

$$U_1(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{s_r}U_1\,ds,\quad r<\delta,$$

где s_r обозначает сферу $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=r^2$. Отсюда следует:

$$r^{n-1}|U_1|\leqslant\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{s_r}|U_1|\,ds.$$

Интегрируем обе части неравенства по r от 0 до δ:

$$\frac{\delta^n}{n}|U_1|<\int\limits_{-\delta}^{\delta}\ldots\int\limits_{-\delta}^{\delta}|U_1|\,dv\leqslant\text{(неравенство Гельдера)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega_n}\left\{\int\limits_{-\delta}^{\delta}\ldots\int\limits_{-\delta}^{\delta}|U_1|^p dv\right\}^{\frac{1}{p}}(2\delta)^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\leqslant\frac{1}{\omega_n}\|U_1\|(2\delta)^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Отсюда вытекает неравенство (4).

Заметим, что

$$|K'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)|<\frac{A_1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{n}{2}}},\tag{5}$$

откуда следует:

$$\left\{\int\limits_0^\infty K_{x_i}(u_1,\ldots,u_{n-1},x_n)^p dx_n\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant A_1\left\{\int\limits_0^\infty\frac{dx_n}{(\rho^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}p}}\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ x_n=\rho\eta\end{matrix}\right)=A_1\left\{\int\limits_0^\infty\frac{\rho\,d\eta}{\rho^{np}(1+\eta^2)^{\frac{n}{2}p}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{A}{\rho^{n-\frac{1}{p}}}.\tag{6}$$

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\in H_p^{(k+1+\alpha)}(N_1),\quad 0<\alpha<1,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда $A_\delta(\varphi)=\psi_\delta(x_1,\ldots,x_{n-1})\in H_p^{(k+\alpha)}(N_2)$ *и* $\|\psi_\delta\|\leqslant M$.

Эта лемма верна и для $p=\infty$.

Доказательство. Очевидно, достаточно ограничиться случаем $k=0$.

I. Покажем, что $\| \psi_\delta \| \leqslant M$. Введем функцию

$$\bar{u}_j = \bar{u}_j(u_j) = \begin{cases} u_j & \text{при } |u_j| < 1, \\ 0 & \text{при } |u_j| > 1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\psi_\delta(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K'_{x_n}(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)[\varphi(u_1+t_1, \ldots, u_{n-1}+t_{n-1}) -$$

$$- \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{u}_j \varphi'_{u_j}(t_1, \ldots, t_{n-1})]\, du_1 \ldots du_{n-1};$$

$$\| \psi_\delta \|^p \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |K'(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)|^p |\varphi(u_1 + t_1, \ldots, u_{n-1} + t_{n-1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{u}_j \varphi'_{u_j}(t_1, \ldots, t_{n-1})|^p dt_1 \ldots dt_{n-1} \right\}^{\frac{1}{p}} du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= \underset{\rho<1}{I_1} + \underset{\rho>1}{I_2}, \qquad \rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^2,$$

$$I_1 = \int_{\rho<1} \ldots \int |K'(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)| \cdot \| R_1 \|\, du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant \left(\begin{array}{c} \text{см. лемму 1} \\ \text{и оценку (5)} \end{array} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\rho<1} \ldots \int \frac{A_1}{\rho^n} c_1 \rho^{1+\alpha} du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant M_1,$$

$$I_2 = \int_{\rho>1} \ldots \int |K'(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u_1 + t_1, \ldots, u_{n-1} + t_{n-1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{u}_j \varphi'_{u_j}(t_1, \ldots, t_{n-1})|^p dt_1 \ldots dt_{n-1} \right\}^{\frac{1}{p}} du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\rho>1} \ldots \int \frac{A_1}{\rho^n} \left\{ 2 \| \varphi \| + \sum_{j=1}^{n-1} |\bar{u}_j| \cdot \| \varphi'_{u_j} \| \right\} du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\rho>1} \ldots \int \frac{c_2}{\rho^n} du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant M_2.$$

Следовательно,

$$\| \psi_\delta \| \leqslant M_1 + M_2 = M.$$

II. Покажем, что можно выбрать N_2, годное одновременно для всех δ. Введем функцию

$$\bar{u}_{n_j} = u_{n_j}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \begin{cases} u_j & \text{при } \rho < h, \\ 0 & \text{при } \rho > h, \end{cases}$$

где

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^2.$$

Пусть приращение $h\,(0<h<1)$ дается первому аргументу (в случае приращения другого аргумента доказательство повторяется слово в слово):

$$\psi_\delta(t_1+h,\,t_2,\ldots,t_{n-1})-\psi_\delta(t_1,\ldots,t_{n-1})=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K'_{x_n}(u,\ldots,u_{n-1},\delta)\,[\varphi(u_1+t_1+h;\,u_2+t_2,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1})-$$

$$-\varphi(u_1+t_1,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1})]\,du_1\ldots du_{n-1}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K'_{x_n}(u_1,\ldots,u_{n-1},\delta)\,[(\varphi(u_1+t_1+h;\,u_2+t_2,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1})-$$

$$-\varphi(u_1+t_1,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1}))-(\varphi(t_1+h,\,t_2,\ldots,t_{n-1})-\varphi(t_1,\ldots,t_{n-1}))-$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\bar{u}_{h_j}(\varphi'_{u_j}(t_1+h,\,t_2,\ldots,t_{n-1})-\varphi'_{u_j}(t_1,\ldots,t_{n-1}))]\,du_1\ldots du_{n-1};$$

$$\|\,\psi_\delta(t_1+h,\,t_2,\ldots,t_{n-1})-\psi_\delta(t_1,\ldots,t_{n-1})\,\|=$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K'_{x_n}(u_1,\ldots,u_{n-1},\delta)\,[\ldots]\,du_1\ldots du_{n-1}\right|\right\}^p dt_1\ldots dt_{n-1}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\begin{array}{c}\text{по обобщ. нер-ву}\\ \text{Минковского}\end{array}\right)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}K'_{x_n}(u_1,\ldots,u_{n-1},\delta)\,|\cdot\,\|\,[\ldots]\,\|\,du_1\ldots du_{n-1}=$$

$$=\underset{\rho<h}{I_1}+\underset{\rho>h}{I_2},\qquad \rho^2=\sum_{k=1}^{n-1}u_k^2,$$

$$I_1=\int\ldots\int_{\rho<h}|\,K'_{x_n}(u_1,\ldots,u_{n-1},\delta)|\cdot\|[R_1]\|du_1\ldots du_{n-1}\leqslant$$

$$\leqslant\int\ldots\int_{\rho<h}\frac{A_1}{\rho^n}c_2\rho^{1+\alpha}du_1\ldots du_{n-1}\leqslant\left(\begin{array}{c}\text{переход к полярным}\\ \text{координатам}\end{array}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^h\frac{c_3\rho^{1+\alpha}\rho^{n-2}d\rho}{\rho^n}=c_3\int_0^h\rho^{\alpha-1}\leqslant c_4h^\alpha,$$

$$I_2=\int\ldots\int_{\rho>h}|\,K'_{x_n}(u_1,\ldots,u_{n-1},\delta)|\cdot\left\|\left[\int_0^h\left\{\varphi'_{u_i}(u_1+t_1+v_1u_2+t_2,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1})-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\varphi'_{u_i}(t_1+v,\,t_2,\ldots,t_{n-1})\right\}dv\right]\right\|du_1\ldots\,du_{n-1}\leqslant\left(\begin{array}{c}\text{по обобщ. нер-ву}\\ \text{Минковского}\end{array}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\int\ldots\int_{\rho>h}\frac{A_1}{\rho^n}\left\{\int_0^h\|\,[\varphi'_{u_i}(u_1+t_1+v_1u_2+t_2,\ldots,u_{n-1}+t_{n-1})-\right.$$

$$\left.-\varphi'_{u_i}(t_1+v_1t_2,\ldots,t_{n-1})]\,\|\,dv\right\}du_1\ldots du_{n-1}\leqslant$$

$$\leqslant\int\ldots\int_{\rho>h}\frac{A_1\cdot h\cdot c_5\rho^\alpha}{\rho^n}du_1\ldots du_{n-1}\leqslant$$

$$\leqslant h\int_h^\infty\frac{c_6\rho^\alpha\rho^{n-2}}{\rho^n}d\rho=c_6\,h\int_h^\infty\frac{d\rho}{\rho^{2-\alpha}}\leqslant c_7\,h\cdot h^{\alpha-1}=c_7\,h^\alpha,\quad c_4+c_7=N_2.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть граничная функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_p^{\left(r-\frac{1}{p}+\alpha\right)}$, $r>1$, $r-\frac{1}{p}$ — *не целое. Тогда соответствующая гармоническая для* $x_n>0$ *функция удовлетворяет условию* (D).

Доказательство проведем для $n=2$. Пусть сначала $r=1$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$ или $\frac{1}{p}<\alpha\leqslant 1$.

I) Случай первого аргумента. Имеем:

$$U'(x+h, y)-U'(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} K'(u, y)\,[\varphi(u+x+h)-\varphi(x+h)]\,du-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} K'(u, y)\,[\varphi(u+x)-\varphi(x)]\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} K'(u, y)\,[\varphi(u+x+h)-\varphi(x+h)-\varphi(u+x)+\varphi(x)]\,du,$$

$$\|U'(x+h, y)-U'(x, y)\|\leqslant\left(\begin{matrix}\text{по обобщ. нер-ву}\\ \text{Минковского}\end{matrix}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{y>0}|K'(u, y)|^p\cdot|[\ldots]|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}} du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} K'(u, y)\,du\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\|[\ldots]\|_x\,du=\underset{|u|<h}{I_1}+\underset{|u|>h}{I_2};$$

$$\left\{\int_0^{\infty}|K'(u, y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{A}{|u|^{2-\frac{1}{p}}}\ \text{[см. (6)]}.$$

а) Пусть $0<\alpha<\frac{1}{p}$. Тогда

$$I_1\leqslant\int_{-h}^{h}\frac{A}{|u|^{2-\frac{1}{p}}}c_1|u|^{1+\alpha-\frac{1}{p}}du\leqslant\int_0^h\frac{c_2u^{1+\alpha-\frac{1}{p}}}{u^{2-\frac{1}{p}}}du\leqslant c_3h^{\alpha},$$

$$I_2\leqslant\int_{|u|>h}\frac{A}{|u|^{2-\frac{1}{p}}}c_4h^{1+\alpha-\frac{1}{p}}du\leqslant c_5h^{1+\alpha-\frac{1}{p}}\int_h^{\infty}\frac{du}{u^{2-\frac{1}{p}}}\leqslant c_6h^{\alpha}.$$

b) Пусть $\frac{1}{p}<\alpha<1$. В этом случае с небольшим изменением выкладки остаются теми же, что и в случае а). Изменения заключаются в оценке нормы. Пусть

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m)\in H_p^{(1+\beta)},\quad 0<\beta<1,\quad h>0.$$

Тогда

$$\|\varphi(u_1+x_1+h, u_2+x_2, \ldots, u_m+x_m)-\varphi(x_1+h, x_2, \ldots, x_m)-$$
$$-\varphi(u_1+x_1, \ldots, u_m+x_m)+\varphi(x_1, \ldots, x_m)\|\leqslant c\min\{h\rho^{\beta}, h^{\beta}\rho\},$$

где

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m} u_k^2.$$

Применяя это неравенство, мы доказываем случай b). Вывод неравенства тривиален (переход к интегралу и вынесение его из-под знака нормы).

c) Пусть $\alpha = 1$. Здесь нам приходится иметь дело со второй разностью:

$$\Delta_h^2 U'(x, y) = U'(x + 2h, y) - 2U'(x + h, y) + U'(x, y).$$

Эта Δ_h^2 переносится под знак интеграла на граничные функции. Выкладки отличаются от выкладок случая b) тем, что приходится пользоваться двумя очевидными неравенствами:

$$1)\quad \| \Delta_h^2 [\varphi(u + x) - \varphi(x)] \| \leqslant 2 \| \Delta_h [\varphi(u + x) - \varphi(x)] \|$$

для оценки $\underset{|u|<h}{I_1}$ и

$$2)\quad \| \Delta_h^2 [\varphi(u + x) - \varphi(x)] \| \leqslant h \| \Delta_h [\varphi'(u + x) - \varphi'(x)] \|$$

для оценки $\underset{|u|>h}{I_2}$. Здесь уже

$$\varphi'(x) \in H_p^{\left(r - \frac{1}{p} - 1 + \alpha\right)}.$$

II) Случай последнего аргумента.

а) $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Имеем:

$$U'(x, y + h) - U'(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [K'(u, y + h) - K'(u, y)] \cdot$$

$$\cdot [\varphi(u + x) - \varphi(x)]\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^h K''(u, y + v)\, dv \right] [\varphi(u + x) - \varphi(x)]\, du;$$

$$\| U'(x, y + h) - U'(x, y) \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{y>0} \left| \int_0^h K''(u, y + v)\, dv \right|^p \cdot \right.$$

$$\left. |\varphi(u + x) - \varphi(x)|^p\, dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} du \leqslant \text{(по обобщ. нер-ву Минковского)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^h \left\{ \int_0^{\infty} |K''(u, y + v)|^p\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} dv \right\} \| \varphi(u + x) - \varphi(x) \|\, du = I;$$

$$|K''(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{A_2}{r^{n+1}}, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Следовательно,

$$\left\{\int_0^\infty |K''(u, y+v)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_0^\infty \frac{A_2^p dy}{[u^2+(y+v)^2]^{\frac{3}{2}p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^\infty \frac{A_2^p dy}{[u^2+v^2+y^2]^{\frac{3}{2}p}}\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ y=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\eta\end{matrix}\right) =$$

$$= \left\{\int_0^\infty \frac{A_2^p (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} d\eta}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}p}(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c_1}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)}}. \qquad (7)$$

Отсюда следует:

$$I \leqslant \int_0^h \int_0^\infty \frac{c_1 \cdot c_2 u^{1-\frac{1}{p}+\alpha}}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)}} du\, dv = \left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ u=v\eta\end{matrix}\right) =$$

$$= \int_0^h \int_0^\infty \frac{c_3 (v\eta)^{1-\frac{1}{p}+\alpha} v}{v^{3-\frac{1}{p}}(1+\eta^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)}} d\eta dv \leqslant c_4 \int_0^h \frac{v^{2-\frac{1}{p}+\alpha}}{v^{3-\frac{1}{p}}} dv \leqslant c_5 h^\alpha.$$

b) $\frac{1}{p} < \alpha < 1$. Для простоты рассмотрим лишь производную $U(x, y)$ по x. Случай, когда производная взята по y, доказывается аналогично при помощи введения оператора $A_\delta(\varphi)$. Имеем:

$$U'_x(x, y+h) - U'_x(x, y) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty [K(u, y+h) - K(u, y)]\,[\varphi'(u+x) - \varphi'(x)] du =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^h K'_y(u, y+v)\, dv\right][\varphi'(u+x) - \varphi(x)]\, du;$$

$$\|U'_x(x, y+h) - U'_x(x, y)\| \leqslant \left(\begin{matrix}\text{по обобщ. нер-ву}\\ \text{Минковского}\end{matrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^\infty \left\{\int_0^\infty \left[\int_0^h K'_y(u, y+v)\, dv\right]^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \|\varphi'(u+x) - \varphi'(x)\|_x\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^\infty \left\{\int_0^h \left\{\int_0^\infty |K'(u, y+v)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} dv\right\} \|\varphi'(u+x) - \varphi'(x)\|\, du = I.$$

Далее, на основании (5),

$$\left\{\int_0^\infty |K'_y(u, y+v)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_0^\infty \frac{A_1^p dy}{(u^2+v^2+y^2)^p}\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ y=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\eta\end{matrix}\right) =$$

$$= \left\{\int_0^\infty \frac{A_1^p (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} d\eta}{(u^2+v^2)^p (1+\eta^2)^p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c_1}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{p}\right)}},$$

$$I \leqslant \int_0^h \int_0^\infty \frac{2c_1 u^{1-\frac{1}{p}+\varkappa-1}}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{p}\right)}} du\, dv = \left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ u=v\eta\end{matrix}\right) =$$

$$= \int_0^h \int_0^\infty \frac{2c_1 (v\eta)^{1-\frac{1}{p}+\varkappa-1} v d\eta dv}{(1+\eta^2)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{p}\right)} v^{2-\frac{1}{p}}} \leqslant \int_0^h \frac{c_2 v^{1-\frac{1}{p}+\varkappa}}{v^{2-\frac{1}{p}}} dv \leqslant c_3 h^\varkappa.$$

c) $\alpha = 1$. Этот случай рассмотрим в облегченных предположениях случая b) с теми же оговорками. Здесь нужно рассматривать вторую разность по y с шагом h:

$$\Delta_h^2 U'_x(x, y) = U'_x(x, y+2h) - 2U'_x(x, y+h) + U'_x(x, y) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^h \int_0^h K'_{vy}(u, y+v+w)\, dv dw\right] [\varphi'(u+x) - \varphi'(x)]\, du;$$

$$\| \Delta_h^2 U'_x(x, y) \| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^\infty \int_0^h \int_0^h \left[\int_0^\infty |K_{yy}(u, y+v+w)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \| \varphi'(u+x) - \varphi'(x) \| dv\, dw\, du \leqslant$$

$$\leqslant (\text{см. (5)}) \leqslant \int_0^h \int_0^h \int_{-\infty}^\infty \frac{c_1 |u|^{1-\frac{1}{p}}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)}} du\, dv\, dw \leqslant$$

$$\leqslant \left(\begin{matrix}\text{подстановка}\\ u=(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}\eta\end{matrix}\right) \leqslant \int_0^h \int_0^h \int_0^\infty \frac{2c_1 (v^2+w^2)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \eta_1^{1-\frac{1}{p}} (v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}}{(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)} (1+\eta^2)^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}\right)}} d\eta_1 dv\, dw \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^h \int_0^h \frac{c_2 dv dw}{(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \left(\begin{matrix}\text{переходя к полярным}\\ \text{координатам}\end{matrix}\right) \leqslant \int_0^{2h} \frac{c_3 \rho_1 d\rho_1}{\rho_1} \leqslant c_4 h.$$

Итак, теорема 3 доказана для случая $\bar{r}=1$. Обобщение на случай произвольного целого $\bar{r}$ происходит так же, как это было сделано в теореме 2.

Переходим к рассмотрению случая $p=\infty$.

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть граничная функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_\infty^{(\varepsilon)}$, $0<\varepsilon<1$. *Тогда соответствующая гармоническая для* $x_n>0$ *функция удовлетворяет условию* (C) *при* $\bar{r}=0$:

$$|U(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant M.$$

Доказательство при $n=2$. Имеем:

$$U(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} K(u-x, y)\,\varphi(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} K(u, y)\,\varphi(u+x)\,du,$$

$$|U(x, y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(u, y)\,\max_{-\infty<x<\infty}|\varphi(x)|\,du=\max_{-\infty<x<\infty}|\varphi(x)|=M. \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2′. *Пусть граничная функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_\infty^{(\bar{r}+\varepsilon)}$, $\bar{r} \geqslant 0$, $0<\varepsilon<1$. *Тогда соответствующая гармоническая для* $x_n>0$ *функция удовлетворяет условию* (C).

Доказательство ведется по индукции по $\bar{r}$ так же, как это сделано при $p \neq \infty$ (лемма 2 справедлива и при $p=\infty$).

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть граничная функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H_\infty^{(r)}$, $r>0$, r *— не целое. Тогда соответствующая гармоническая для* $x_n>0$ *функция удовлетворяет условию* (D).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\bar{r}=0$, $0<\alpha<1$.

I) Случай первого аргумента. Так как

$$|U(x, y)| \leqslant \max|\varphi(x)|$$

[см. (8)], то

$$U(x+h, y)-U(x, y)| \leqslant \max|\varphi(x+h)-\varphi(x)| \leqslant N|h|^\alpha.$$

II) Случай последнего аргумента. Пусть $0<h<1$. Имеем:

$$U(x, y+h)-U(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\{K(u, y+h)-K(u, y)\}\,\varphi(u+x)\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\{K(u, y+h)-K(u, y)\}\,[\varphi(u+x)-\varphi(x)]\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^h K'_y(u, y+v)\,dv\right\}[\varphi(u+x)-\varphi(x)]\,du.$$

Так как

$$|K'_y(u, y+v)|<\frac{A_1}{u^2+v^2}$$

(ввиду (5)), то

$$|U(x, y+h) - U(x, y)| \leqslant \int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 |u|^{\alpha}}{(u^2+v^2)} du dv = \text{(подст. } u = v\eta\text{)} =$$

$$= \int_0^h \int_0^{\infty} \frac{2c_1 v^{\alpha} \eta^{\alpha} v}{v^2(1+\eta^2)} d\eta dv \leqslant \int_0^h c_2 v^{-1+\alpha} dv \leqslant c_3 h^{\alpha}.$$

Обобщение на случай высших производных производится таким же образом, как и при $p \neq \infty$. Заметим, что здесь и в теореме 2′ применение оператора $A_\delta(\varphi)$ законно, так как

$$|U'_y(x, y)| \leqslant M(\delta).$$
$$y \geqslant \delta$$

Действительно,

$$U'_y(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K'_y(u, y) \varphi(u+x) du,$$

$$|U'_y(x, y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |K'_y(u, y)| \max_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| du \leqslant$$

$$\leqslant \text{[см. (5)]} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1}{u^2+y^2} \max_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| du \leqslant$$

$$\leqslant \text{(подст. } u = y\eta\text{)} = 2A_1 M \int_0^{\infty} \frac{y d\eta}{y^2(1+\eta^2)} = \frac{A_3 M}{y} = M(y).$$

Перейдем к обоснованию неравенства (F) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Просмотрев все доказательства, легко убеждаемся, что $\overline{N}$ меньше линейной комбинации N, $\|\varphi\|$ и норм всех производных от φ порядка от 1 до $\overline{r}$ с коэффициентами, не зависящими от φ. Применяя дальше оценки для норм производных из (2), приходим к неравенству (F).

Поступило
6.VII.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., К задаче Дирихле для круга и полупространства, Матем. сб., 35 (77) : 2 (1954), 247—266.

[2] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сб., 33 (75) (1953), 261—326.

[3] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 244—278.

[4] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.

[5] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 485—512

М. М. ДЖРБАШЯН и А. П. ТАМАДЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе выводится оценка для наилучшего приближения в угле аналитической функции целыми функциями заданного порядка и исследуются дифференциальные свойства тех функций, для которых приближения убывают достаточно быстро.

В работе Кобера (1) было доказано, что если функция $f(x)$ определена и ограничена на всей оси $(-\infty, +\infty)$, то для того чтобы

$$\inf_{\{g_\sigma\}} \{ \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| \} = 0, \tag{1}$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ экспоненциального типа $\sigma > 0$, ограниченных на всей оси $(-\infty, \infty)$, необходима и достаточна равномерная непрерывность функции $f(x)$ на всей вещественной оси.

В случае, когда функция $f(x)$ определена и ограничена на полуоси $[0, +\infty)$, было доказано также, что для того, чтобы

$$\inf_{\{g_\sigma\}} \{ \sup_{0\leqslant x<\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| \} = 0, \tag{2}$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ порядка $\frac{1}{2}$ и конечного типа $\sigma > 0$, ограниченных на полуоси $[0, +\infty)$, необходима и достаточна равномерная непрерывность функции $f(x^2)$ на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

В другой работе Кобера (2) была исследована задача приближения функций, аналитических и ограниченных в области угла произвольного раствора, целыми функциями конечного порядка, тип которых стремится к бесконечности.

Значительное продвижение в теории приближений целыми функциями в комплексной области было достигнуто в работе М. В. Келдыша (3), где были исследованы также и вопросы асимптотического приближения.

Для ограниченной на всей оси $(-\infty, +\infty)$ функции $f(x)$ число

$$A_\sigma(f) = \inf_{\{g_\sigma\}} \{ \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| \}, \tag{3}$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на всей оси $(-\infty, +\infty)$, называется наилучшим приближением функции $f(x)$ целыми функциями экспоненциального типа $\leqslant \sigma$.

В работах С. Н. Бернштейна ([4]) была полностью выяснена связь между порядком убывания чисел $A_\sigma(f)$ при $\sigma \to \infty$ и дифференциальными свойствами приближаемой функции $f(x)$.

Естественно поставить аналогичные задачи при приближении целыми функциями в комплексной области.

Пусть $f(z)$ — голоморфная ограниченная функция в бесконечной области D, не разбивающей плоскость, и непрерывная на границе D.

Обозначим

$$A_\sigma^{(\rho)}(f) = \inf_{\{g_\sigma\}} \{\sup_{\overline{D}} |f(z) - g_\sigma(z)|\}, \tag{4}$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ данного порядка $\rho > 0$ и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных в области $\overline{D}$.

Если предполагать, что для данного $\rho > 0$

$$\lim_{\sigma \to +\infty} A_\sigma^{(\rho)}(f) = 0,$$

то естественно поставить вопрос о выяснении связи между порядком стремления к нулю чисел $A_\sigma^{(\rho)}(f)$, когда $\sigma \to +\infty$, и дифференциальными свойствами приближаемой функции $f(x)$ на границе области D.

В настоящей работе поставленный выше вопрос исследуется в случае, когда множество D, на котором происходит аппроксимация целыми функциями, является суммой двух произвольных противолежащих углов или же является областью угла данного раствора.

Доказаны прямые и обратные теоремы наилучшего приближения целыми функциями в указанных выше областях, характеризующие связь между порядком убывания чисел $A_\sigma^{(\rho)}(f)$ и дифференциальными свойствами приближаемых функций на границах углов.

В работе приводятся также результаты, показывающие, что при достаточно быстром стремлении к нулю чисел $A_\sigma^{(\rho)}(f)$ при $\sigma \to +\infty$ приближаемая функция $f(z)$ необходимо будет голоморфной и ограниченной в более широкой области, чем та угловая область, где происходит аппроксимация.

Работа состоит из трех параграфов.

В § 1, имеющем вспомогательный характер, устанавливается ряд лемм, необходимых для доказательства основных теорем работы, приводимых в § 2 и 3.

В § 2 доказываются прямые и обратные теоремы наилучшего приближения целыми функциями, когда аппроксимация происходит в области двух противолежащих углов. Приводимые в этом параграфе теоремы в частном случае, когда противолежащие углы, имея нулевой раствор, вырождаются и составляют всю вещественную ось, содержат в себе результаты С. Н. Бернштейна о наилучшем приближении целыми функциями на всей оси $(-\infty, +\infty)$, о которых было упомянуто выше.

В § 3 выводятся оценки для наилучшего приближения целыми функциями в угловой области произвольного раствора.

§ 1. Некоторые предварительные леммы

В настоящем параграфе приводится ряд лемм, необходимых нам в дальнейшем.

1°. Доказательство лемм, приводимых в этом пункте, содержится в работе (²).

Пусть для данного числа $\rho \geqslant 1$ области $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ определяются соответственно из условий

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \quad \text{и} \quad |\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right). \tag{1.1.1.}$$

Заметим, что при $\rho = 1$ области $\overline{D}_1^{(\rho)}$ и $\overline{D}_2^{(\rho)}$ вырождаются в полуоси $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ вещественной оси.

ЛЕММА 1. *Если $g_\sigma(z)$ — целая функция порядка $\rho\,(1 \leqslant \rho < \infty)$ и типа $\sigma\,(0 < \sigma < \infty)$, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{z \in \overline{D}^{(\rho)}} |g_\sigma(z)| \leqslant M < +\infty, \tag{1.1.2}$$

где $\overline{D}^{(\rho)} = \overline{D}_1^{(\rho)} + \overline{D}_2^{(\rho)}$, то на всей плоскости z имеем оценку:

$$|g_\sigma(x + iy)| \leqslant Me^{\sigma|y|^\rho}. \tag{1.1.3}$$

ЛЕММА 2. *Если $\lambda\,(\lambda \geqslant r)$ — любое четное число, то существует четная целая функция $H_\lambda(z)$ порядка $\rho\,(\rho \geqslant 1)$ и типа 1 такая, что функции*

$$z^k H_\lambda(z) \quad (k = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

удовлетворяют условию (1.1.2) *и, следовательно, утверждению* (1.1.3) *леммы* 1.

В качестве функции $H_\lambda(z)$, например, можно указать функцию

$$H_\lambda(z) = \left\{ \frac{E_\rho(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z) - E_\rho(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}} z)}{iz} \right\}^\lambda \quad (\rho \geqslant 1), \tag{1.1.4}$$

где

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n\rho^{-1})}$$

— целая функция Миттаг-Леффлера, имеющая порядок ρ и тип 1. Как известно, при $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ функция $E_\rho(z)$ ограничена в области $|\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}$.

ЛЕММА 3. *Если $\rho \geqslant 1$ и $h(z) = z^k H_\lambda(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, \lambda - 1)$, где $H_\lambda(z)$ определяется по формуле* (1.1.4), *то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - z)|\, dt \leqslant Ce^{|y|^\rho} \quad (z = x + iy), \tag{1.1.5}$$

где $C = C(\lambda, \rho)$.

ЛЕММА 4. *Пусть $p \geqslant 0$ — целое, а функция $F(t)$ определена почти всюду на $(-\infty, +\infty)$, измерима и ограничена в любом конечном отрезке и имеет порядок $O(|t|^p)$ при $|t| \to \infty$*

Если $\rho \geqslant 1$, *а целое число* $\lambda \geqslant p+2$, *то интеграл*

$$G_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda\left[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(t-z)\right] F(t)\,dt \quad (\sigma > 0). \tag{1.1.6}$$

где функция $H_\lambda(z)$ *определяется из* (1.1.4), *есть целая функция порядка* ρ *и типа* σ, *причем*

$$|G_\sigma(x+iy)| \leqslant C\left(1+|z|+\sigma^{-\frac{\lambda}{\rho}}\right) e^{\sigma|y|^\rho}, \tag{1.1.7}$$

где $C = C(p, \rho)$.

2°. Приводимые в этом пункте две леммы существенны для установления трех основных лемм, которые будут доказаны в следующем пункте.

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке [0,1] и

$$\omega(h; \varphi) = \sup_{|x'-x''|\leqslant h} |\varphi(x') - \varphi(x'')|$$

— ее модуль непрерывности.

Имеет место [см., например, (5), стр. 83]

ЛЕММА 5. *Для любого* $0 < h < 1$

$$\omega(h; \varphi) \geqslant \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2} h. \tag{1.2.1}$$

ЛЕММА 6. *Пусть функция* $H_\lambda(z)$ *определяется по формуле* (1.1.4) *и пусть* λ — *четное целое число* $\geqslant 2p+2$. *Тогда*:

а) $H_\lambda(z)$ — *четная целая функция, причем*

$$H_\lambda(x) \geqslant 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.2.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda(x)\,dx > 0. \tag{1.2.3}$$

б) *При* $z \in \overline{D}_1^{(\rho)}$ *и* $z \in \overline{D}_2^{(\rho)}$, *когда* $|z| \to \infty$, *имеем*:

$$|H_\lambda(z)| \leqslant \frac{A(\lambda, \rho)}{|z|^\lambda}. \tag{1.2.4}$$

в) *Пусть* $z \in \overline{D}_1^{(\rho)}$. *Если все интегрирования произвести по лучу* $\theta = \arg z$, *то функции*

$$H_{\lambda,k}(z) = \int_z^\infty du_1 \int_{u_1}^\infty du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^\infty H(u_k)\,du_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p+1) \tag{1.2.5}$$

голоморфны в области $D_1^{(\rho)}$ *и удовлетворяют условиям*:

1) $\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |H_{\lambda,k}(z)| \leqslant M_{\lambda,k} < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots, p+1).$ (1.2.6)

2) *При* $z \in D_1^{(\rho)}$, *когда* $|z| \to \infty$,

$$|H_{\lambda,k}(z)| \leqslant \frac{A_k(\lambda, \rho)}{|z|^{\lambda-k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, p+1). \tag{1.2.7}$$

3) $H^{(k)}_{\lambda,p+1}(z) = (-1)^k H_{\lambda,p+1-k}(z)$, (1.2.8)

$$H^{(p+1)}_{\lambda,p+1}(z) = (-1)^{p+1} H_\lambda(z). \tag{1.2.9}$$

4) $H_{\lambda,k}(0) = a_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$. (1.2.10)

Доказательство. а) Из формулы (1.1.4) следует, что $H_\lambda(z)$ — четная целая функция. Далее, так как

$$H_\lambda(x) = \left\{2\lambda^{-\frac{1}{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda^{-\frac{1}{\rho}} x)^{2n}}{\Gamma(1 + \rho^{-1}(2n+1))}\right\}^\lambda,$$

то очевидно, что $H_\lambda(x) \geqslant 0$ (λ — четное число) на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Наконец, интеграл (1.2.3) существует в силу оценки (1.2.4) и положителен в силу (1.2.2).

б) Оценка (1.2.4) вытекает из (1.1.4) в силу ограниченности функции $E_\rho(z)$ в области $|\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}$, что было указано выше в лемме 2.

в) Если $z \in \overline{D}_1^{(\rho)}$, т. е. $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$, то интеграл

$$H_{\lambda,1}(z) = \int_z^\infty H(u_1)\, du_1,$$

где интегрирование производится по лучу $\theta = \arg z$, очевидно, существует в силу (1.2.4) ($\lambda \geqslant 2p + 2$) и представляет ограниченную голоморфную функцию в области $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$.

Кроме того, из (1.2.4) следует также, что при $z \in \overline{D}_1^{(\rho)}$, когда $|z| \to \infty$,

$$|H_{\lambda,1}(z)| \leqslant \frac{A_1(\lambda,\rho)}{|z|^{\lambda-1}}.$$

Замечая, что

$$H_{\lambda,k}(z) = \int_z^\infty H_{\lambda,k-1}(u)\, du \quad (k = 2,3, \ldots, p+1),$$

легко приходим к заключению, что функции $H_{\lambda,k}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, p+1)$ обладают свойствами 1) и 2).

Что касается свойств 3) функции $H_{\lambda,p+1}(z)$, то они непосредственно следуют из (1.2.5).

Наконец, отметим, что, в силу (1.2.4), по теореме Коши, поворотом пути интегрирований легко можно установить, что существует предел функции $H_{\lambda,k}(z)$, когда $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $|z| \to 0$; при этом

$$H_{\lambda,k}(0) = \int_0^\infty du_1 \int_{u_1}^\infty du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^\infty H(u_k)\, du_k, \tag{1.2.11}$$

где все интегрирования справа совершаются по лучу $\arg z = 0$. Из (1.2.11) и (1.2.2) следует свойство 4) функции $H_{\lambda,k}(z)$.

3^0. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей оси $(-\infty, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка $p \geqslant 0$ включительно, причем $f^{(p)}(z)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и обладает модулем непрерывности $\omega(h, f^{(p)})$.

Функция

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(t+x)\,dt,$$

называемая функцией Стеклова [см. (6)] для функции $f(x)$ непрерывна на всей оси $(-\infty, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка $p+1$ включительно, причем

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(p)}(x) - f_h^{(p)}(x)| \leqslant \omega(h; f^{(p)}),$$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f_h^{(p+1)}(x)| \leqslant \frac{\omega(h, f^{(p)})}{h}.$$

В настоящем пункте мы будем строить функцию типа Стеклова для функции $\varphi(z)$, голоморфной в некоторой угловой области.

Пусть функция $\varphi(z)$ голоморфна в области $D_1^{(\rho)}$ $(\rho > 1)$ и вместе со своими производными до порядка $p \geqslant 0$ включительно ограничена и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_1^{(\rho)}$.

Предположим, кроме того, что функция $\varphi^{(p)}(z)$ равномерно непрерывна в области $\overline{D}_1^{(\rho)}$ и

$$\omega(h; \varphi^{(p)}) = \sup_{|z'-z''| \leqslant h} |\varphi^{(p)}(z') - \varphi^{(p)}(z'')|$$

— ее модуль непрерывности.

В настоящем пункте доказывается следующая основная лемма.

ЛЕММА 7. *Для любого h $(0 < h \leqslant 1)$ можно построить функцию $\varphi_h(z)$, голоморфную в области $D_1^{(\rho)}$ и непрерывную и ограниченную в замкнутой области $\overline{D}_1^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка $p+1$ включительно и удовлетворяющую условиям:*

1) $\varphi_h^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) \quad (k = 0,1,\ldots,p),$ (1.3.1)

2) $\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi_h^{(k)}(z)| \leqslant R_k < +\infty \quad (k = 0,1,\ldots,p),$ (1.3.2)

где числа R_k не зависят от h.

3) $\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi^{(p)}(z) - \varphi_h^{(p)}(z)| \leqslant C_p\,\omega(h; \varphi^{(p)}),$ (1.3.3)

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi_h^{(p+1)}(z)| \leqslant C_p^* \frac{\omega(h; \varphi^{(p)})}{h}, \qquad (1.3.4)$$

где C_p и C_p^* — константы, не зависящие от h.

Доказательство. Для данного $h\,(0<h\leqslant 1)$ рассмотрим функцию

$$\Phi_h(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h}\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{1.3.5}$$

где интегрирование всегда совершается по отрезку, соединяющему точки z и $z+h$. Очевидно, что $\Phi_h(z)$ голоморфна в области $D_1^{(\rho)}$ и, кроме того,

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\Phi_h^{(k)}(z)=\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h}\varphi^{(k)}(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi^{(k)}(z)|=M_k<\infty\quad(k=0,1,\ldots,p), \tag{1.3.6}$$

где, по условию, очевидно, что числа M_k не зависят от h.

Далее, легко видеть, что

$$\Phi_h(0)=\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(t)\,dt,$$

$$\Phi_h^{(k)}(0)=\frac{1}{h}\int_0^h\varphi^{(k)}(t)\,dt=\frac{\varphi^{(k-1)}(h)-\varphi^{(k-1)}(0)}{h}\quad(k=1,2,\ldots,p+1). \tag{1.3.7}$$

При $z\in\overline{D}_1^{(\rho)}$ рассмотрим функцию

$$\varphi_h(z)=\Phi_h(z)+[\varphi(0)-\Phi_h(0)]+Q_p(z)\,H_{\lambda,\,p+1}(z), \tag{1.3.8}$$

где $Q_p(z)$ — некоторый полином степени p, удовлетворяющий условию $Q_p(0)=0$.

Покажем, что полином $Q_p(z)$ определится единственным образом, если потребовать, чтобы выполнялись равенства:

$$\varphi_h^{(k)}(0)=\varphi^{(k)}(0)\quad(k=0,1,2,\ldots,p). \tag{1.3.1'}$$

При $z\in\overline{D}_1^{(\rho)}$ имеем:

$$\varphi_h^{(k)}(z)=\Phi_h^{(k)}(z)+\sum_{m=0}^{k}C_k^mQ_p^{(k-m)}(z)\,H_{\lambda,p+1}^{(m)}(z)\quad(k=1,2,\ldots,p),$$

или, по формуле (1.2.8),

$$\varphi_h^{(k)}(z)=\Phi_h^{(k)}(z)+\sum_{m=0}^{k}(-1)^mC_k^mQ_p^{(k-m)}(z)\,H_{\lambda,p+1-m}(z)$$
$$(k=1,2,\ldots,p). \tag{1.3.9}$$

Из (1.3.8), в силу условия $Q_p(0)=0$, имеем:

$$\varphi_h(0)=\varphi(0),$$

а из (1.3.9) следует, что для удовлетворения всех условий (1.3.1) нужно иметь:

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^mC_k^mQ_p^{(k-m)}(0)\,H_{\lambda,\,p+1-m}(0)=$$
$$=\varphi^{(k)}(0)-\Phi_h^{(k)}(0)=b_k\quad(k=1,2,\ldots,p). \tag{1.3.10}$$

Но, по (1.2.10),

$$H_{\lambda, p+1-m}(0) = a_{p+1-m} > 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.3.11}$$

и поэтому для определения чисел $Q_p^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ мы получим треугольную систему линейных уравнений:

$$\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m C_k^m Q_{p+1-m} Q_p^{(k-m)}(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.3.10'}$$

с учетом того, что, по условию, $Q_p(0) = 0$.

Так как, по (1.3.11), все коэффициенты системы (1.3.10′) отличны от нуля, то она имеет единственное решение для всех неизвестных $Q_p^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

Решения системы (1.3.10′) представляются в виде

$$Q_p^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m^{(k)} b_m \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.3.12}$$

где все коэффициенты $\{\alpha_m^{(k)}\}$ — определенные постоянные, не зависящие от h.

Таким образом, функция $\varphi_h(z)$, определенная по формуле (1.3.8), будет удовлетворять условиям (1.3.1).

Покажем, что функция $\varphi_h(z)$ удовлетворяет всем основным требованиям нашей леммы.

Мы имеем:

$$b_k = \varphi^{(k)}(0) - \Phi_h^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi^{(k)}(t)\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

откуда следует, что

$$|b_k| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} |\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)| =$$

$$= \sup \left| \int_0^h \varphi^{(k+1)}(t)\,dt \right| \leqslant h M_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{1.3.13}$$

где, по (1.3.6),

$$M_k = \sup_{\overline{D}_1^{(p)}} |\varphi^{(k)}(z)| < +\infty.$$

При $k = p$ имеем:

$$|b_p| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} |\varphi^{(p)}(t) - \varphi^{(p)}(0)| \leqslant \omega(h, \varphi^{(p)}). \tag{1.3.14}$$

Очевидно, что $\varphi^{(p)}(z) \not\equiv \text{const}$, так как в противном случае функция $\varphi(z)$ была бы полиномом степени не выше p и не могла бы быть ограниченной в области $D_1^{(p)}$, если она не сводится к постоянной. Случай же, когда $\varphi(z) \equiv \text{const}$, для нас не представляет интереса. Таким обра-

зом, $\varphi^{(p)}(z) \not\equiv \text{const}$, и поэтому, по лемме 5, рассматривая ее в промежутке $[0,1]$, мы можем утверждать, что существует постоянная $0 < C_0 < +\infty$, не зависящая от $h\,(0 < h \leqslant 1)$ и такая, что

$$h \leqslant C_0\,\omega(h, \varphi^{(p)}). \tag{1.3.15}$$

Из (1.3.13) и (1.3.14) при $0 < h \leqslant 1$ следуют оценки:

$$|b_k| \leqslant \begin{cases} C_0 M_{k+1}\omega(h; \varphi^{(p)}) & \text{при } k = 1, 2, \ldots, p-1, \\ \omega(h; \varphi^{(p)}) & \text{при } k = p. \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Из (1.3.12) и из оценок (1.3.16) следует, что

$$|Q_p^{(k)}(0)| \leqslant B_{p,k}\,\omega(h; \varphi^{(p)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.3.17}$$

где $B_{p,k} > 0$ — постоянные, не зависящие от h.

Обозначая

$$B_p = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \{B_{p,k}\},$$

из (1.3.17) получим оценки:

$$|Q_p(z)| \leqslant B_p\,\omega(h; \varphi^{(p)}) \sum_{\nu=1}^{p} \frac{|z|^\nu}{\nu!}, \tag{1.3.18}$$

$$|Q_p^{(k-m)}(z)| \leqslant B_p\,\omega(h,; \varphi^{(p)}) \sum_{\nu=0}^{p-(k-m)} \frac{|z|^\nu}{\nu!}, \tag{1.3.18'}$$

где $k = 1, 2, \ldots, p+1$ и $m = 0, 1, \ldots k$.

Из определения (1.3.8) функции $\varphi_h(z)$ имеем:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi_h(z)| \leqslant \sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\Phi_h(z)| + |\varphi(0) - \Phi_h(0)| + \\ + \sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} \{|Q_p(z)|\,|H_{\lambda,p+1}(z)|\}, \tag{1.3.19}$$

а из (1.3.19) получим:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi_h^{(k)}(z)| \leqslant \sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\Phi_h^{(k)}(z)| + \\ + \sum_{m=0}^{k} C_k^{(m)} \sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} \{|Q_p^{(k-m)}(z)\,\|\,H_{\lambda,p+m-1}(z)|\} \quad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{1.3.19'}$$

Но из оценки (1.3.18') и из оценки (1.2.7) леммы 6 следует, что когда $z \in \overline{D}_1^{(\rho)}$, то

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{p-(k-m)} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \right\} |H_{\lambda,p+1-m}(z)| \leqslant \\ \leqslant \lim_{|z|\to\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{p-(k-m)} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \right\} \frac{A_{p+1-m}(\lambda,\rho)}{|z|^{\lambda-p-1+m}} = 0 \tag{1.3.20}$$

при $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ и $k = 1, 2, \ldots, p$ $(\lambda \geqslant 2p+2)$.

Из (1.3.18) и (1.3.20) имеем:

$$\sup_{\overline{D}_1^0}\{|Q_p^{(k-m)}(z)\,\|\,H_{\lambda,p+1-m}(z)|\}\leqslant B_p\,\omega(h;\,\varphi^{(p)})\,\gamma_p^{(k,m)} \tag{1.3.21}$$

при $m=0,1,\ldots,k$ и $k=1,2,\ldots,p$, где очевидно, что числа

$$\gamma_p^{(k,m)}=\sup_{\overline{D}_1^0}\left\{\left(\sum_{\nu=0}^{p-(k-m)}\frac{|z|^\nu}{\nu!}\right)|H_{\lambda,p+1-m}(z)|\right\}<+\infty$$

не зависят от h.

Из (1.3.6), (1.3.19′) и (1.3.21) получим:

$$\sup_{\overline{D}_1^0}|\varphi_h^{(k)}(z)|\leqslant M_k+\sum_{m=0}^{k}C_k^m B_p\,\omega(h;\,\varphi^{(p)})\,\varphi_p^{(k,m)}\leqslant$$
$$\leqslant M_k+2^k B_p\,\omega(h;\,\varphi^{(p)})\,\gamma_p^{(k)}\quad(k=1,2,\ldots,p), \tag{1.3.22}$$

где $\gamma_p^{(k)}=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant k}\{\gamma_p^{(k,m)}\}$ тоже не зависит от h. Но очевидно, что

$$\omega(h;\,\varphi^{(p)})\leqslant 2\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi^{(p)}(z)|=2M_p,$$

поэтому, обозначая

$$R_k=M_k+2^{k+1}B_p\gamma_p^{(k)}M_p,$$

имеем:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi_h^{(k)}(z)|\leqslant R_k\quad(k=1,2,\ldots,p), \tag{1.3.2′}$$

где $R_k>0$ не зависят от h.

Заметим, что когда $0<h\leqslant 1$, то

$$|\varphi(0)-\Phi_h(0)|=\left|\frac{1}{h}\int_0^h[\varphi(0)-\varphi(t)]\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|\varphi(t)-\varphi(0)|=\sup_{0\leqslant t\leqslant h}\left|\int_0^t\varphi'(u)\,du\right|\leqslant$$
$$\leqslant h\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|\varphi'(t)|\leqslant hM_1\leqslant C_0\,M_1\omega(h;\,\varphi^{(p)}), \tag{1.3.23}$$

в силу (1.3.15).

Из (1.3.19), в силу (1.3.23) и (1.3.18), получим:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi_p(z)|\leqslant M_0+C_0M_1\omega(h;\,\varphi^{(p)})+$$
$$+\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\left\{B_p\omega(h;\,\varphi^{(p)})\sum_{\nu=1}^{p}\frac{|z|^\nu}{\nu!}\right\}|H_{\lambda,p+1}(z)|.$$

Обозначая, в силу оценки (1.2.7),

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\frac{|z|^\nu}{\nu!}\right\}|H_{\lambda,p+1}(z)|=\gamma_p<+\infty$$

и замечая, что $\omega(h;\varphi^{(p)})\leqslant 2M_p$, имеем:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi_h(z)|\leqslant R_0, \tag{1.3.2''}$$

где

$$R_0 = M_0 + 2C_0M_1M_p + 2M_p\gamma_pB_p$$

не зависит, очевидно, от h.

Из (1.3.2') и (1.3.2'') вытекает, что функция $\varphi_h(z)$ обладает свойством 2), требуемым нашей леммой.

Нам остается установить, что функция $\varphi_h(z)$ обладает также и свойством 3). С этой целью заметим, что из (1.3.9) при $k=p$ имеем:

$$\varphi_h^{(p)}(z) = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi^{(p)}(z+t)\,dt + \sum_{m=0}^{p}(-1)^m C_p^m Q_p^{(p-m)}(z)\,H_{\lambda,p+1-m}(z). \tag{1.3.9'}$$

Отсюда имеем оценку:

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}}|\varphi^{(p)}(z)-\varphi_h^{(p)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant \omega(h;\varphi^{(p)}) + \sum_{m=0}^{p} C_p^m \sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\{|Q_p^{(p-m)}(z)|\cdot|H_{\lambda,p+1-m}(z)|\},$$

или, в силу (1.3.21), оценку:

$$\sup|\varphi^{(p)}(z)-\varphi_h^{p}(z)|\leqslant\omega(h;\varphi^{(p)})+\sum_{m=0}^{p}C_p^mB_p\omega(h;\varphi^{(p)})\,\gamma_p^{(p,m)}=C_p\omega(h;\varphi^{(p)}),$$

где постоянная C_p, очевидно, не зависит от h. Таким образом, первое из свойств 3) функции $\varphi_h(z)$ установлено.

Из (1.3.9) при $k=p+1$ получим:

$$\varphi_h^{(p+1)}(z)=\frac{1}{h}[\varphi^{(p)}(z+h)-\varphi^{(p)}(z)]+$$

$$+\sum_{m=0}^{p+1}(-1)^mC_{p+1}^mQ^{(p+1-m)}(z)\,H_{\lambda,p+1-m}(z). \tag{1.3.24}$$

Заметив, что $Q_p^{(p+1)}(z)\equiv 0$ и $H_{\lambda,0}(z)\equiv H_\lambda(z)$, из (1.3.24) получаем:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi_h^{(p+1)}(z)|\leqslant\frac{\omega(h;\varphi^{(p)})}{h}+\sum_{m=1}^{p}C_{p+1}^m\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\{|Q_p^{(p+1-m)}(z)\|H_{\lambda,p+1-m}(z)|\}+$$

$$+\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}\{|Q_p(z)|\cdot|H_\lambda(z)|\}. \tag{1.3.25}$$

Отсюда и из оценок (1.3.18), (1.3.18'), как и выше, приходим к заключению, что

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|\varphi_h^{(p+1)}(z)|\leqslant\frac{\omega(h;\varphi^{(p)})}{h}+A_p\omega(h;\varphi^{(p)}), \tag{1.3.26}$$

где постоянная $A_p>0$ не зависит от $h>0$.

Обозначая, далее,

$$C_p = 1 + A_p,$$

из (1.3.26) при $0 < h \leqslant 1$ получим:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |\varphi_h^{(p+1)}(z)| \leqslant C_p^* \frac{\omega(h; \varphi^{(p)})}{h}.$$

т. е. оценку (1.3.4) леммы. Таким образом, лемма полностью доказана.

§ 2. Прямые и обратные теоремы о наилучшем приближении целыми функциями в области двух противолежащих углов

1° Прямые теоремы о наилучшем приближении. Как и в § 1, для данного числа $\rho\,(\rho > 1)$ обозначим соответственно через $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ области противолежащих углов

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \text{ и } |\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Обозначим, далее,

$$\overline{D}^{(\rho)} = \overline{D}_1^{(\rho)} + \overline{D}_2^{(\rho)} \tag{2.1.1}$$

и заметим, что при $\rho = 1$ множество $\overline{D}^{(1)}$ представляет собой всю вещественную ось $(-\infty, +\infty)$.

Пусть при $\rho > 1$ $f_i(z)$ $(i = 1, 2)$ — ограниченная голоморфная функция внутри области $D_i^{(\rho)}$ $(i = 1, 2)$ и непрерывная на ее границе. При $\rho = 1$ положим, что функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ ограничены и непрерывны на полуосях $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответственно.

Полагая, что $f_1(0) = f_2(0)$, определим функцию

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) \text{ при } z \in \overline{D}_1^{(\rho)}, \\ f_2(z) \text{ при } z \in \overline{D}_2^{(\rho)}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

которая непрерывна и ограничена на множестве $\overline{D}^{(\rho)}$ и аналитична на его компонентах $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$.

Обозначим через

$$A_\sigma^{(\rho_1)}(f; \overline{D}^{(\rho)}) = \inf_{\{g_\sigma(z)\}} \{\sup_{z \in \overline{D}^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)|\} \tag{2.1.3}$$

наилучшее приближение функции $f(z)$ на множестве $\overline{D}^{(\rho)}$, где inf берется для всех целых функций порядка ρ_1 и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на $\overline{D}_\rho$.

Из теоремы Фрагмен — Линделефа легко следует, что при $\rho_1 < \rho$ существует такая функция $f(z)$, для которой

$$\lim_{\sigma \to \infty} A_\sigma^{(\rho_1)}(f) > 0.$$

Но при $\rho_1 = \rho$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f(z)$ непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ ($\rho \geqslant 1$) вместе со своими производными до порядка $p-1$ ($p \geqslant 1$) включительно, причем*

$$\sup_{z \ni \overline{D}_1^{(\rho)}, \overline{D}_2^{(\rho)}} |f^{(p)}(z)| \leqslant M_p < +\infty, \tag{2.1.4}$$

то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D^{(\rho)}) \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}, \tag{2.1.5}$$

где постоянная C_p не зависит от $\sigma > 0$ и функции $f(z)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$G_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda [\sigma^{\frac{1}{\rho}} (t-z)] f(t)\, dt \quad (\sigma > 0), \tag{2.1.6}$$

где функция $H_\lambda(z)$ определяется по формуле (1.1.4) и четное число $\lambda \geqslant p+2$.

Так как функция $f(t)$, по условию теоремы, ограничена на всей оси $(-\infty, +\infty)$, то, согласно лемме 4, интеграл (2.1.6) сходится и представляет целую функцию порядка ρ и типа σ.

Обозначим через $L(\theta)$ прямые, уравнения которых имеют вид

$$z = te^{i\theta} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

где

$$|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Крайние прямые $L\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\right]$ и $L\left[-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\right]$ семейства $\{L_\rho(\theta)\}$ обозначим соответственно через $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$.

Заметим, что при $\rho = 1$ мы имеем лишь одну прямую $L(0)$ — всю вещественную ось $(-\infty, +\infty)$.

Через $L_1(\theta)$ обозначим полупрямую $\arg z = \theta$, где $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$, а через $L_2(\theta)$ — ее дополнение до прямой $L(\theta)$.

Покажем, что при $\rho > 1$, когда $z \in L(\theta)$, $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$ имеет место представление:

$$G_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{\rho}} \int_{L(\theta)} H_\lambda [\sigma^{\frac{1}{\rho}} (\zeta - z)] f(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.1.7}$$

где интегрирование по прямой $L(\theta)$ совершается в направлении возрастания $\operatorname{Re}\zeta$.

Действительно, пусть точка $z \in L(\theta)$ фиксирована. Обозначим через $L_{1,2}(\theta; R)$ отрезки соответствующих лучей $L_{1,2}(\theta)$, лежащих в круге $|z| \leqslant R$.

Обозначим через $\Gamma_1(\theta; R)$ пробегаемый в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[0, R]$, дуги $C_1(\theta; R)$ окруж-

ности $|z|=R$, лежащей между лучами $L_1(0)$, $L_1(\theta)$, не проходящими через точку $z=-R$, и отрезка $L_1(\theta; R)$.

Аналогично, обозначим через $\Gamma_2(\theta; R)$ пробегаемый в отрицательном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[0, R]$, отрезка $L_2(\theta; R)$ и дуги $C_2(\theta, R)$ окружности $|z|=R$, лежащей между лучами $L_2(0)$ и $L_2(\theta)$, не проходящими через точку $z=+R$.

При фиксированном значении $z\in L(\theta)$, как функции от ζ, выражение

$$H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f(\zeta),$$

очевидно, голоморфно в каждой из областей $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$, поэтому по теореме Коши будем иметь:

$$\int_{\Gamma_1(\theta; R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f(\zeta)\,d\zeta=\int_{\Gamma_2(\theta; R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f(\zeta)\,d\zeta=0. \qquad (2.1.8)$$

Складывая интегралы (2.1.8) с учетом направлений интегрирования, получим формулу:

$$\int_{-R}^{+R} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(t-z)]f(t)\,dt=\int_{L(\theta; R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f(\zeta)\,d\zeta-$$

$$-\int_{C_1(\theta, R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f_1(\zeta)\,d\zeta-\int_{C_2(\theta, R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f_2(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in L(\theta), \qquad (2.1.9)$$

справедливую при всех $R>0$. Отметим, что в формуле (2.1.8) интегрирование по $L(\theta; R)$ совершается в направлении возрастающих $\operatorname{Re}\zeta$, а интегрирование по дугам $C_1(\theta; R)$ и $C_2(\theta; R)$ совершается по тем направлениям, по которым они входят в состав контуров $\Gamma_1(\theta; R)$ и $\Gamma_2(\theta; R)$ соответственно.

Обозначим

$$Y_i(R)=\int_{C_i(\theta; R)} H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]f_i(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in L(\theta);$$

тогда, в силу (2.1.9), для установления требуемой формулы (2.1.7) достаточно показать, что при фиксированном $z\in L(\theta)$

$$\lim_{R\to\infty} Y_i(R)=0\quad (i=1, 2). \qquad (2.1.10)$$

Действительно, при фиксированном значении $z\in L(\theta)$, если $\zeta\in C_i(\theta, R)$ $(i=1, 2)$, то при достаточно больших значениях R всегда будем иметь или

$$|\arg(\zeta-z)|\leqslant|\theta|,$$

или

$$|\arg|(\zeta-z)+\pi||\leqslant|\theta|.$$

Но так как у нас $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$, то отсюда ясно, что при больших значениях R, в силу формулы (1.1.4) и свойств функции $E_\rho(z)$, равномерно относительно всех $\zeta\in C_i(\theta; R)$ $(i=1, 2)$ будем иметь:

$$|H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta-z)]|\leqslant\frac{M}{R^\lambda}, \qquad (2.1.11)$$

где $M>0$ — постоянная, не зависящая от R и θ.

Из оценки (2.1.11), обозначив

$$K = \sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |f(z)|, \tag{2.1.12}$$

получим:

$$|Y_i(R)| \leqslant \frac{MK}{R^{\lambda}} R|\theta|,$$

откуда, в силу того, что $\lambda \geqslant p+2$ $(p \geqslant 1)$, вытекает утверждение (2.1.10).

Таким образом, формула (2.1.7) доказана.

Докажем, что наша целая функция $G_\sigma(z)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |G_\sigma(z)| \leqslant M_1, \tag{2.1.13}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от ее типа σ.

Действительно, пусть $z \in L(\theta)$, где $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$; тогда из представления (2.1.7), по (2.1.12), имеем:

$$|G_\sigma(z)| \leqslant K \int_{L(\theta)} |H_\lambda[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta - z)]|\,|d[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta - z)]|,$$

откуда после замены переменной $u = \sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta - z)$, оставляющей путь интегрирования неподвижным, получим:

$$|G_\sigma(z)| \leqslant K \int_{L(\theta)} |H_\lambda(u)|\,|du|. \tag{2.1.14}$$

Но из формулы (1.1.4) следует, что при

$$|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$$

или

$$|\arg z \pm \pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$$

имеем:

$$|H_\lambda(u)| \leqslant \frac{M_1}{|u|^{\lambda}}, \qquad \lambda \geqslant p+2. \tag{2.1.15}$$

Утверждение (2.1.13) следует из (2.1.10) и (2.1.15).

Если обозначить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda(t)\,dt = a \qquad (a \neq 0),$$

то из свойств функции $H_\lambda(z)$ в областях $\overline{D}_1^{(\rho)}$ и $\overline{D}_2^{(\rho)}$ будет легко следовать, что

$$\int_{L(\theta)} H_\lambda(u)\,du = a \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.1.16}$$

Предположим теперь, что $z \in L^{(+)} = L\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\right]$; тогда, по (2.1.10), имеем:

$$G_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{\rho}} \int_{L^{(+)}} H_\lambda\left[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(\zeta - z)\right] f(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.1.17}$$

Составим функцию

$$g_\sigma(z) = a^{-1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k G_{\frac{\sigma}{k}}(z),$$

которая, очевидно, является целой порядка ρ и типа σ и, в силу (2.1.13), удовлетворяет условию:

$$\sup_{\overline{D}\frown\rho)} |g_\sigma(z)| \leqslant |a|^{-1}(2^p - 1)\, M_1. \tag{2.1.18}$$

Из (2.1.17) имеем:

$$g_\sigma(z) = a^{-1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k \int_{L^{(+)}} H_\lambda\left[\frac{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}{k}(\zeta - z)\right] f(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.1.19}$$

откуда, после замены переменной $u = \frac{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}{k}(\zeta - z)$, производимой в k-ом члене суммы (2.1.19), получим:

$$g_\sigma(z) = a^{-1} \int_{L^{(+)}} H_\lambda(u) \left\{ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k f\left(z + \frac{k}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} u\right) \right\} du, \tag{2.1.20}$$

так как $z \in L^{(+)}$, и при всех заменах путь интегрирования $L^{(+)}$ не изменяется.

Обозначим

$$(-1)^{p-1}\Delta^p\left[f(z); \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right] = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k-1} C_p^k\, f\left(z + \frac{k}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} u\right); \tag{2.1.21}$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k f\left(z + \frac{k}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} u\right) = (-1)^{p-1}\Delta^{(p)}\left[f(z); \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right] + f(z). \tag{2.1.21'}$$

Из (2.1.20) и (2.1.21') следует, что

$$g_\sigma(z) = a^{-1} \int_{L^{(+)}} H_\lambda(u) \left\{ (-1)^{p-1}\Delta^{(p)}\left[f(z); \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right] + f(z) \right\} du,$$

откуда, в силу (2.1.16), вытекает формула:

$$g_\sigma(z) - f(z) = (-1)^{p-1} a^{-1} \int_{L^{(+)}} H_\lambda(u)\, \Delta^{(p)}\left[f(z); \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right] du, \tag{2.1.22}$$

справедливая при $z \in L^{(+)}$.

Очевидно, что вполне аналогичным методом можно получить также, что при $z \in L^{(-)}$ будет иметь место формула:

$$g_\sigma(z) - f(z) = (-1)^{p-1} a^{-1} \int\limits_{L^{(-)}} H_\lambda(u)\, \Delta^{(p)}\left[f(z); \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \right] du. \quad (2.1.23)$$

Заметим, что при $\rho = 1$ обе формулы (2.1.22) и (2.1.23) переходят в одну: при $-\infty < x < +\infty$ имеем:

$$g_\sigma(x) - f(x) = (-1)^{p-1} a^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda(u)\, \Delta^{(p)}\left[f(u); \frac{u}{\sigma} \right] du.$$

Запишем формулы (2.1.22) и (2.1.23) в виде:

$$g_\sigma\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) - f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) = (-1)^{p-1} a^{-1} e^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) \Delta^{(p)}\left[f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right); \frac{re^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \right] dr. \quad (2.1.24)$$

Но из (2.1.21) при $p = 1$ вытекает, что

$$\Delta^{(1)}\left(t; \frac{r}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right) = \Delta^{(1)}\left[f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right); \frac{re^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \right] =$$

$$= f\left[\left(t + \frac{r}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \right) e^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \right] - f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right).$$

Поэтому

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left| \Delta^{(1)}\left(t; \frac{u}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right) \right| \leqslant \frac{|r|}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \sup_{-\infty<t<+\infty} \left| f'\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) \right|.$$

Отсюда, по условию (2.1.4) теоремы, методом индукции получим:

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left| \Delta^{(p)}\left[f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right); \frac{re^{\pm i\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|r|^\rho}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}} \sup_{-\infty<t<+\infty} \left| f^{(p)}\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) \right| \leqslant \frac{|r|^\rho M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}. \quad (2.1.25)$$

Из формулы (2.1.24) и оценки (2.1.25) заключаем, что

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left| f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) - g_\sigma\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a^{-1}|\, M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| H_\lambda\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right) \right| r^p dr = \frac{C_p M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}, \quad (2.1.26)$$

где $C_p = C(p, \rho)$ не зависит от σ.

Из (2.1.26) при $\rho = 1$ следует утверждение (2.1.5) теоремы для частного случая, когда $\rho = 1$. Для этого случая теорема впервые была доказана С. Н. Бернштейном ([4]).

Положим теперь $\rho > 1$; тогда, с одной стороны, $f(z)$ голоморфна и ограничена в областях $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ в отдельности: с другой стороны, в силу (2.1.18), целые функции $g_\sigma(z)$ при всех $\sigma > 0$ удовлетворяют условиям:

$$\sup_{\overline{D}_1^{(\rho)}} |g_\sigma(z)| \leqslant |a|^{-1}(2^p - 1) M_1,$$

$$\sup_{\overline{D}_2^{(\rho)}} |g_\sigma(z)| \leqslant |a|^{-1}(2^p - 1) M_1,$$

где M_1 не зависит от σ. Поэтому при всех $\sigma > 0$ функция $f(z) - g_\sigma(z)$ голоморфна в областях $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ и, кроме того,

$$\sup_{\overline{D}_2^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant M_2,$$

$$\sup_{\overline{D}_2^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant M_2,$$

где $M_2 > 0$ не зависит от $\sigma > 0$. Следовательно, так как в силу (2.1.26) на границах L_1 и L_2 областей $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ соответственно имеют место оценки:

$$\sup_{z \in L_1} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}},$$

$$\sup_{z \in L_2} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}},$$

то, по принципу максимума,

$$\sup_{\overline{D}_2^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}. \tag{2.1.27}$$

Из (2.1.27), очевидно, следует утверждение теоремы при $\rho > 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f(z)$ непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p ($p \geqslant 1$) включительно, причем*

$$\omega(h;\ f^{(p)}) = \sup_{|z - z''| \leqslant h} |f^{(p)}(z') - f^{(p)}(z'')| \tag{2.1.28}$$

— модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z)$ на D_ρ, то при $\sigma \geqslant 1$

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D^{(\rho)}) \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}};\ f^{(p)}\right)}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}, \tag{2.1.29}$$

где постоянная C_p^* не зависит от σ и функции $f(z)$.

Доказательство. По лемме 7, для любого $0<h\leqslant 1$ существуют функции $f_{1,h}(z)$ и $f_{2,h}(z)$, голоморфные в областях $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ соответственно и удовлетворяющие условиям:

1) $f_{1,h}^{(k)}(0)=f_{2,h}^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)\quad (k=0,1,2,\ \dots\ ,p)$;

2) $\sup\limits_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|f_{1,h}^{(k)}(z)|\leqslant R_k^{(1)}<+\infty$,

$\sup\limits_{\overline{D}_2^{(\rho)}}|f_{2,h}^{(k)}(z)|\leqslant R_k^{(2)}<+\infty\quad (k=0,1,2,\ \dots\ ,p)$,

где числа $R_k^{(1)}$ и $R_k^{(2)}$ не зависят от h:

3) $\sup\limits_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|f_1^{(p)}(z)-f_{1,h}^{(p)}(z)|\leqslant C_p^{(1)}\omega(h;f^{(p)})$,

$\sup\limits_{\overline{D}_2^{(\rho)}}|f_2^{(p)}(z)-f_{2,h}^{(p)}(z)|\leqslant C_p^{(2)}\omega(h;f^{(p)})$;

4) $\sup\limits_{\overline{D}_1^{(\rho)}}|f_{1,h}^{(p+1)}(z)\leqslant C_p^{*(1)}\dfrac{\omega(h;f^{(p)})}{h}$,

$\sup\limits_{\overline{D}_2^{(\rho)}}|f_{2,h}^{(p+1)}(z)|\leqslant C_p^{*(2)}\dfrac{\omega(h;f^{(p)})}{h}$,

где постоянные $C_p^{(1)}$, $C_p^{(2)}$, $C_p^{*(1)}$ и $C_p^{*(2)}$ не зависят от h.

Обозначим

$$f_h(z)=\begin{cases}f_{1,h}(z) & \text{при } z\in\overline{D}_1^{(\rho)},\\ f_{2,h}(z) & \text{при } z\in\overline{D}_2^{(\rho)};\end{cases}$$

тогда очевидно, что функция $f_h(z)$ непрерывна на $\overline{D}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p включительно. Кроме того, в силу свойств 1)—4) функций $f_{1,h}(z)$ и $f_{2,h}(z)$ имеем также:

2′) $\sup\limits_{\overline{D}^{(\rho)}}|f_h^{(k)}(z)|\leqslant R_k<+\infty\quad (k=0,1,\ \dots\ ,p)$,

где $R_k>0$ не зависит от h;

3′) $\sup\limits_{\overline{D}^{(\rho)}}|f^{(p)}(z)-f_h^{(p)}(z)|\leqslant D_p\,\omega(h;f^{(p)})$;

4′) $\sup\limits_{\overline{D}^{(\rho)}}|f_h^{(p+1)}(z)|\leqslant D_p^*\dfrac{\omega(h;f^{(p)})}{h}$,

где постоянные D_p и D_p^* не зависят от h.

Здесь следует заметить, что, вообще говоря, функция $f_h^{(p+1)}(z)$ претерпевает разрыв в точке $z=0$.

Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=[f(z)-f_{\sigma\rho}(z)]+f_{\sigma\rho}(z)\quad (\sigma\geqslant 1).$$

Из 3'), в силу теоремы 1, можно заключить, что существует такая целая функция $g_\sigma^{(1)}(z)$ порядка ρ и типа $\tau \geqslant 1$, что

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |f(z) - f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(1)}(z)| \leqslant C_p \frac{D_p \omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}; f^{(p)}\right)}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}. \qquad (2.1.30)$$

Аналогично, из 4'), в силу теоремы 1, можно заключить, что существует такая целая функция $g_\sigma^{(2)}(z)$ порядка ρ и типа τ, что

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(2)}(z)| \leqslant C_{p+1} \frac{D_{p+1}^{*} \omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}; f^{(p)}\right)}{\sigma^{\frac{p+1}{\rho}}} \tau^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (2.1.31)$$

Из (2.1.30), (2.1.31) и неравенства

$$|f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant |f(z) - f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(1)}(z)| + |f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(2)}(z)|,$$

где $g_\sigma(z) = g_\sigma^{(1)}(z) + g_\sigma^{(2)}(z)$ при $\tau \geqslant 1$, имеем:

$$\sup_{z \in \overline{D}^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p^{*} \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}; f^{(p)}\right)}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}},$$

где постоянная C_p^{*} не зависит от σ. Теорема доказана.

2°. Обратные теоремы о наилучшем приближении. Имеет место следующая обратная теорема о наилучшем приближении в противолежащих углах.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(z)$ — ограниченная функция комплексного переменного z, определенная на замкнутом множестве $\overline{D}^{(\rho)}$ ($\rho \geqslant 1$). Пусть для любого $\sigma > 0$*

$$A_\sigma(f, \overline{D}^{(\rho)}) \leqslant \frac{C}{\sigma^r} \quad (r > 0), \qquad (2.2.1)$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от σ. Тогда справедливы следующие утверждения:

Если $\rho \geqslant 1$ и $r = p + \alpha$, где $p \geqslant 0$ — целое число и $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $f(z)$ голоморфна при $\rho > 1$ на компонентах $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ множества $D^{(\rho)}$ и непрерывна вместе со своими производными до порядка p включительно на всякой конечной части замкнутого множества $\overline{D}^{(\rho)}$.

Кроме того, как функция от длины дуги, на всякой конечной части границы $D^{(\rho)}$ при $0 < \alpha < 1$ $f^{(p)}(z) \in \operatorname{Lip}\alpha$, а при $\alpha = 1$

$$\omega(h; f^{(p)}) \leqslant Mh \log \frac{1}{h} \quad (0 < h < 1).$$

Доказательство. Пусть $g_\sigma(z)$ — целая функция порядка ρ и типа $\sigma > 0$, которая осуществляет наилучшее приближение, т. е.

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant \frac{C}{\sigma^r}. \tag{2.2.2}$$

Из ограниченности функции $f(z)$ на $\overline{D}^{(\rho)}$ и из (2.2.2) следует, что

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |g_\sigma(z)| \leqslant C_1, \tag{2.2.3}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Из (2.2.2), очевидно, имеем:

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |g_{2^n}(z) - g_{2^{n-1}}(z)| \leqslant \frac{2C}{2^{r(n-1)}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.2.4}$$

откуда, в силу (2.2.1), вытекает, что имеет место разложение:

$$f(z) = g_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_{2^n}(z) - g_{2^{n-1}}(z)], \tag{2.2.5}$$

равномерно и абсолютно сходящееся на замкнутом множестве $\overline{D}^{(\rho)}$.

Это значит, что при $\rho > 1$ функция $f(z)$ голоморфна на компонентах $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ множества $D^{(\rho)}$ и непрерывна на замкнутом множестве $\overline{D}^{(\rho)}$, а при $\rho = 1$ отсюда непосредственно вытекает непрерывность функции $f(z)$ на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

В работе [7] было доказано, что если целая функция $\Phi_\sigma(z)$ порядка ρ и типа $\sigma > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |\Phi_\sigma(z)| \leqslant M < +\infty,$$

то при $k = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |\Phi_\sigma^{(k)}(z)| \leqslant MB_k \left\{ \left[|z| + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} \cdot \right]^{\rho-1} \right\}^k \sigma^k, \tag{2.2.6}$$

где $B_k > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Пусть $r = p + \alpha$, где $p \geqslant 0$ — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$; тогда из (2.2.4) следует, что при $|z| \leqslant R$

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |g_{2^n}^{(k)}(z) - g_{2^{n-1}}^{(k)}(z)| \leqslant G_k(R) \frac{2^{nk}}{2^{(p+\alpha)(n-1)}} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.2.6'}$$

где $C_k(R)$ — постоянная, зависящая от k и R.

Из оценок (2.2.6′) вытекает, что ряды

$$g_1^{(k)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_{2^n}^{(k)}(z) - g_{2^{n-1}}^{(k)}(z)] \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

абсолютно и равномерно сходятся на всякой конечной части замкнутого множества $\overline{D}^{(\rho)}$. Но это и означает, что функция $f(z)$ при $\rho \geqslant 1$ имеет непрерывные производные до порядка p включительно на всякой конечной части $\overline{D}^{(\rho)}$.

Что касается утверждения теоремы о модуле непрерывности функции $f^{(p)}(z)$, то оно устанавливается обычным методом [см., например, (8), стр. 132—135].

Отметим, что при $\rho = 1$ утверждения теоремы были известны [см. (5)].

В заключение заметим, что если $\rho > 1$ и $r = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1$, где $p_1 \geqslant 0$ — целое число (очевидно, $p_1 \geqslant p$), а $0 < \alpha_1 \leqslant 1$, то функция $f(z)$ в точке $z = 0$ будет иметь внутренние угловые производные до порядка p_1 включительно, причем при $|z| \to 0$, когда

$$|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) - \delta, \quad |\arg z + \pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) - \delta,$$

имеем:

$$|f^{(p_1)}(z) - f^{(p_1)}(0)| \leqslant \begin{cases} C_1(\delta)\,|z|^{\alpha_1} & \text{при } 0 < \alpha_1 < 1, \\ C_2(\delta)\,|z| \log \frac{1}{|z|} & \text{при } \alpha_1 = 1. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Доказательство этого утверждения опять основывается на оценке (2.2.6), поэтому мы его здесь не приводим.

Сравнивая прямую теорему 2 и обратную теорему 3 (с учетом приведенного выше заключительного замечания), приходим к выводу, что прямую теорему существенно усилить нельзя.

Приведем теперь теорему, показывающую, что при более быстром убывании наилучших приближений, чем это требуется условием (2.2.1) теоремы 3, обеспечивается аналитичность функции $f(z)$ не только на $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ в отдельности, но и в более широкой односвязной области, содержащей $\overline{D}^{(\rho)}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f(z)$ — ограниченная функция, определенная на $\overline{D}^{(\rho)}$. Если*

$$A_\sigma^{(\rho)}[f(z);\ D^{(\rho)}] \leqslant Ce^{-\gamma\sigma}, \tag{2.2.8}$$

где $\gamma > 0$ и $C > 0$ — постоянные, не зависящие от σ, то функция $f(z)$ будет аналитической и ограниченной внутри области, содержащей всю ось $(-\infty, +\infty)$ и ограниченной кривыми

$$r^\rho \cos\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \gamma, \quad \left|\theta + \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2\rho},$$

$$r^\rho \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \gamma, \quad \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2\rho}.$$

Доказательство. Пусть $g_\sigma(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ, для которой, согласно условию (2.2.8) теоремы 4, имеет место неравенство:

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)| \leqslant Ce^{-\gamma\sigma}. \tag{2.2.9}$$

Из (2.2.9) следует, что

$$\sup_{\overline{D}^{(\rho)}} |g_n(z) - g_{n-1}(z)| \leqslant Ce^{-\gamma(n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.2.10}$$

Из (2.2.10) следует, что имеет место разложение

$$f(z) = g_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(z) - g_{n-1}(z)], \tag{2.2.11}$$

равномерно и абсолютно сходящееся на $\overline{D}^{(\rho)}$.

Но из (2.2.10) вытекает, как это показано в работе [7], что на семействах кривых

$$r^\rho \cos \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha \text{ и } r^\rho \cos \rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \alpha \tag{2.2.12}$$

имеет место оценка

$$\sup |g_n(z) - g_{n-1}(z)| \leqslant Ce^{1-n(\gamma-\alpha)} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.2.13}$$

которая показывает, что ряд (2.2.11) абсолютно и равномерно сходится не только на $\overline{D}^{(\rho)}$, но и на кривых (2.2.12), если только $0 \leqslant \alpha < \gamma$. Это значит, в силу разложения (2.2.11), что функция $f(z)$ голоморфна и ограничена внутри области G_γ, указанной в теореме.

Заметим, что при $\rho = 1$ результат теоремы был известен [см. [4]].

§ 3. Наилучшее приближение целыми функциями в области угла

1°. Прямые теоремы о наилучшем приближении в области угла. Для данного $\rho\left(\rho > \frac{1}{2}\right)$ обозначим через $G^{(\rho)}$ область угла

$$\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \pi\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right). \tag{3.1.1}$$

Заметим, что при $\rho = \frac{1}{2}$ замкнутое множество $\overline{G}^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ представляет собой полуось $[0, +i\infty)$ мнимой оси.

Пусть $f(z)$ — ограниченная функция, определенная на $\overline{G}^{(\rho)}$. Обозначим

$$\overline{A}_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) = \inf_{\{g_\sigma\}} \{\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f(z) - g_\sigma(z)|\}, \tag{3.1.2}$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ порядка ρ и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на $\overline{G}^{(\rho)}$.

Докажем теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G^{(\rho)}$ $\left(при\ \rho > \frac{1}{2}\right)$ и непрерывна в $\overline{G}^{(\rho)}\left(при\ \rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$; тогда:*

1) *если при $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$ функция $f(z^2)$ непрерывна на лучах $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ вместе со своими производными до порядка $p-1$ $(p \geqslant 1)$ включительно, причем на указанных лучах*

$$\sup \left|\frac{d^p}{dz^p} f(z^2)\right| \leqslant M_p < +\infty, \tag{3.1.3}$$

то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{2\rho}}}, \tag{3.1.4}$$

где $C_p > 0$ *не зависит от* σ *и функции* $f(z)$;

2) *если при* $\rho \geqslant 1$ *функция* $f(z)$ *непрерывна на* $\overline{G}^{(\rho)}$ *вместе со своими производными до порядка* $p-1$ $(p \geqslant 1)$ *включительно, причем*

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f^{(p)}(z)| \leqslant M_p^* < +\infty, \tag{3.1.5}$$

то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p^* \frac{M_p^*}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}, \tag{3.1.6}$$

где C_p^* *не зависит от* σ *и функции* $f(z)$.

Доказательство. 1) Пусть $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$; тогда очевидно, что раствор $\pi\left(2-\frac{1}{\rho}\right)$ угла $G^{(\rho)}$ меньше π, а при $\rho = \frac{1}{2}$ $\overline{G}^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ представляет собой полуось $[0, +i\infty)$ мнимой оси.

Функция $f(z^2)$ при $\frac{1}{2} < \rho < 1$, очевидно, аналитична в противолежащих углах

$$G_1^{(2\rho)}: \left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2\rho}\right),$$

$$G_2^{(2\rho)}: \left|\arg z + \frac{3\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)$$

и непрерывна на множестве

$$\overline{D}^{(2\rho)} = \overline{G}_1^{(2\rho)} + \overline{G}_2^{(2\rho)}$$

при $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$. По условиям теоремы, функция $\varphi(z) = f(z^2)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 с заменой в указанной теореме числа ρ на 2ρ $(2\rho \geqslant 1)$.

Так как функция $\varphi(z) = f(z^2)$ — четная, то, по теореме 1, существует четная целая функция $g_\sigma(z)$ порядка 2ρ и типа $\sigma > 0$, для которой

$$\sup_{\overline{D}^{(2\rho)}} |\varphi(z) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p \frac{M^p}{\sigma^{\frac{p}{2\rho}}}. \tag{3.1.7}$$

Функция $F_\sigma(z) = g_\sigma(\sqrt{z})$, очевидно, опять целая, но имеет порядок ρ и тип σ. Поэтому из (3.1.7) получим:

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f(z) - F_\rho(z)| \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{\frac{p}{2\rho}}}, \tag{3.1.8}$$

откуда следует утверждение (3.1.4) теоремы.

2) Положим теперь $\rho \geqslant 1$; тогда очевидно, что раствор $\pi\left(2-\frac{1}{\rho}\right)$ угла $G^{(\rho)}$ больше, чем π.

Рассмотрим интеграл

$$G_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda\left[\sigma^{\frac{1}{\rho}}(t-z)\right] f(t)\,dt, \tag{3.1.9}$$

где, как и в теореме 1, функция $H_\lambda(z)$ определяется по (1.1.4) и четное число $\lambda \geqslant p+2$. Согласно лемме 4, интеграл (3.1.9) сходится и представляет целую функцию порядка ρ и типа σ.

Так как раствор угла $G^{(\rho)}$, где функция $f(z)$ аналитична, не меньше π, то, поступая как при доказательстве теоремы 1, т. е. поворачивая путь интегрирования в (3.1.9), заключаем, что

$$\sup_{G^{(\rho)}} |G_\sigma(z)| \leqslant M_1, \tag{3.1.10}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Далее, установление утверждения (3.1.6) теоремы полностью совпадает с соответствующими рассуждениями, приведенными в теореме 1, поэтому мы их опускаем.

Пусть, как в теореме 5, при $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$ $G_1^{(2\rho)}$ означает область угла

$$\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2\rho}\right).$$

Докажем вторую теорему о наилучшем приближении в угловой области.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G^{(\rho)}\left(\text{при } \rho > \frac{1}{2}\right)$ и непрерывна на $\overline{G}^{(\rho)}\left(\text{при } \rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$; тогда:*

1) *если при $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$ функция $f(z^2)$ непрерывна на $\overline{G}_1^{(2\rho)}$ вместе со своими производными (по z) до порядка p $(p \geqslant 0)$ включительно, причем*

$$\omega_1^*(h; f^{(p)}(z^2)) = \sup_{|z_1-z_2|\leqslant h} |f^{(p)}(z_1^2) - f^{(p)}(z_2^2)| \tag{3.1.11}$$

— модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z^2)$ на $\overline{G}_1^{(2\rho)}$, то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p^* \frac{\omega_1^*\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2\rho}}}; f^{(p)}(z^2)\right)}{\sigma^{\frac{p}{2\rho}}}; \tag{3.1.12}$$

2) *если при $\rho \geqslant 1$ функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{G}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p $(p \geqslant 0)$ включительно, причем*

$$\omega(h; f^{(p)}(z)) = \sup_{|z_1-z_2|\leqslant h} |f^{(p)}(z_1) - f^{(p)}(z_2)| \tag{3.1.13}$$

— модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z)$ на $\overline{G}^{(\rho)}$, то

$$A_\sigma^{(\rho)}|f;\ G^{(\rho)}| \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}};\ f^{(p)}(z)\right)}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}. \tag{3.1.14}$$

Доказательство. 1) Пусть $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$; тогда из условий теоремы следует, что функция $f(z^2)$ при $\frac{1}{2} < \rho < 1$ аналитична в противолежащих углах $G_1^{(2\rho)}$ и $G_2^{(2\rho)}$, определенных в теореме 5, и непрерывна на множестве

$$\overline{D}^{(2\rho)} = \overline{G}_1^{(2\rho)} + \overline{G}_2^{(2\rho)}.$$

Кроме того, ясно, что функция $f(z^2)$ на $\overline{D}^{(2\rho)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 с заменой в ней ρ на 2ρ $(2\rho \geqslant 1)$.

Так как $f(z^2)$ — четная функция, то, по теореме 2, существует четная целая функция $g_\sigma(z)$ порядка 2ρ и типа $\sigma > 0$, для которой

$$\sup_{\overline{D}^{(2\rho)}} |f(z^2) - g_\sigma(z)| \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2\rho}}};\ f^{(p)}(z^2)\right)}{\sigma^{\frac{p}{2\rho}}}. \tag{3.1.15}$$

Из (3.1.15) легко вывести утверждение (3.1.12) теоремы, если заметить, что функция $F_\sigma(z) = g_\sigma(\sqrt{z})$ — также целая типа σ, но порядка ρ.

2) Пусть $\rho \geqslant 1$; тогда при $z \in \overline{G}^{(\rho)}$ рассмотрим функцию

$$f_h(z) = \frac{1}{ih} \int_z^{z+ih} f(\zeta)\, d\zeta \quad (h > 0),$$

где интегрирование производится по отрезку, соединяющему точки z и $z + ih$. Очевидно, что функция $f_h(z)$ голоморфна в области $G^{(\rho)}$ и непрерывна и ограничена на $\overline{G}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p включительно. Кроме того, из формул

$$f_h^{(p)}(z) = \frac{1}{h} \int_0^{ih} f^{(p)}(z+\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{h} \int_z^{z+ih} f^{(p)}(\zeta)\, d\zeta,$$

$$f_h^{(p+1)}(z) = \frac{1}{h}\left[f^{(p)}(z+ih) - f^{(p)}(z)\right]$$

имеем:

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f^{(p)}(z) - f_h^{(p)}(z)| \leqslant \omega(h; f^{(p)}(z)) \tag{3.1.16}$$

и

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f_h^{(p+1)}(z)| \leqslant \frac{\omega(h; f^{(p)}(z))}{h}. \tag{3.1.17}$$

Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = [f(z) - f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z)] + f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z).$$

Из (3.1.16), в силу теоремы 5, можно заключить, что существует целая функция $g_\sigma^{(1)}(z)$ порядка ρ и типа σ такая, что

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f(z) - t_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(1)}(z)| \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}; f^{(p)}(z)\right)}{\sigma^{\frac{p}{\rho}}}. \qquad (3.1.18)$$

Аналогично, из (3.1.17), в силу теоремы 5, следует, что существует целая функция $g_\sigma^{(2)}(z)$ порядка ρ и типа σ такая, что

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f_{\sigma^{-\frac{1}{\rho}}}(z) - g_\sigma^{(2)}(z)| \leqslant C_{p+1}^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}; f^{(p)}(z)\right)}{\sigma^{\frac{p+1}{\rho}}} \sigma^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (3.1.19)$$

Из (3.1.18) и (3.1.19) приходим к утверждению (3.1.14) теоремы.

2°. Обратные теоремы о наилучшем приближении в угловой области. Обозначим через $\Omega_\rho\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$ область угла $|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}$, имеющего раствор $\pi\left(2 - \frac{1}{\rho}\right)$. При $\rho = \frac{1}{2}$, очевидно, множество $\overline{\Omega}_{\frac{1}{2}}$ совпадает с полуосью $(-\infty, 0]$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $f(z)$ — ограниченная на $\overline{\Omega}_\rho$ функция, для которой*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f;\ \Omega_\rho) \leqslant \frac{C}{\sigma^r} \quad (r > 0), \qquad (3.2.1)$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от σ. Тогда $f(z)$ голоморфна в Ω_ρ $\left(\text{при } \rho > \frac{1}{2}\right)$ и непрерывна в $\overline{\Omega}_\rho\left(\text{при } \rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$. Кроме того,

1) *если $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1$ и $r = p + \alpha$, $r = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1$, где $p \geqslant 0$ и $p_1 \geqslant 0$ — целые числа (очевидно, $p_1 \leqslant p$), а $0 < \alpha \leqslant 1$ и $0 < \alpha_1 \leqslant 1$, то*

а) *функция $f(z)$ на всякой конечной части границы области Ω_ρ имеет непрерывные производные до порядка p_1 включительно, причем на части границы Ω_ρ, лежащей в круге $|z| \leqslant R$, $f^{(p_1)}(z)$ будет иметь модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p_1)}) \leqslant \begin{cases} C_1(R)\, h^{\alpha_1} & \text{при } 0 < \alpha_1 < 1, \\ C_2(R)\, h \log \frac{1}{h} & \text{при } \alpha_1 = 1, \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

где $C_1(R)$ и $C_2(R)$ — постоянные, зависящие от R;

б) *на всякой конечной части границы области Ω_ρ, лежащей вне круга $|z| \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$, функция $f(z)$ имеет непрерывные производные до порядка p $(p \geqslant p_1)$ включительно, причем на части границы Ω_ρ, лежащей в кольце $\delta \leqslant |z| \leqslant R$, $f^{(p)}(z)$ будет иметь модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p)}) \leqslant \begin{cases} C_3(\delta, R)\, h^{\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ C_4(\delta, R)\, h \log \frac{1}{h} & \text{при } \alpha = 1; \end{cases}$$

2) *если* $\rho \geqslant 1$ *и* $r = p + \alpha$, *где* $p \geqslant 0$ — *целое, а* $0 < \alpha \leqslant 1$, *то функция* $f(z)$ *на всякой конечной части границы* Ω_ρ *имеет непрерывные производные до порядка* p *включительно, но при этом на части границы* Ω_ρ, *лежащей в круге* $|z| \leqslant R$, $f^{(p)}(z)$ *имеет модуль непрерывности*

$$\omega(h;\ f^{(p)}) \leqslant \begin{cases} C_1(R)\, h^\alpha & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ C_2(R)\, h \log \frac{1}{h} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Если же $r = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1$, *где* $p_1 \geqslant 0$ — *целое число* $(p_1 \geqslant p)$, *а* $0 < \alpha_1 \leqslant 1$, *то в точке* $z = 0$ *функция* $f(z)$ *будет иметь внутренние угловые производные до порядка* p_1 *включительно, причем для разности* $|f^{(p_1)}(z) - f^{(p_1)}(0)|$ *справедливы оценки вида* (2.2.13).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3 и при этом используется результат работы [6] (теорема 1).

Наконец, имеет место

ТЕОРЕМА 8. *Пусть* $f(z)$ — *ограниченная на* $\overline{\Omega}_\rho \left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$ *функция, для которой*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f;\ \Omega_\rho) \leqslant Ce^{-\gamma\sigma} \quad (\sigma > 0),$$

где $\gamma > 0$ *и* $C > 0$ — *постоянные, не зависящие от* σ; *тогда функция* $f(z)$ *будет аналитической и ограниченной внутри области, содержащей полуось* $[0, +\infty)$ *и ограниченной кривой* $r^\rho \cos \rho\theta = \gamma$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 4; при этом используется результат работы [6] (лемма 1).

Институт математики и
механики Ак. наук Армянской ССР

Поступило
3.V.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kober H., On the approximation to integrable functions by integral functions, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54 (1943), 70—82.
[2] Kober H., Approximation by integral functions in the complex domain, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 56 (1944), 7—31.
[3] Келдыш М. В., О приближении голоморфных функций целыми функциями, Доклады Ак. наук СССР, 47, № 4 (1945), 239—241.
[4] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. II, статьи 84 и 89, М., 1954.
[5] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., 1952.
[6] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., 1947.
[7] Джрбашян М. М., Оценки для производных целых функций конечного порядка и нормального типа, Изв. Ак. наук Армянской ССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, VIII, № 2 (1955), 1—16.
[8] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 513—546

В. М. ГЛУШКОВ

К ТЕОРИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Рассматриваются нильпотентные бикомпактные группы, обладающие конечными нормальными рядами с факторами, изоморфными аддитивной группе целых p-адических чисел. Устанавливается связь таких групп с нильпотентными алгебрами Ли над полем p-адических чисел и с абстрактными нильпотентными группами, имеющими конечное число образующих. Выясняется роль рассматриваемого класса групп для изучения нильпотентных локально бикомпактных групп с условием обрыва возрастающих цепей замкнутых подгрупп.

Конечная система вложенных друг в друга замкнутых подгрупп топологической группы G:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = \{e\},$$

начинающаяся с самой группы G и оканчивающаяся единичной подгруппой, называется, как и в абстрактной теории групп, (конечным) нормальным рядом этой группы, если для всех $i = 1, \ldots, k$ подгруппа G_i является истинным нормальным делителем подгруппы G_{i-1}. Фактор-группы G_{i-1}/G_i $(i = 1, \ldots, k)$ называются факторами, а число k — длиной этого ряда.

Нормальный ряд, все факторы которого топологически изоморфны подгруппам аддитивной группы поля p-адических чисел или конечным циклическим p-группам по какому-нибудь фиксированному простому числу p, условимся называть p-рядом; p-ряды, в которых отсутствуют циклические факторы, будем называть p-адическими рядами.

Настоящая работа посвящена в основном изучению нильпотентных бикомпактных групп с конечными p-рядами.

Напомню, что группа G называется нильпотентной, если она обладает конечным центральным рядом, т. е. таким рядом

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = \{e\}$$

нормальных делителей, начинающимся с самой группы и оканчивающимся единичной подгруппой, в котором для всех $i = 1, \ldots, n$ подгруппа G_i содержится в центре фактор-группы G/G_i. Если для всех $i = 1, \ldots, k$ подгруппа G_i этого ряда является наименьшей подгруппой, содержащей все коммутаторы вида (g, g_{i-1}), где $g \in G$, $g_{i-1} \in G_{i-1}$, то центральный ряд называется нижним.

В топологических группах члены нижнего центрального ряда могут оказаться незамкнутыми подгруппами. Однако нетрудно видеть, что ряд замыканий членов любого центрального ряда, в том числе и нижнего, снова является центральным рядом. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением центральных рядов с замкнутыми членами.

Основные результаты о нильпотентных бикомпактных группах с конечными p-рядами изложены во втором и третьем параграфах работы. В первом параграфе сосредоточены необходимые вспомогательные предложения. Четвертый параграф посвящен изучению локально бикомпактных групп с условием обрыва возрастающих цепей замкнутых подгрупп. В описании строения нильпотентных групп такого вида бикомпактные группы с конечными p-рядами играют весьма важную роль.

§ 1. p-ряды в бикомпактных группах

1.1. В бикомпактных группах факторы нормальных рядов также являются бикомпактными группами. Но всякая неединичная бикомпактная подгруппа аддитивной группы поля p-адических чисел, очевидно, изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел. Таким образом, в бикомпактных группах все p-адические факторы p-рядов изоморфны аддитивной группе целых p-адических чисел.

Обратно, как известно, из бикомпактности нормального делителя и фактор-группы по нему вытекает бикомпактность группы. Поэтому если топологическая группа обладает конечным p-рядом, все p-адические факторы которого изоморфны аддитивной группе целых p-адических чисел, то такая группа непременно бикомпактна.

1.2. Нетрудно видеть, что топологическая группа обладает всюду плотной подгруппой с конечным числом образующих, если такими подгруппами обладает какой-либо ее замкнутый нормальный делитель и фактор-группа по этому нормальному делителю. Поскольку в аддитивной группе целых p-адических чисел имеются всюду плотные циклические подгруппы, то, ввиду 1.1, получаем отсюда, что всякая бикомпактная группа с конечным p-рядом обладает всюду плотными подгруппами с конечным числом образующих.

1.3. Легко видеть, что любая неединичная замкнутая подгруппа B аддитивной группы целых p-адических чисел A снова изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел, а фактор-группа A/B есть конечная циклическая p-группа. Поэтому при уплотнении любого конечного p-ряда бикомпактной группы G, т. е. при включении всех членов этого p-ряда в некоторый больший конечный нормальный ряд группы G, получающийся новый ряд будет снова p-рядом, а число p-адических факторов в нем будет равно числу p-адических факторов исходного ряда.

Далее, как известно, любой взаимно однозначный непрерывный гомоморфизм бикомпактной группы является топологическим изоморфизмом. Отсюда следует, что для бикомпактных групп справедлив топологический аналог леммы Цассенхауза, а значит, и теоремы Шрейера об уплотнениях нормальных рядов [см. ([10]), стр. 68 и стр. 100].

Ввиду только что сделанного замечания, приходим к выводу, что число p-адических факторов в любом конечном p-ряде бикомпактной группы зависит лишь от самой группы, но не от выбора этого p-ряда. Все сказанное приводит к следующему естественному определению:

1.3.1. Определение. *p-адическим рангом бикомпактной группы, обладающей конечным p-рядом, называется число p-адических факторов какого-либо, а следовательно, и любого другого p-ряда этой группы.*

1.4. ЛЕММА. *Любая замкнутая подгруппа и любая фактор группа бикомпактной группы, обладающей конечным p-рядом, также обладают конечными p-рядами, а их p-адические ранги не превосходят p-адического ранга группы.*

Если бикомпактная группа обладает конечным p-адическим рядом, то конечными p-адическими рядами обладают все ее замкнутые подгруппы.

Доказательство. Пусть в бикомпактной группе G имеется конечный p-ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = \{e\}.$$

Если A — любая замкнутая подгруппа группы G, то подгруппы $A_i = A \cap G_i$ и подгруппы $G_i A_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ бикомпактны. Но тогда, как нетрудно видеть, имеет место топологический изоморфизм

$$A_{i-1} / A_i \cong G_i A_{i-1} / G_i \subset G_{i-1} / G_i.$$

Отсюда следует, что ряд

$$A = A_0 \supset \ldots \supset A_k = \{e\}$$

(после исключения возможных повторений) будет являться p-рядом группы A и даже p-адическим рядом, если p-адическим был исходный p-ряд группы G.

Пусть теперь N есть любой замкнутый нормальный делитель группы G. Подгруппы G_i $(i = 1, \ldots, k)$, очевидно, бикомпактны. Поэтому имеет место топологический изоморфизм:

$$NG_{i-1} / NG_i \cong G_{i-1} / (NG_i \cap G_{i-1}),$$

показывающий, что подгруппы NG_i / N составляют некоторый p-ряд группы G / N.

Ясно, что число p-адических факторов в p-рядах, построенных нами для групп A и G/N, не превосходит числа p-адических факторов исходного p-ряда для группы G. Поэтому p-адические ранги групп A и G/N не больше, чем p-адический ранг группы G. Лемма доказана.

1.5. ЛЕММА. *Всякая бикомпактная группа G, обладающая конечным p-рядом, вполне несвязна и является проективным пределом последовательности конечных p-групп.*

Доказательство. В случае нетривиальности связной компоненты K единицы группы G, ввиду леммы 1.4 и определения конечных p-рядов, существовал бы непрерывный гомоморфизм группы K на аддитивную группу целых p-адических чисел или на неединичную конечную группу. Но это противоречит связности множества K. Поэтому K содержит лишь единицу и, значит, группа G вполне несвязна. Ясно также, что в G выполняется вторая аксиома счетности. Тогда, как из-

вестно, G является проективным пределом последовательности конечных групп. Из леммы 1.4 следует, что все члены этой последовательности являются p-группами. Лемма доказана.

1.5.1. Следствие. Бикомпактная группа G, обладающая конечным p-рядом, является топологической p-группой, т. е. для любого элемента $g \in G$ последовательность $g^p, g^{p^2}, \ldots, g^{p^n}, \ldots$ сходится к единице группы.

1.5.2. Ввиду леммы 1.5, бикомпактные группы, обладающие конечными p-рядами, являются проективными пределами нильпотентных групп. Вместе с тем нетрудно показать на примерах, что сами эти группы могут не быть нильпотентными.

1.6. ЛЕММА. *В локально бикомпактной p-группе G замыкание A любой бесконечной циклической подгруппы изоморфно аддитивной группе целых p-адических чисел.*

Доказательство. Как известно, в локально бикомпактных группах замыкание A любой циклической подгруппы либо дискретно, либо бикомпактно [(²), § 26, лемма 2]. Так как в нашем случае группа A является, кроме того, коммутативной p-группой, то она должна быть бикомпактной и притом, как нетрудно видеть, вполне несвязной. Ее группа характеров A^* является поэтому бесконечной (ввиду бесконечности A) дискретной p-группой. Поскольку в группе A всюду плотна циклическая подгруппа, любая ее конечная фактор-группа будет циклической. Это означает, в свою очередь, что в группе A^* все конечные подгруппы циклические. Но единственной бесконечной p-группой, обладающей таким свойством, является, очевидно, квазициклическая p-группа (группа типа p^∞). Следовательно, группа A изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел, что и требовалось доказать.

1.7. ЛЕММА. *Если в локально бикомпактной p-группе G имеется замкнутый нормальный делитель N такой, что фактор-группа G/N изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел, то существует подгруппа A группы G, изоморфная G/N и такая, что $NA = G$, $N \cap A = \{e\}$.*

Доказательство. Фактор-группа G/N обладает, очевидно, всюду плотными циклическими подгруппами. Поэтому в группе G найдется такая бесконечная циклическая подгруппа B, что подгруппа NB всюду плотна в G. Обозначим через A замыкание подгруппы B. Ввиду леммы 1.6. A является бикомпактной группой, изоморфной аддитивной группе целых p-адических чисел. Будучи замкнутой подгруппой, содержащей NB, подгруппа NA совпадает с G. Далее, поскольку подгруппа A бикомпактна, имеет место топологический изоморфизм

$$A/(N \cap A) \cong AN/N = G/N.$$

Так как всякая собственная фактор-группа аддитивной группы целых p-адических чисел конечна, то этот изоморфизм возможен лишь тогда, когда группа $N \cap A$ — единичная. Тем самым лемма доказана.

1.7.1. Следствие. Бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом длиной n обладает конечной системой подгрупп $A_1, \ldots, A_n$, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел и таких, что $G = A_1 A_2 \ldots A_n$.

1.7.2. Замечание. Точно таким же способом, как и в 1.7, можно доказать следующее предложение.

Если локально бикомпактная p-группа G обладает конечной циклической фактор-группой G/N, то в группе G найдется подгруппа A, изоморфная либо аддитивной группе целых p-адических чисел, либо конечной циклической p-группе, такая, что $G = NA$ (подгруппа $N \cap A$ в этом случае не обязательно единичная).

1.7.3. Следствие. Всякая бикомпактная группа, обладающая конечным p-рядом, алгебраически порождается конечной системой своих подгрупп, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел или конечным циклическим p-группам.

Для нильпотентных групп справедливо также и обратное предложение:

1.8. ЛЕММА. *Если нильпотентная топологическая группа порождается алгебраически конечным множеством своих подгрупп, каждая из которых изоморфна либо аддитивной группе целых p-адических чисел, либо конечной циклической p-группе по какому-нибудь фиксированному простому числу p, то G есть бикомпактная группа с конечным p-рядом.*

Доказательство. Обозначим через

$$G = G_1 \supset \ldots G_n = G^{n+1} = \{e\}$$

центральный ряд, составленный из замыканий членов нижнего центрального ряда группы G. Легко видеть, что любые непрерывные гомоморфные образы конечных циклических p-групп и целой p-адической группы снова являются конечными циклическими p-группами или целыми p-адическими группами. Поэтому группа G/G_2 порождается конечным числом своих циклических p-подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе p-адических чисел. Будучи, кроме того, коммутативной, группа G/G_2 совпадает с произведением этих подгрупп. Но тогда, как легко видеть, G/G_2 является бикомпактной группой с конечным p-рядом. Далее, нетрудно показать, что для любого $k = 2, \ldots, n+1$ члены ряда

$$G/G_k = G_1/G_k \supset \ldots \supset G_{k-1}/G_k \supset \{e\}$$

совпадают с замыканиями членов нижнего центрального ряда группы G/G_k. Поэтому, применяя индукцию по k, можно предполагать, что G/G_n есть бикомпактная группа с конечным p-рядом. Ввиду леммы 1.4 и п. 1.2, бикомпактная группа $G'_{n-1} = G_{n-1}/G_n$ обладает всюду плотной подгруппой H' с конечным числом образующих. Пусть $\{a_1, \ldots, a_m\}$ — какое-либо конечное множество элементов подгруппы G_{n-1} такое, что смежные классы $G_n a_1, \ldots, G_n a_m$ порождают H'. Из определения нижнего центрального ряда следует, что G_n есть наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая все коммутаторы вида (g, a), где $g \in G$, $a \in G_{n-1}$. Так как подгруппа G_n центральна в G, а подгруппа H' коммутативна и всюду плотна в $G'_{n-1} = G_{n-1}/G_n$, то отсюда следует, что G_n совпадает с замыканием подгруппы, порожденной всевозможными коммутаторами вида $(g, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m})$, где $g \in G$, а $n_1, \ldots, n_m$ — любые целые рациональные числа. Легко проверить, что при любом фиксированном $i = 1, \ldots, m$ отображение $gG_n \to (g, a_i)$

есть непрерывный гомоморфизм группы G/G_n в группу G_n. Так как группа G/G_n, по предположению бикомпактна, то ее образ A_i при этом гомоморфизме является бикомпактной подгруппой из G_n, изоморфной некоторой фактор-группе группы G/G_n. Ввиду леммы 1.4, A_i обладает конечным p-рядом.

Далее, из легко проверяемого соотношения

$$(g, a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m}) = (g, a_1)^{n_1} \dots (g, a_m)^{n_m}$$

непосредственно следует, что множество $A = A_1 \dots A_m$ содержит все коммутаторы вида $(g, a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m})$ с $g \in G$. Ясно также, что множество A является бикомпактной и, следовательно, замкнутой подгруппой группы G_n. Ввиду сказанного выше, это означает, что $A = G_n$. Из наличия конечных p-рядов в группах A_i $(i = 1, \dots, m)$ и коммутативности G_n легко следует наличие конечного p-ряда в группе G_n. Таким образом, группы G_n и G/G_n бикомпактны и обладают конечными p-рядами. Но тогда, очевидно, G также является бикомпактной группой с конечным p-рядом. Лемма доказана.

1.9. ЛЕММА. *Если нильпотентная бикомпактная группа G с конечным p-рядом не имеет отличных от единицы элементов конечного порядка, то она обладает конечным p-адическим рядом.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что всякая коммутативная бикомпактная группа A с конечным p-рядом, не имеющая нетривиальных элементов конечного порядка, разлагается в прямое произведение конечного числа групп, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел. Действительно, группа характеров A^* группы A является дискретной абелевой группой, обладающей конечным нормальным рядом, все факторы которого изоморфны конечным p-группам, либо группе типа p^∞. Такая группа разлагается, очевидно, в прямое произведение конечной p-группы B и конечного числа групп типа p^∞ [см. ([10]), стр. 341]. Поскольку A не имеет нетривиальных элементов конечного порядка, группа A^* не может иметь собственных подгрупп конечного индекса. Следовательно, подгруппа B — единичная, и справедливость сделанного замечания после этого очевидна.

Этим же рассуждением доказывается справедливость утверждения леммы для случая, когда группа G коммутативна, т. е. имеет центральный ряд длиной 1. При проведении индукции можно, не нарушая общности, предполагать, что лемма доказана для фактор-группы G/Z группы G по ее центру Z [эта фактор-группа не имеет элементов конечного порядка в силу теоремы 2 из ([12])]. Ввиду замкнутости Z, леммы 1.4 и сделанного выше замечания о коммутативных группах, в группе Z имеется конечный p-адический ряд. Но тогда группа G, очевидно, также обладает конечным p-адическим рядом. Лемма доказана.

Докажем еще одно вспомогательное предложение, которое необходимо для доказательства основной теоремы следующего параграфа.

1.10. ЛЕММА. *Если A есть любая открытая подгруппа бикомпактной группы G, обладающей конечным p-рядом, то для всякого натурального числа n подгруппа, алгебраически порожденная p^n-ми степенями элементов из A, открыта в G.*

Доказательство. Группа A, очевидно, бикомпактна и обладает конечным p-рядом (лемма 1.4). Кроме того, любая открытая в A подгруппа открыта и в G. Поэтому достаточно доказать лемму для того частного случая, когда $A = G$.

Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_m \{e\}$ есть какой-либо p-ряд группы G. Через $n(G_i)$ будем обозначать подгруппу, порожденную p^n-ми степенями элементов из $G_i (i = 0, \ldots, m)$. Из следствия 1.5.1, леммы 1.7 и замечания 1.7.2 вытекает, что для любого $i = 1, \ldots, m$ существует подгруппа B_{i-1}, изоморфная аддитивной группе целых p-адических чисел или конечной циклической p-группе и удовлетворяющая условию

$$G_{i-1} = G_i B_{i-1}.$$

Пусть для некоторого $i \geqslant 1$ уже доказано, что подгруппа $n(G_i)$ открыта в G_i (для $i = m$ это верно тривиальным образом). Нетрудно показать также, что подгруппа $n(B_{i-1})$, порожденная p^n-ми степенями элементов группы B_{i-1}, открыта в B_{i-1}. Но подгруппы G_i и B_{i-1} бикомпактны, поэтому, на основании леммы 6 из ([5]), произведение окрестностей единиц групп G_i и B_{i-1} содержит некоторую окрестность единицы группы G_{i-1}. Так как, очевидно,

$$n(G_i) \cdot n(B_{i-1}) \subset n(G_{i-1}),$$

то это означает, что подгруппа $n(G_{i-1})$ открыта в G_{i-1}. Проводя теперь индукцию по i, завершаем доказательство леммы.

§ 2. Теорема вложения и точные треугольные представления

2.1. Во всякой нильпотентной алгебре Ли L над полем нулевой характеристики можно ввести операцию умножения по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа:

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots.$$

Рассматриваемое вместе с этой операцией множество L представляет собою нильпотентную группу без элементов конечного порядка — так называемую группу Кэмпбелла — Хаусдорфа алгебры L [см. ([6]), § 3 или ([12]), § 3].

Пусть, в частности, L есть нильпотентная алгебра Ли конечного ранга над полем F_p p-адических чисел. Алгебра L допускает естественную топологизацию, превращающую ее аддитивную группу в топологическую прямую сумму конечного числа экземпляров аддитивной группы поля F_p (предполагается, что поле F_p снабжено естественной топологией, индуцируемой p-адической нормой). Легко проверить, что при такой топологизации оказываются непрерывными не только операции алгебры L, но и операций ее группы Кэмпбелла — Хаусдорфа H. Возникающую таким образом топологическую группу H будем называть нильпотентной группой Ли конечного ранга над полем p-адических чисел, а алгебру L — алгеброй Ли этой группы [см. ([6]), § 3].

2.2. ТЕОРЕМА. *Всякую нильпотентную бикомпактную группу G, обладающую конечным p-адическим рядом, можно вложить с сохранением топологии в качестве открытой подгруппы в нильпотентную группу Ли H конечного ранга над полем p-адических чисел.*

Доказательство. Группа G нильпотентна и не содержит, очевидно, отличных от единицы элементов конечного порядка. Тогда, как показал А. И. Мальцев ([12]), группу G, рассматриваемую абстрактно, можно вложить в качестве подгруппы в некоторую нильпотентную группу H без элементов конечного порядка, обладающую свойством неограниченной извлекаемости корня, так что любой элемент из H, будучи возведен в подходящую целую положительную степень, содержится в G. Группа H определяется этими условиями однозначно с точностью до изоморфизма и называется пополнением группы G [см. ([12])]. Ввиду того что в настоящей работе используются также пополнения совсем иного рода, мы будем называть указанное пополнение мальцевским.

Введем в группе H топологию, выбирая в качестве полной системы окрестностей ее единицы систему S всех открытых подгрупп группы G. Так как группа G бикомпактна и вполне несвязна (лемма 1.5), то такой выбор окрестностей задает в группе G первоначальную топологию. Система S очевидным образом удовлетворяет требованиям первых четырех аксиом Л. С. Понтрягина для полной системы окрестностей единицы топологической группы [см. ([13]), стр. 107]. Поэтому для проверки того, что при указанном выборе топологии H превращается в топологическую группу, достаточно доказать следующее предложение:

Для любого элемента $h \in H$ и любой открытой в G подгруппы U найдется такая открытая в G подгруппа V, что $h^{-1}Vh \subset U$.

Будем называть это предложение предложением P. Для доказательства предложения P используем ряд последовательных гиперцентров $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ группы H, здесь Z_1 есть центр группы H и вообще Z_{i+1}/Z_i—центр фактор-группы H/Z_i ($i = 1, 2, \ldots$). Ввиду нильпотентности группы H, найдется такое натуральное число j, что

$$Z_j = Z_{j+1} = \ldots = H.$$

Поэтому ясно, что предложение P будет доказано, если для всех $i = 1, 2, \ldots$ установить справедливость следующего предложения, называемого ниже для краткости предложением $P(i)$:

Каковы бы ни были нильпотентная бикомпактная группа C с конечным p-адическим рядом, ее открытая подгруппа X и элемент d мальцевского пополнения D группы C, найдется открытая подгруппа Y группы C такая, что ее пересечение Y_i с i-м гиперцентром Z_i группы D удовлетворяет условию $d^{-1}Y_i\, d \subset X$.

Предложение $P(1)$ верно тривиальным образом, поскольку подгруппа Y_1 центральна в D. Для проведения индукции достаточно доказать предложение $P(i+1)$ в предположении, что предложение $P(i)$ уже доказано ($i \geqslant 1$).

Итак, пусть G есть нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом, U — какая-либо ее фиксированная открытая подгруппа,

h — фиксированный элемент мальцевского пополнения H группы G. Как указывалось выше, существует такое натуральное число k, что $h^k \in G$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $k = p^n$. В самом деле, группа H обладает свойством однозначной извлекаемости корня [см. ([12]), § 1], а любой элемент $g_0 \in G$ содержится в подгруппе группы G, изоморфной аддитивной группе целых p-адических чисел (лемма 1.6). Поэтому для любого, не делящегося на p натурального числа r в группе G вместе с элементом g_0 содержится также и единственное решение уравнения $x^r = g_0$.

Если Z_i есть i-й гиперцентр группы H, то ввиду предположения индукции возможно выбрать открытую подгруппу A группы G так, чтобы выполнялось условие:

$$h^{-t}(A \cap Z_i)h \subset U \quad \text{для всех} \quad t = 1, \ldots, p_n - 1. \tag{1}$$

Ясно также, что подгруппа A может быть выбрана таким образом, чтобы помимо условия (1) выполнялось также условие:

$$A \subset U. \tag{2}$$

Далее, фактор-группа $H' = H/Z_1$ группы H по ее центру Z_1 не имеет нетривиальных элементов конечного порядка [см. ([12]), теорема 2]. Ясно, что H' является мальцевским пополнением группы $G' = GZ_1/Z_1$. При помощи теоремы 1 из ([12]) легко установить, что подгруппа $G \cap Z_1$ совпадает с центром группы G, и, следовательно, замкнута в G. Поэтому, если g_1 есть любой элемент из G, не содержащийся в Z_1, то в G существует такая открытая подгруппа W, что

$$g_1 \overline{\in} (Z_1 \cap G)W.$$

Но тогда элемент g_1 не содержится также и в подгруппе Z_1W. Тем самым доказано, что система S' подмножеств WZ_1/Z_1 группы G', где W пробегает множество всех открытых подгрупп группы G, обладает единичным пересечением. Но тогда, как нетрудно видеть, система S' может быть принята за полную систему окрестностей единицы группы G'. Легко видеть также, что получаемая таким образом топологическая группа G' является открытым непрерывным гомоморфным образом группы G и, следовательно, представляет собою нильпотентную бикомпактную группу с конечным p-рядом (см. лемму 1.4). Не имея нетривиальных элементов конечного порядка, эта группа обладает конечным p-адическим рядом (лемма 1.9). Предложение $P(i)$, примененное к фактор-группе $H' = H/Z_1$, обеспечивает теперь существование открытой подгруппы B группы G, для которой выполняется соотношение:

$$h^{-1}(B \cap Z_{i+1})h \subset AZ_1. \tag{3}$$

Поскольку h^{p^n} есть элемент из G, открытая в G подгруппа B может быть выбрана таким образом, что кроме соотношения (3) выполняется также соотношение:

$$h^{-p^n}Bh^{p^n} \subset U. \tag{4}$$

Заменяя в случае необходимости B на $B \cap A$, можно обеспечить также включение:

$$B \subset A \subset U. \tag{5}$$

Для любого элемента $g \in B \cap Z_{i+1}$, ввиду соотношения (3), имеем:

$$h^{-1}gh = az,$$

где $a \in A$, $z \in Z_1$. Так как $B \in A$, то $g \in A$; вместе с тем, на основании определения $(i+1)$-го гиперцентра,

$$g^{-1}h^{-1}gh \in Z_i,$$

поэтому

$$g^{-1}h^{-1}gh \in AZ_1 \cap Z_i = (A \cap Z_i)Z_i$$

и окончательно:

$$h^{-1}gh = ga_iz_g, \tag{6}$$

где

$$a_i \in A \cap Z_i, \quad z_g \in Z_1.$$

При помощи последовательного применения соотношения (6) и используя центральность элемента z_g, придем к формуле:

$$h^{-p^n}gh^{p^n} = ga_ih^{-1}a_ih \ldots h^{-(p^n-1)}a_ih^{p^n-1}z_g^{p^n}. \tag{7}$$

Ввиду соотношения (1) и того, что U является подгруппой, равенство (7) можно переписать в виде:

$$h^{-p^n}gh^{p^n} = gu_gz_g^{p^n}, \tag{8}$$

где

$$u_g \in U, \quad z_g \in Z_1.$$

При этом важно подчеркнуть, что соотношение (8) имеет место для любого элемента $g \in B \cap Z_{i+1}$. Так как $B \subset U$, то из сравнения соотношений (4) и (8) получим:

$$z_g^{p^n} \in U \text{ для любого } g \in B \cap Z_{i+1}. \tag{9}$$

Но группа B нильпотентна, поэтому, согласно лемме § 2 из ([12]), найдется такое натуральное число m, что произведение любого числа p^m-х степеней элементов из B есть p^n-я степень какого-либо элемента той же группы B. Обозначим через V подгруппу, алгебраически порождаемую p^m-ми степенями элементов группы B. Ввиду леммы 1.10, подгруппа V открыта в G. Если q — любой элемент из $V \cap Z_{i+1}$, то, как следует из выбора m и V, найдется такой элемент $g \in B$, что $g^{p^n} = q$. С другой стороны, группа H/Z_{i+1} не содержит нетривиальных элементов конечного порядка [см. ([12]), теорема 2], поэтому $g \in Z_{i+1}$ и, окончательно, $g \in B \cap Z_{i+1}$. Но тогда из равенства (6) получаем:

$$h^{-1}qh = h^{-1}g^{p^n}h = (ga_i)^{p^n}z_g^{p^n}.$$

Так как $g \in B \subset U$ и $a_i \in A \in U$, то включение (9) приводит к формуле

$$h^{-1}qh \in U,$$

справедливой для любого $q \in V \cap Z_{i+1}$. Иначе говоря,

$$h^{-1}(V \cap Z_{i+1})\, h \in U.$$

Тем самым индукция проведена, и предложение $P(i)$ доказано для всех $i = 1, 2, \ldots$. Как уже отмечалось выше, отсюда следует справедливость предложения P. Это означает, в свою очередь, что, выбирая в качестве полной системы окрестностей единицы в H множество всех открытых подгрупп группы G, мы превращаем H в топологическую группу. Ясно, что при такой топологизации группа G является открытой бикомпактной подгруппой группы H, так что группа H локально бикомпактна. Для завершения доказательства теоремы остается убедиться в том, что H есть нильпотентная группа Ли конечного ранга над полем p-адических чисел.

Пусть Q есть аддитивная группа целых p-адических чисел, а φ — какой-либо непрерывный гомоморфизм Q в H. Заключим Q в аддитивную группу R поля p-адических чисел. Любой элемент $r \in R$ можно представить в виде $r = p^{-k}q$, где k есть целое неотрицательное рациональное число, а $q \in Q$. Как отмечалось выше, группа H обладает свойством неограниченной и однозначной извлекаемости корня. Поэтому, полагая $\psi(p^{-k}a)$ равным корню p^k-й степени из элемента $\varphi(q)$, получим, очевидно, однозначное отображение ψ группы R в группу H, совпадающее с φ на подгруппе Q. Поскольку из перестановочности элементов в H следует перестановочность любых корней из этих элементов [см. ([12]), теорема 1], то, как нетрудно проверить, отображение ψ является алгебраическим гомоморфизмом R в H. Будучи непрерывным на открытой в R подгруппе Q, гомоморфизм ψ непрерывен.

Далее, группа H не имеет нетривиальных элементов конечного порядка и, как уже отмечалось, для любого элемента $h \in H$ существует такое натуральное число n, что $h^{p^n} \in G$. Отсюда, ввиду следствия 1.5.1 и леммы 1.6, вытекает, что любой элемент из H содержится в подгруппе, топологически изоморфной аддитивной группе целых p-адических чисел. Но тогда, как было только что показано, любой элемент из H может быть заключен также в подгруппу, являющуюся непрерывным гомоморфным образом аддитивной группы поля p-адических чисел. Иными словами, группа H полна над полем p-адических чисел [см. ([6]), определение 4.1].

Докажем, что в H выполняется вторая аксиома счетности. Первая аксиома счетности заведомо выполнена в группе G, а следовательно, и в H. Поэтому достаточно установить, что H обладает всюду плотным счетным подмножеством.

Как было показано выше (следствие 1.7.1), группа G порождается конечным множеством своих подгрупп $G_1, \ldots, G_s$, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел. Заключим каждую из подгрупп G_i в подгруппу R_i, непрерывно гомоморфную аддитивной группе поля p-адических чисел, и обозначим через R подгруппу, порожденную всеми R_i $(i = 1, \ldots, s)$. Каждая из подгрупп R_i обладает, очевидно, свойством неограниченной извлекаемости корня, но тогда таким свойством обладает также и группа R [см. ([4]), теорема 5]. Поскольку любой элемент из H в подходящей степени содержится в подгруппе $G \subset R$, то, ввиду одно-

значности извлечения корня в H, отсюда следует, что R совпадает с H. Но каждая из подгрупп R_i обладает, очевидно, счетным всюду плотным подмножеством, поэтому таким подмножеством обладает также и группа $R = H$.

Итак, H есть нильпотентная локально бикомпактная группа со второй аксиомой счетности, полная над полем p-адических чисел и не содержащая отличных от единицы элементов конечного порядка. Как показано в ([6]) (теорема 4.7), такая группа является нильпотентной группой Ли конечного ранга над полем p-адических чисел. Теорема доказана.

2.3. ТЕОРЕМА. *Из топологического изоморфизма открытых подгрупп G_1 и G_2 нильпотентных групп Ли H_1 и H_2 конечного ранга над полем p-адических чисел следует топологический изоморфизм групп H_1 и H_2.*

Доказательство. Легко видеть, что нильпотентные группы Ли над полем p-адических чисел являются топологическими p-группами. Поэтому любой элемент группы H_1, возведенный в подходящую степень вида p^n, содержится в G_1. То же самое справедливо и в отношении группы H_2; кроме того, группы H_1 и H_2 не содержат, очевидно, нетривиальных элементов конечного порядка и, следовательно, обладают свойством однозначности извлечения корня [см. ([10]), стр. 203]. Неограниченность извлечения корня в группах H_1 и H_2 также имеет место. Если теперь φ есть топологическое изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2, то, относя корням из элементов группы G_1 соответствующие корни из образов этих элементов при изоморфизме φ, получаем, как нетрудно видеть, взаимно однозначное отображение $\dot{\varphi}$ группы H_1 на группу H_2, совпадающее с φ на подгруппе G_1.

Из результатов А. И. Мальцева [см. ([12]), теорема 5, а также ([11]), теорема 5] следует, что отображение $\dot{\varphi}$ является абстрактным изоморфизмом. Будучи непрерывными на открытых подгруппах G_1 и G_2, изоморфизмы H_1 и H_2 непрерывны. Следовательно, группы H_1 и H_2 топологически изоморфны, что и требовалось доказать.

2.4.1. Определение. p-адическим пополнением нильпотентной бикомпактной группы G с конечным p-адическим рядом называется нильпотентная группа Ли конечного ранга над полем p-адических чисел, содержащая группу G в качестве открытой подгруппы.

2.4.2. Из теоремы 2.3 и 2.4 следует, что для любой нильпотентной бикомпактной группы G с конечным p-адическим рядом p-адическое пополнение существует и определяется группой G с точностью до топологического изоморфизма, совпадающего на G с тождественным автоморфизмом. С другой стороны, алгебра Ли нильпотентной группы Ли над полем p-адических чисел определяется этой группой также однозначно с точностью до изоморфизма [см. ([6]), замечание 3.1.6]. Тем самым всякой нильпотентной бикомпактной группе G с конечным p-адическим рядом естественным образом ставится в соответствие некоторая нильпотентная алгебра Ли конечного ранга над полем p-адических чисел, а именно алгебра Ли p-адического пополнения группы G.

2.4.3. Определение. Алгеброй Ли нильпотентной бикомпактной группы с конечным p-адическим рядом называется алгебра Ли p-адического пополнения этой группы.

2.5. ТЕОРЕМА. *Алгебры Ли любых двух нильпотентных бикомпактных групп G_1 и G_2 с конечными p-адическими рядами тогда и только тогда (абстрактно) изоморфны, когда группа G_1 имеет открытую подгруппу, топологически изоморфную некоторой открытой подгруппе группы G_2.*

Доказательство. Обозначим через H_1 и H_2 p-адические пополнения групп G_1 и G_2 соответственно (см. 2.4.1). Пусть A_1 есть открытая подгруппа группы G_1, а A_2 — открытая подгруппа группы G_2, топологически изоморфная группе A_1. Тогда из определения 2.4.1 и теоремы 2.3 вытекает, что группы H_1 и H_2 топологически изоморфны. Но тогда изоморфны также и алгебры Ли этих групп [см. ([6]), замечание 3.1.6] или, что то же самое (см. 2.4.3), — алгебры Ли групп G_1 и G_2.

Обратно, пусть группы G_1 и G_2 имеют абстрактно изоморфные алгебры Ли. Тогда из определения 2.4.3 и п. 2.1 вытекает, что группы H_1 и H_2 топологически изоморфны. Обозначим через φ какой-нибудь фиксированный топологический изоморфизм H_1 на H_2. Так как группа G_1 бикомпактна и вполне несвязна (лемма 1.5), а подгруппа G_2 открыта в H_2 (2.4.1), то найдется такая открытая в G_1 подгруппа B_1, что $\varphi(B_1) \subset G_2$. Поскольку подгруппа G_1 открыта в H_2 (2.4.1), то подгруппа $\varphi(B_1)$ открыта в H_2, а следовательно, и в G_2. Теорема доказана.

2.5.1. ТЕОРЕМА. *Ранг алгебры Ли бикомпактной группы G с конечным p-адическим рядом равен p-адическому рангу группы G.*

Доказательство. Пусть H есть нильпотентная группа Ли конечного ранга над полем p-адических чисел, содержащая группу G в качестве открытой подгруппы. Легко видеть, что группа H обладает конечным нормальным рядом

$$H = H_k \supset \ldots \supset H_0 = \{e\},$$

факторы которого изоморфны аддитивной группе поля p-адических чисел, причем все члены этого ряда также являются нильпотентными группами Ли конечного ранга над p-адическим полем, а ранг алгебры Ли группы H_i равен i $(i = 0, \ldots, k)$.

Пусть уже доказано, что группа $G \cap H_i$ имеет p-адический ряд длины i (для $i = 0$ это верно тривиальным образом). Поскольку подгруппа H_i не является, очевидно, открытой подгруппой группы H_{i+1}, то

$$G \cap H_{i+1} \neq G \cap H_i.$$

Ввиду же бикомпактности группы $G \cap H_{i+1}$, изоморфизм

$$(H_{i+1} \cap G)/(H_i \cap G) \cong H_i(H_{i+1} \cap G)/H_i \subseteq H_{i+1}/H_i$$

является топологическим. Будучи изоморфной подгруппе аддитивной группы поля p-адических чисел, бикомпактная неединичная группа $(H_{i+1} \cap G)/(H_i \cap G)$, как нетрудно видеть, изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел. Теперь ясно, что группа $G \cap H_{i+1}$ обладает конечным p-адическим рядом длиной $i+1$. Проводя индукцию, получаем, что p-адический ранг группы $G \cap H_k = G$ равен k, что и требовалось доказать.

Докажем теперь предложение, обратное теореме 2.2.

2.6. ТЕОРЕМА. *Всякая нильпотентная группа Ли H конечного ранга над полем p-адических чисел имеет открытые бикомпактные подгруппы. Любая бикомпактная подгруппа группы H обладает конечным p-адическим рядом.*

Доказательство. Из определения нильпотентных групп Ли конечного ранга над полем p-адических чисел (см. 2.1) непосредственно следует, что всякая такая группа локально бикомпактна и вполне несвязна. Но тогда, ввиду теоремы 16 из ([13]), в ней имеются открытые бикомпактные подгруппы.

Существование конечного p-адического ряда в любой бикомпактной подгруппе группы H устанавливается таким же способом, каким в предыдущей теореме доказывалось существование конечного p-адического ряда в группе G.

2.6.1. Следствие. Любая нильпотентная алгебра Ли конечного ранга над полем p-адических чисел является алгеброй Ли некоторой нильпотентной бикомпактной группы с конечным p-адическим рядом.

2.7. Рассмотрим примеры матричных групп, являющихся нильпотентными бикомпактными группами с конечными p-адическими рядами.

Пусть n — любое натуральное число. Условимся через e_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ обозначать матричные единицы с законом умножения

$$e_{ik}\, e_{rs} = \delta_{kr}\, e_{is}$$

(δ_{kr} — символ Кронекера), а через

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$$

— единичную матрицу порядка n. Легко видеть, что множество матриц вида

$$e_n + \sum_{i<k} a_{ik}\, e_{ik},$$

где a_{ik} — любые целые p-адические числа, составляет в естественной матричной топологии над кольцом J_p целых p-адических чисел топологическую группу. Будем называть эту группу специальной группой треугольных матриц порядка n над кольцом целых p-адических чисел и обозначать через $T(n)$. Это есть группа всех треугольных матриц порядка n, элементами которых служат целые p-адические числа, а главные диагонали состоят из одних единиц.

Подгруппы

$$T = T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_n = \{e\},$$

где T_j состоит из всех матриц вида

$$e_n + \sum_{i<k-j} a_{ik} e_{ik} \quad (a_{ik} \in J_p),$$

составляют, как нетрудно проверить, нижний центральный ряд группы $T(n)$, так что группа $T(n)$ нильпотентна. Легко видеть также, что

руппа $T(n)$ порождается своими подгруппами T_{ik}, состоящими из атриц вида

$$e_n + a_{ik}e_{ik}$$
$$(a_{ik} \in J_p, \quad i < k = 1, 2, \ldots, n).$$

Каждая из подгрупп T_{ik} топологически изоморфна аддитивной группе кольца J_p, т. е. аддитивной группе целых p-адических чисел. Из леммы .8 вытекает, что $T(n)$ есть нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-рядом. Поскольку группа $T(n)$ не содержит, очевидно, отличных от единицы элементов конечного порядка, она обладает также конечным p-адическим рядом (лемма 1.9). Используя еще лемму 1.4, приходим к следующему предложению:

2.8. ТЕОРЕМА. *Для любого натурального числа n группа $T(n)$ специальных треугольных матриц порядка n над кольцом целых p-адических чисел, а также все ее замкнутые подгруппы являются нильпотентными бикомпактными группами с конечными p-адическими рядами.*

Справедливо также и обратное предложение:

2.9. ТЕОРЕМА. *Всякая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом топологически изоморфна замкнутой подгруппе группы $T(n)$ специальных треугольных матриц* (см. 2.7) *некоторого конечного порядка n над кольцом целых p-адических чисел.*

Доказательство. Пусть F_p есть поле p-адических чисел в топологии, индуцируемой p-адической нормой, а n — любое натуральное число. Обозначая, как и в п. 2.7, через e_{ik} матричные единицы с законом умножения $e_{ik}\, e_{rs} = \delta_{kr} e_{is}$, а через e_n — единичную матрицу n-го порядка, рассмотрим два множества матриц n-го порядка: множество $L(n)$ всех матриц вида

$$\sum_{i<k} a_{ik}e_{ik} \quad (a_{ik} \in F_p)$$

и множество $R(n)$ всех матриц вида

$$e_n + l \quad (l \in L(n)).$$

Относительно естественных матричных операций сложения, умножения на элементы из F и операции коммутирования, задаваемого формулой

$$[a, b] = ab - ba$$
$$(a, b \in L(n)),$$

множество $L(n)$ является алгеброй Ли над полем F_p.

Пусть теперь G есть какая-либо нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом, а L — алгебра Ли этой группы (см. .4.3, 2.4.1 и 2.1).

Алгебра L нильпотентна и имеет конечный ранг. Поэтому, на основании результатов Биркгофа ([1]), ее можно считать подалгеброй матричной алгебры $L(n)$ для некоторого натурального числа n. Легко видеть, что в естественной матричной топологии аддитивная группа алгебры L является прямой суммой конечного числа экземпляров аддитивной группы поля F_p. Из определений 2.4.1, 2.4.3, теоремы 2.2 и п. 2.1 следует тогда,

что группа G топологически изоморфна некоторой открытой бикомпактной подгруппе A группы Кэмпбелла — Хаусдорфа H алгебры L в этой естественной топологии. Легко видеть также, что в естественной матричной топологии множество $R(n)$ является топологической группой относительно матричного умножения, а отображение $\varphi: x \to \exp x$ $(x \in L(n))$ осуществляет гомеоморфизм пространств $L(n)$ и $R(n)$. При этом результат композиции двух матриц из $L(n)$ по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа переводится отображением φ в обычное матричное произведение экспонециалов этих матриц [см. (8), стр. 145]; следовательно, отображение φ является топологическим изоморфизмом группы H в группу $R(n)$. Обозначим через B образ подгруппы A при этом изоморфизме. Матричная группа B топологически изоморфна группе G и потому обладает всюду плотной подгруппой D с конечным числом образующих (см. 1.2). Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — какая-либо конечная система матриц, порождающая подгруппу D. Матрицы d_i — треугольные с единичной диагональю. Поэтому, не нарушая общности, можно считать все элементы этих матриц целыми p-адическими числами (этого всегда можно добиться с помощью подходящего линейного преобразования базиса). Поскольку элементы обратных матриц $d_1^{-1}, \ldots, d_k^{-1}$ также будут при этом целыми p-адическими, то целыми p-адическими будут элементы любой матрицы из подгруппы D. Но любая матрица из B является пределом некоторой последовательности матриц из D, и так как предел последовательности целых p-адических чисел есть всегда снова целое p-адическое число, получаем отсюда, что элементами всех матриц группы B служат целые p-адические числа. Следовательно, B есть подгруппа группы $T(n)$ специальных треугольных матриц n-го порядка над кольцом целых p-адических чисел. Будучи изоморфной бикомпактной группе G, группа B также бикомпактна и потому замкнута в $T(n)$. Теорема доказана.

2.10. Интересно отметить глубокую аналогию между нильпотентными бикомпактными группами с конечными p-адическими рядами, рассматривавшимися в настоящем параграфе, и дискретными нильпотентными группами без кручения с конечным числом образующих, изучавшимися в работах А. И. Мальцева ([11]) и ([12]).

Аналогия имеет место, во-первых, в определении этих двух классов групп. Действительно, группы первого класса могут быть, очевидно, охарактеризованы как нильпотентные топологические группы, обладающие конечными нормальными рядами с факторами, изоморфными аддитивной группе кольца целых p-адических чисел (см. 1.1). Аналогично, группы второго класса могут быть определены как нильпотентные топологические группы, обладающие конечными нормальными рядами с факторами, изоморфными аддитивной группе кольца целых рациональных чисел в дискретной топологии [см. ([11]), стр. 24].

Далее, любая группа G_1 первого класса вкладывается в однозначно определенную нильпотентную группу Ли H_1 конечного ранга над полем p-адических чисел так, что всякий элемент из H_1 в подходящей степени содержится в G_1 (теоремы 2.2 и 2.3). Аналогично, любая группа G_2 второго класса вкладывается в однозначно определенную нильпотентную группу Ли H_2 конечного ранга над полем рациональных чисел в дис-

кретной топологии так, что любой элемент из H_2 в подходящей степени содержится в G_2 [см. ([12]), теоремы 6 и 9].

Наконец, группы первого класса изоморфно представимы специальными треугольными матрицами над кольцом целых p-адических чисел (теорема 2.9). Аналогично, из результатов А. И. Мальцева ([11]) и Г. Биркгофа ([1]) легко следует, что группы второго класса изоморфно представимы специальными треугольными матрицами над кольцом целых рациональных чисел. Причины этой аналогии станут более ясными после ознакомления со следующим параграфом.

§ 3. p-замыкания абстрактных нильпотентных групп

3.1. Для дальнейшего изучения бикомпактных групп с конечными p-рядами в настоящем параграфе используется известный метод конструирования полных вполне несвязных топологических групп, восходящий к Брауэру. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть в некоторой абстрактной группе G имеется убывающая последовательность нормальных делителей $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, обладающая единичным пересечением. Принимая систему подгрупп $\{A_i;\ i = 1, 2, \ldots\}$ за полную систему окрестностей единицы, мы превратим G в топологическую группу, которую попрежнему будем обозначать буквой G. Из инвариантности подгрупп A_i легко следует, что группа G обладает пополнением $\bar{G}$ в смысле Вейля [см. ([7]), теорема 11]. Возникающая таким образом топологическая группа $\bar{G}$ полна в смысле Вейля, вполне несвязна и содержит G в качестве своей всюду плотной подгруппы. Условимся называть ее *замыканием* абстрактной группы G относительно последовательности $\{A_i\}$.

Если пересечение $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ отлично от единицы, то можно аналогичным образом построить замыкание $\bar{G}'$ фактор-группы $G' = G/A$ относительно последовательности ее нормальных делителей A_i/A. Для того чтобы избежать усложнения в терминологии, мы будем и в этом случае называть группу $\bar{G}'$ замыканием группы G относительно последовательности $\{A_i\}$, или, более точно, *несобственным замыканием*, оставляя термин *собственное замыкание* для первоначально рассматривавшегося случая последовательности с единичным пересечением.

3.1.1. Пусть p есть некоторое фиксированное простое число. Последовательность вложенных друг в друга нормальных делителей $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ произвольной абстрактной группы G будем называть *p-последовательностью*, если все фактор-группы $G/A_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ являются p-группами. Если для каждого $i = 1, 2, \ldots$ обозначить через G_i подгруппу, порожденную p^i-ми степенями элементов группы G, то последовательность $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ будет, очевидно, p-последовательностью. Условимся называть ее *канонической p-последовательностью* группы G.

3.1.2. Определение. Замыкание (собственное или несобственное) абстрактной группы G относительно любой ее p-последовательности называется *p-замыканием*, а замыкание относительно канонической p-последовательности — *каноническим p-замыканием* группы G.

Каноническое p-замыкание любой абстрактной группы G определяется группой G однозначно с точностью до топологического изоморфизма и

является (как и всякое p-замыкание) полной вполне несвязной топологической p-группой.

3.2. Конструкция p-замыкания, как и вообще конструкция замыкания абстрактной группы относительно любой последовательности ее нормальных делителей, тесно связана с известной конструкцией проективного предела последовательности дискретных групп.

В самом деле, пусть $\overline{G}$ есть замыкание абстрактной группы G относительно какой-либо последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ нормальных делителей группы G. Заменяя, в случае необходимости, группу G некоторой ее фактор-группой, можно предполагать это замыкание собственным. В таком случае $\overline{G}$ содержит группу G в качестве своей всюду плотной подгруппы, а любой элемент из $\overline{G}$ является пределом фундаментальной последовательности элементов из G в топологии, индуцируемой последовательностью $\{A_i\}$. Легко видеть теперь, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ замыкание $\overline{A}_i$ подгруппы A_i в группе $\overline{G}$ является инвариантной открытой в $\overline{G}$ подгруппой, удовлетворяющей соотношению:

$$G \cap \overline{A}_i = A_i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Обозначим через φ_i естественный гомоморфизм группы $\overline{G}$ на группу $\overline{G}/\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Для любой пары нормальных делителей $\overline{A}_i \subseteq \overline{A}_k$ определяется естественный (непрерывный и открытый) гомоморфизм $\varphi_{ki} = \varphi_k \varphi_i^{-1}$ группы $\overline{G}/\overline{A}_i$ на группу $\overline{G}/\overline{A}_k$. Аналогичным образом из естественных гомоморфизмов ψ_i группы G из группы G/A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ получаются естественные гомоморфизмы $\psi_{ki} = \psi_k \psi_i^{-1}$ группы G/A_i на группу G/A_k $(A_i \subseteq A_k$: $i, k = 1, 2, \ldots)$. Но группа $\overline{G}$ полна, а система нормальных делителей $\{\overline{A}_i\}$ составляет полную систему окрестностей ее единицы. Поэтому $\overline{G}$ является проективным пределом последовательности дискретных групп $\overline{G}/\overline{A}_i$ относительно естественных гомоморфизмов φ_{ki} [см. (1), стр. 35]. Поскольку подгруппа G всюду плотна в $\overline{G}$, а фактор-группа G/A_i при любом $i = 1, 2, \ldots$ дискретна, то естественный гомоморфизм φ_i отображает G на всю эту фактор-группу. Используя, кроме того, соотношение (1), получаем, что гомоморфизм φ_i индуцирует естественный изоморфизм f_i группы G/A_i на группу $\overline{G}/\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Снабжая группы G/A_i дискретной топологией, мы превратим изоморфизмы f_i в топологические изоморфизмы. Для естественного гомоморфизма ψ_{ki} группы G/A_i на группу G/A_k $(A_i \subseteq A_k)$ имеем в таком случае:

$$\psi_{ki} = \psi_k \psi_i^{-1} = f_k^{-1} \varphi_k (f_i^{-1} \varphi_i)^{-1} = f_k^{-1} \varphi_{ki} f_i.$$

Но это означает, очевидно, что группу $\overline{G}$ можно отождествить также с проективным пределом последовательности дискретных групп G/A_i относительно естественных гомоморфизмов ψ_{ki}. Тем самым доказано следующее предложение:

3.3. ЛЕММА. *Замыкание (собственное или несобственное) абстрактной группы G относительно последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ ее нормальных делителей естественным образом отождествляется с проективным пре-*

делом последовательности дискретно топологизированных групп G/A_i относительно естественных гомоморфизмов этих групп.

3.4. ТЕОРЕМА. *Любое p-замыкание абстрактной нильпотентной группы с конечным числом образующих является нильпотентной бикомпактной группой с конечным p-рядом. Обратно, всякая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-рядом является p-замыканием некоторой абстрактной нильпотентной группы с конечным числом образующих.*

Доказательство. Пусть G есть нильпотентная группа с конечным числом образующих, $\{A_i;\ i = 1, 2, \ldots\}$ — какая-либо ее p-последовательность, $\overline{G}$ — замыкание группы G относительно этой последовательности. Являясь нильпотентными p-группами с конечным числом образующих, фактор-группы G/A_i конечны. Используя лемму 3.3 и известные свойства проективных пределов, получаем отсюда, что $\overline{G}$ есть бикомпактная p-группа. Кроме того, $\overline{G}$ содержит всюду плотную нильпотентную подгруппу $\overline{G}'$ с конечным числом образующих (изоморфную группе G или некоторой ее фактор-группе). Пусть $\{G_1, \ldots, G_k\}$ есть какая-либо конечная система циклических подгрупп, порождающая G'. Замыкания подгрупп $G_i\,(i = 1, \ldots, k)$ в группе $\overline{G}$ изоморфны либо аддитивной группе целых p-адических чисел, либо конечным циклическим p-группам (лемма 1.6), а порожденная всеми этими замыканиями подгруппа $B \subset \overline{G}$ содержит G' в качестве всюду плотной подгруппы. Так как из нильпотентности G' следует, очевидно, нильпотентность B, то, применяя лемму 1.8, получаем, что B есть нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-рядом. Из полноты любой бикомпактной группы и единственности вейлевского пополнения вытекает, что $\overline{G}$ совпадает с B и является, таким образом, нильпотентной бикомпактной группой с конечным p-рядом.

Обратно, всякая бикомпактная группа $\overline{G}$ с конечным p-рядом содержит всюду плотную подгруппу G с конечным числом образующих (см. 1.2). Из леммы 1.5 следует, что $\overline{G}$ обладает последовательностью открытых инвариантных подгрупп $\overline{G}_1 \supseteq \overline{G}_2 \supseteq \ldots$, составляющих полную систему окрестностей единицы и таких, что все факторы $\overline{G}/\overline{G}_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ являются конечными p-группами. Но тогда нормальные делители $G_i = G \cap \overline{G}_i$ составляют полную систему окрестностей единицы группы G, а определяемые ими фактор-группы G/G_i также являются конечными p-группами. Из полноты группы $\overline{G}$ и единственности вейлевского пополнения следует, что $\overline{G}$ совпадает с вейлевским пополнением группы G. Поскольку факторы G/G_i являются p-группами, это означает, что $\overline{G}$ является (собственным) p-замыканием группы G. Если при этом группа $\overline{G}$ нильпотентна, то нильпотентной является также и группа G. Теорема доказана.

3.4.1. Замечание. Легко видеть, что всякая нильпотентная группа с конечным числом образующих обладает конечным нормальным рядом с циклическими факторами. Уточняя приведенные выше рассуждения, можно показать, что p-замыкание всякой (а не только нильпотентной) абстрактной группы, обладающей конечным нормальным рядом с циклическими факторами, является бикомпактной группой с конечным p-рядом.

3.5. ТЕОРЕМА. *Любое p-замыкание абстрактной нильпотентной группы G с конечным числом образующих топологически изоморфно некоторой фактор-группе ее канонического p-замыкания.*

Доказательство. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ есть каноническая p-последовательность группы G, а $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ — ее произвольная p-последовательность (см. 3.1.1). Обозначим через A пересечение всех членов первой последовательности, а через B — пересечение всех членов второй последовательности. Являясь нильпотентной p-группой с конечным числом образующих, каждая из групп G/B_i $(i = 1, 2, \ldots)$ конечна. Поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots$ найдется такой номер $j = j(i)$, что $A_j \subseteq B_i$. Отсюда следует, в частности, что $A \subseteq B$. Кроме того, естественный гомоморфизм φ группы $G' = G/A$ на группу $G'' = G/B$ будет, очевидно, непрерывным, если в качестве полных систем окрестностей единиц в группах G' и G'' выбрать системы подгрупп $\{G/A_i\}$ и $\{G/B_i\}$ соответственно.

Далее, любой элемент вейлевского пополнения $\overline{G'}$ группы G' является пределом некоторой фундаментальной последовательности элементов из G'. Будучи непрерывным, гомоморфизм φ переводит всякую фундаментальную последовательность элементов из G' в фундаментальную последовательность элементов из G''. Но в вейлевском пополнении $\overline{G''}$ группы G'' каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Используя по существу те же рассуждения, которые проводят при доказательстве свойства максимальности пополнения [см. ([7]), теорема 13], легко доказать продолжаемость гомоморфизма φ до непрерывного гомоморфизма ψ группы $\overline{G'}$ в группу $\overline{G''}$. Из леммы 3.3 и конечности фактор-групп G/A_i и G/B_i $(i = 1, 2, \ldots)$ вытекает бикомпактность групп $\overline{G'}$ и $\overline{G''}$. Подгруппа $\psi(\overline{G'})$ группы $\overline{G''}$ бикомпактна и содержит G'', что означает, ввиду единственности вейлевского пополнения, совпадение этой подгруппы со всей группой $\overline{G''}$. Таким образом, ψ есть гомоморфизм «на». Кроме того, как и всякий непрерывный гомоморфизм бикомпактной группы, гомоморфизм ψ открыт. Следовательно, группа $\overline{G''}$ изоморфна некоторой фактор-группе группы $\overline{G'}$, что и требовалось доказать.

3.5.1. Замечание. Из доказательства теоремы 3.5 следует, что она остается справедливой для всех групп, не имеющих бесконечных фактор-групп, которые являлись бы абстрактными p-группами, в частности, для разрешимых групп с конечным числом образующих.

3.5.2. Легко видеть, что все собственные p-замыкания бесконечной циклической группы изоморфны аддитивной группе целых p-адических чисел. В частности, все такие замыкания изоморфны между собой. Однако уже для прямого произведения двух бесконечных циклических групп существует бесконечное множество попарно неизоморфных собственных p-замыканий.

Действительно, пусть $\overline{G} = A \times B$, где A — любая конечная циклическая p-группа с образующим элементом g, а B — аддитивная группа целых p-адических чисел. Подгруппа $G \subset \overline{G}$ с образующими $e \times 1$ и $g \times \alpha$, где e — единичный элемент из A, а α — любое нерациональное целое p-адическое число, разлагается в абстрактном смысле в прямое произведение двух бесконечных циклических групп и, как легко видеть, всюду плотна в $\overline{G}$. Но тогда, как и в доказательстве теоремы 3.4,

нетрудно показать, что $\overline{G}$ является собственным p-замыканием группы G. Поскольку A может быть любой конечной циклической p-группой, мы получили бесконечно много неизоморфных p-замыканий прямого произведения двух бесконечных циклических групп. Ясно также, что каноническое p-замыкание такого произведения изоморфно прямому произведению двух экземпляров аддитивной группы целых p-адических чисел.

3.6. Хорошо известно, что всякая нильпотентная группа с конечным числом образующих изоморфна фактор-группе некоторой нильпотентной группы без кручения с конечным числом образующих. Но тогда, перефразируя первую часть доказательства теоремы 3.5, легко показать, что произвольные p-замыкания любых абстрактных нильпотентных групп с конечным числом образующих топологически изоморфны фактор-группам канонических p-замыканий нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих. Имея в виду это обстоятельство, оставшуюся часть § 3 мы посвятим более детальному изучению канонических p-замыканий абстрактных нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих.

3.6.1. Из леммы § 2 работы А. И. Мальцева ([12]) легко вывести, что канонические p-замыкания абстрактных нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих всегда являются собственными.

3.7. ТЕОРЕМА. *Каноническое p-замыкание любой абстрактной нильпотентной группы без кручения с конечным числом образующих является нильпотентной бикомпактной группой с конечным p-адическим рядом, алгебра Ли которой имеет в подходящем базисе рациональные структурные константы. Обратно, любая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом, алгебра Ли которой имеет в каком-либо базисе рациональные структурные константы, является каноническим p-замыканием некоторой абстрактной нильпотентной группы без кручения с конечным числом образующих.*

Доказательство. Пусть G есть произвольная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих. В группе G существует такой конечный ряд нормальных делителей

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_m = G$$

и такая конечная система элементов $g_1 \in G_1, \ldots, g_m \in G_m$ (канонический базис), что любой элемент из $G_i (i = 1, \ldots, m)$ одним и только одним способом записывается в виде произведения $g_1^{n_1} \ldots g_i^{n_i}$ с целыми рациональными показателями $n_1, \ldots, n_i$ [см. ([11]), лемма 4]. Из результатов А. И. Мальцева [см. ([11]), § 3,4 и ([12]), § 3] следует, что группу G можно включить в группу Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. 2.1) некоторой нильпотентной алгебры Ли A конечного ранга над полем F рациональных чисел так, что элементы $g_1, \ldots, g_i$ составят базис некоторого идеала A_i алгебры $A (i = 1, \ldots, m;\ A_m = A)$. Расширяя поле F до поля F_p p-адических чисел, мы получим из A некоторую нильпотентную алгебру Ли B над F_p, имеющую тот же базис $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Ясно, что структурные константы алгебры B в этом базисе рациональны и для любого $i = 1, \ldots, m$ элементы $g_1, \ldots, g_i$ составляют базис некоторого идеала B_i алгебры B.

Вместе с тем группа G оказывается вложенной в группу Кэмпбелла — Хаусдорфа алгебры B, которую мы будем обозначать через H.

Легко видеть, что множества B_i представляют собою нормальные делители группы H, которые, как и сама группа H, являются нильпотентными группами с неограниченной и однозначной извлекаемостью корня. Используя это обстоятельство, лемму 2.3 из ([6]), а также очевидные свойства формулы Кемпбелла — Хаусдорфа, нетрудно показать, что для любого элемента $g \in H$ и любого $i = 1, \ldots, m$ множества $B_i + g$ и $B_i g$ совпадают. Но тогда с помощью индукции по i немедленно получаем, что любой элемент из B_i одним и только одним способом записывается в виде произведения $(\alpha_1 g_1) \ldots (\alpha_i g_i)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in F_p$, а $i = 1, \ldots, m$. В частности, любой элемент h из группы $H = B_m$ допускает однозначную запись вида

$$h = (\alpha_1 g_1) \ldots (\alpha_m g_m) \text{ с } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F_p. \tag{1}$$

Условимся множество всех элементов из H, имеющих вид αg_i, обозначать через $V_{i,k}$, если α пробегает все целые p-адические числа с логарифмической нормой $\geqslant k$, и через $W_{i,k}$, если α пробегает все целые рациональные числа, делящиеся на p^k $(i = 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots)$. Принимая систему множеств

$$U_k = \sum_{i=1}^{m} V_{i,k}$$

$$(k = 0, 1, \ldots)$$

за полную систему окрестностей нуля в B, мы вводим в B естественную топологизацию и превращаем тем самым H в топологическую группу, точнее, в нильпотентную группу Ли конечного ранга над полем p-адических чисел (см. 2.1).

Наряду с множествами U_k рассмотрим также множества

$$V_k = \prod_{i=1}^{m} V_{i,k}$$

и

$$W_k = \prod_{i=1}^{m} W_{i,k},$$

где $k = 0, 1, \ldots$, а умножение понимается в смысле формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа. Ввиду выбора элементов $g_1, \ldots, g_m$ множество W совпадает с G. Ясно также, что множество V_0 бикомпактно и содержит $W_0 = G$ в качестве всюду плотного подмножества. Будучи замкнутым, множество V_0 совпадает с замыканием группы G в H и, следовательно, является (бикомпактной) подгруппой группы H. При помощи леммы 2.3 из ([6]) легко установить тождественную формулу

$$a + b = (a + L_{a,b})\, b, \tag{2}$$

справедливую для любой пары элементов a, b из любой нильпотентной алгебры Ли над полем нулевой характеристики, класс нильпотентности которой не превосходит некоторого произвольного фиксированного числа.

В этой формуле умножение справа понимается в смысле формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, а через $L_{a,b}$ обозначена линейная комбинация лиевских коммутаторов от элементов a, b, причем коэффициенты этой комбинации, а также число и строение входящих в нее коммутаторов не зависят от выбора a и b.

Из формулы (2) с помощью индукции по рангу m алгебры B легко вывести, что каждое из множеств V_k содержит некоторую окрестность нуля алгебры B или, что то же самое, окрестность единицы ее группы Кэмпбелла — Хаусдорфа H. С другой стороны, из определения множеств V_k и непрерывности групповой операции в H вытекает также, что любая окрестность единицы в H содержит почти все члены последовательности $V_0 \supset V_1 \supset \ldots$. Поэтому, принимая в качестве полной системы обобщенных (не обязательно открытых) окрестностей единицы в H систему множеств $\{V_k;\ k = 0,1, \ldots\}$, мы не изменим топологии в группе H. Как уже отмечалось выше, любой элемент $h \in H$ однозначно представим в виде (1). Из способа же выбора элементов $g_1, \ldots, g_m$ следует, что h тогда и только тогда содержится в G, когда все коэффициенты α_i его разложения по формуле (1) — целые рациональные. Это означает, в свою очередь, что для любого $k = 0,1, \ldots$ справедлива формула

$$V_k \cap G = W_k. \tag{3}$$

Обозначим через $G = P_0 \supset P_1 \supset \ldots$ каноническую p-последовательность группы G (P_k есть подгруппа, порожденная p^k-ми степенями элементов группы G). Ясно, что

$$W_k \subset P_k \quad (k = 0,1, \ldots). \tag{4}$$

Вместе с тем в любой окрестности V_k группы V_0 содержится открытый бикомпактный нормальный делитель Q_k группы V_0 такой, что факторгруппа V_0/Q_k есть конечная p-группа (теорема 2.6 и лемма 1.5). Но тогда $P_k = G \cap Q_k$ есть содержащийся в W_k открытый в G нормальный делитель, фактор-группа G/R_k по которому также является конечной p-группой. Поэтому найдется такое натуральное число $n = n(k)$, что $P_n \subset R_k \subset W_k$. Последнее включение вместе с включением (4) и равенством (3) показывает, что топология, индуцируемая на G топологией группы $V_0 \subset H$, совпадает с топологией, которая получается, если принять в качестве полной системы окрестностей единицы в группе G ее каноническую p-последовательность. Таким образом, V_0 является каноническим p-замыканием группы G. Группа V_0 обладает конечным p-адическим рядом (теорема 2.6). Кроме того, как было показано выше, V_0 содержит окрестность единицы и является, следовательно, открытой в H подгруппой. Поэтому ее алгеброй Ли служит алгебра B (см. 2.4.3 и 2.4.1), имеющая в базисе $\{g_1, \ldots, g_m\}$ рациональные структурные константы. Так как каноническое p-замыкание любой абстрактной группы единственно, то тем самым доказательство теоремы в одну сторону завершено. Попутно нами передоказана теорема вложения 2.2 для частного случая канонических p-замыканий нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих.

Обратно, пусть V есть нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом, алгебра Ли которой имеет в некотором базисе рациональные структурные константы. Это означает (см. 2.4.1 и 2.4.3), что V можно считать открытой подгруппой группы Кэмпбелла — Хаусдорфа H некоторой естественно топологизированной нильпотентной алгебры Ли B конечного ранга над полем F_p p-адических чисел, обладающей в каком-либо базисе M рациональными структурными константами. Иначе говоря, в алгебре B всюду плотна некоторая нильпотентная алгебра Ли A над полем F рациональных чисел, имеющая тот же базис M. Ясно, что множество A является вместе с тем всюду плотной подгруппой группы H, а подгруппа $C = A \cap V$ всюду плотна в V.

Группа C является объединением последовательности своих подгрупп $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$, имеющих конечные числа образующих. Вместе с тем легко показать (см. 4.1.1), что любая возрастающая цепочка замкнутых подгрупп группы V стабилизируется через конечное число шагов. Поэтому найдется такой номер k, что замыкание $\overline{C}_k$ подгруппы C_k в группе V совпадает с замыканиями всех C_n, имеющих номера $n > k$. Это возможно, очевидно, лишь в том случае, когда $\overline{C}_k = V$. Таким образом, в V всюду плотна подгруппа $C_k = G$ с конечным числом образующих. Обозначим через $g_1, \ldots, g_m$ какой-либо канонический базис этой подгруппы. Ясно, что мальцевское пополнение (в группе H) группы G совпадает с A, ибо иначе V содержалась бы в группе Кэмпбелла — Хаусдорфа некоторой собственной подалгебры алгебры B и не могла бы поэтому быть открытой в группе H. Но тогда, как и выше, заключаем, что элементы $g_1, \ldots, g_m$ составляют некоторый базис алгебр A и B. Применяя рассуждения, уже употреблявшиеся при доказательстве первой части теоремы, приходим к выводу, что V является каноническим p-замыканием группы G. Поскольку группа G имеет конечное число образующих и является, очевидно, нильпотентной группой без кручения, то теорема доказана.

3.7.1. Следствие. Канонические p-замыкания нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих не содержат нетривиальных элементов конечного порядка.

3.7.2. Как следует из рассмотрения примеров п.3.5.2, соответствующее предложение в случае произвольных p-замыканий и даже произвольных собственных p-замыканий нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих уже не имеет места.

3.7.3. Нетрудно построить пример нильпотентной алгебры Ли конечного ранга над полем p-адических чисел, не имеющей базиса с рациональными структурными константами (такой пример фактически построен в ([11])). Ввиду теоремы 3.7 и следствия 2.6.1, это означает, что существуют нильпотентные бикомпактные группы с конечными p-адическими рядами, не являющиеся каноническими p-замыканиями абстрактных нильпотентных групп с конечным числом образующих.

Из теорем 3.7, 3.4 и замечания 3.6 вытекает справедливость следующего предложения:

3.8. ТЕОРЕМА. *Любая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-рядом (в частности, любая конечная p-группа) топологически*

изоморфна фактор-группе некоторой нильпотентной бикомпактной группы с конечным p-адическим рядом.

3.8.1. Обратно, любая фактор-группа нильпотентной бикомпактной группы с конечным p-адическим рядом является нильпотентной бикомпактной группой с конечным p-рядом (см. лемму 1.4).

3.9. Пусть G есть произвольная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих. Выберем, подобно тому как это делалось в доказательстве теоремы 3.7, какой-либо канонический базис $g_1, \ldots, g_k$ этой группы. Каждый элемент $g \in G$ одним и только одним способом записывается в виде произведения $g = g_1^{n_1} \ldots g_k^{n_k}$ с целыми рациональными показателями $n_1, \ldots, n_k$. Поэтому множество элементов группы G может быть отождествлено с множеством строк из k целых рациональных чисел. Произведение двух таких строк $(n_1, \ldots, n_k)$ и $(m_1, \ldots, m_k)$ есть некоторая третья строка $(t_1, \ldots, t_k)$, элементы которой задаются формулами

$$t_i = n_i + m_i + f_i(n_{i+1}, \ldots, n_k;\ m_{i+1}, \ldots, m_k) \qquad (1)$$
$$(i = 1, \ldots, k),$$

причем функции f_i, входящие в эти формулы, являются целозначными полиномами с рациональными коэффициентами [см. ([11]), § 2].

Из доказательства теоремы 3.7 следует теперь, что каноническое p-замыкание $\overline{G}$ группы G может быть отождествлено с естественным образом топологизированным множеством строк из k целых p-адических чисел, закон умножения которых задается теми же самыми формулами (1). При этом группа G, рассматриваемая как подгруппа группы $\overline{G}$, отождествляется с множеством тех строк из $\overline{G}$, элементы которых являются целыми рациональными числами. Ясно также, что p-адическое пополнение H группы $\overline{G}$ (см. 2.4.1) может быть отождествлено с естественно топологизированным множеством строк из k произвольных p-адических чисел, причем закон умножения таких строк задается все теми же формулами (1).

3.9.1. Используя лемму 1.7 и теорему 2.2, нетрудно получить аналогичные результаты для произвольной нильпотентной бикомпактной группы $\overline{G}$ с p-адическим рядом любой конечной длины k. А именно, группа $\overline{G}$ может быть отождествлена с естественно топологизированным множеством строк из k целых p-адических чисел так, что закон умножения задается формулами вида (1) из 3.9, где функции f_i являются полиномами с p-адическими коэффициентами, принимающими при всех целых p-адических значениях аргументов целые p-адические значения.

3.9.2. Замечание. Канонические p-замыкания двух неизоморфных абстрактных нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих могут оказаться изоморфными. В самом деле, фиксируем какое-либо натуральное число n и рассмотрим множество G упорядоченных троек (a, b, c) произвольных целых рациональных чисел a, b, c. Вводя операцию умножения таких троек по формуле

$$(a, b, c)\cdot(a_1, b_1, c_1) = (a + a_1, b + b_1, c + c_1 + nba_1),$$

мы превратим множество G в абстрактную нильпотентную группу без кручения с конечным числом образующих, которую будем обозначать через $G(n)$. Легко видеть, что при $n > 1$ группы $G(n)$ и $G(1)$ неизоморфны. Вместе с тем при любом $n > 0$ подмножество $G_n(n)$ группы $G(n)$, состоящее из всех строк вида (a, b, nc), является подгруппой, изоморфной группе $G(1)$. Если теперь p есть некоторое простое число, взаимно простое с n, то, как вытекает из п.3.9, в каноническом p-замыкании $\overline{G}(n)$ группы $G(n)$ всюду плотна не только подгруппа $G(n)$, но и подгруппа $G_n(n)$. Из того же п. 3.9 и теоремы 3.7 следует, что любой канонический базис (см. 3.7) группы $G_n(n)$ будет являться базисом алгебры Ли p-адического пополнения группы $\overline{G}(n)$, в котором эта алгебра имеет рациональные структурные константы. Но тогда, применяя те же рассуждения, которые применялись при доказательстве теоремы 3.7, легко показать, что группу $\overline{G}(n)$ можно рассматривать также как каноническое p-замыкание группы $G_n(n)$.

3.10. Пусть G есть снова произвольная абстрактная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих. Выбирая какой-либо канонический базис в G, мы можем отождествить каноническое p-замыкание $\overline{G}$ группы G с естественно топологизированным множеством строк целых p-адических чисел так, что G совпадает с множеством тех строк из $\overline{G}$, элементы которых являются целыми рациональными числами (см. 3.9). Множество G' всех строк из $\overline{G}$, элементами которых служат произвольные рациональные числа (со знаменателем, не делящимся на p), является, очевидно, подгруппой группы $\overline{G}$. Рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 3.7, оказываются применимыми и в этом случае, вследствие чего группа $\overline{G}$ может рассматриваться также как каноническое p-замыкание группы G'.

Опираясь на приводимое ниже следствие 3.10.4, легко показать, что группу G' можно отождествить с минимальной подгруппой мальцевского пополнения G^* группы G, обладающей тем свойством, что уравнение $x^n = g$ имеет решение $x \in G'$ для любого элемента $g \in G'$ и любого целого рационального числа n, взаимно простого с p. Называя группу G' $\pi(p)$-пополнением группы G и замечая, что все $\pi(p)$-пополнения группы G изоморфны (см. доказательство теоремы 6 из ([12])), на основании единственности канонического p-замыкания приходим к следующему предложению.

3.10.1. ТЕОРЕМА. *Канонические p-замыкания двух абстрактных нильпотентных групп без кручения с конечным числом образующих топологически изоморфны, если эти группы обладают абстрактно изоморфными $\pi(p)$-пополнениями.*

3.10.2. Для произвольного множества π простых чисел назовем абстрактную группу G π-полной, если для любого целого рационального числа n, все простые делители которого лежат в π, и любого элемента $g \in G$ уравнение $x^n = g$ имеет решение в G.

3.10.3. ЛЕММА. *Пусть π — любое множество простых чисел, G — абстрактная нильпотентная группа без кручения, A — ее π-полный нормальный делитель. Пусть, далее, n — целое рациональное число, все простые делители которого содержатся в π. Тогда, если уравнение $x^n = gA$*

имеет решение в группе G/A, то уравнение $x^n = ga$ имеет решение в группе G для любого a.

Доказательство. По условию, существует элемент $b \in G$ такой, что $b^n = gaa_b^n$, где $a_b \in A$. Будем считать элемент b выбранным так, чтобы элемент a_b содержался в гиперцентре Z_k группы G (члене верхнего центрального ряда группы G) с наименьшим возможным номером k. Покажем, что элемент a_b совпадает в таком случае с единицей e группы G.

Действительно, предполагая противное, имеем $k > 0$ и, полагая $b_1 = ba_b^{-1}$, приходим к равенству:

$$b_1^n = b^n a_b^{-1} c = gac, \quad c \in A \cap Z_{k-1}. \tag{1}$$

Ввиду π-полноты группы A, существует элемент $d \in A$ такой, что $d^n = c$, а ввиду изолированности гиперцентров в нильпотентных группах без кручения [см. ([10]), стр. 429], $d \in Z_{k-1}$. Но тогда из равенства (1) получаем соотношение $b_1^n = gad^n$ с $d \in Z_{k-1} \cap A$, что противоречит выбору элемента b (минимальности номера k). Следовательно, $a_b = e$, а $b^n = ga$, что и требовалось доказать.

3.10.4. Следствие. Если (абстрактная) нильпотентная группа G без кручения имеет π-полный нормальный делитель такой, что факторгруппа G/A π-полна, то G также является π-полной группой.

3.10.5. Замечание. Нетрудно показать, что лемма 3.10.3 и следствие 3.10.4 остаются справедливыми для произвольных локально нильпотентных групп без кручения.

§ 4. Разрешимые и нильпотентные локально бикомпактные группы с условием максимальности для замкнутых подгрупп

4.1. Говорят, что топологическая группа G удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп, если любая возрастающая цепь замкнутых подгрупп группы G стабилизируется через конечное число шагов. Легко видеть, что любая фактор-группа и любая (не обязательно замкнутая) подгруппа топологической группы, удовлетворяющей условию максимальности для замкнутых подгрупп, также удовлетворяют этому условию.

Пусть G — любая топологическая группа, N — ее замкнутый нормальный делитель, $A \subseteq B$ — любая пара вложенных друг в друга подгрупп группы G. Тогда, если $A \neq B$, то либо $A \cap N \neq B \cap N$, либо $AN \neq BN$ [см. ([10]), стр. 340—341]. Если вдобавок подгруппы A и B замкнуты, а нормальный делитель N открыт в G или бикомпактен, то множества $A \cap N$, $B \cap N$, AN, BN являются замкнутыми подгруппами группы G. Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

4.1.1. ЛЕММА. *Пусть N — открытый или бикомпактный нормальный делитель топологической группы G. Тогда, если группы N и G/N удовлетворяют условию максимальности для замкнутых подгрупп, то группа G также удовлетворяет этому условию.*

4.1.2. ЛЕММА. *Любая топологическая группа G, удовлетворяющая условию максимальности для замкнутых подгрупп, обладает всюду плотными подгруппами с конечным числом образующих.*

Доказательство. Пусть g_1 есть любой элемент группы G, G_1 — замыкание порожденной им циклической подгруппы. Если $G_1 \neq G$, то выбираем элемент $g_2 \in G_1$ и обозначаем через G_2 замыкание подгруппы, порожденной элементами g_1 и g_2. Ясно, что $G_1 \subset G_2$ и $G_1 \neq G_2$. Продолжая подобным образом, найдем, ввиду условия максимальности, такую конечную систему элементов, что замыкание порожденной ими подгруппы совпадает с G.

4.1.3. Следствие. Локально разрешимая локально нильпотентная топологическая группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп разрешима (соответственно нильпотентна).

В самом деле, по определению, в локально разрешимой локально нильпотентной группе разрешимы (соответственно нильпотентны) все подгруппы с конечным числом образующих. Но, как нетрудно видеть, замыкание разрешимой (нильпотентной) подгруппы в произвольной топологической группе является снова разрешимой (соответственно нильпотентной) подгруппой.

4.2. ЛЕММА. *Локально бикомпактная группа G с условием максимальности для замкнутых подгрупп вполне несвязна.*

Доказательство. Если бы связная компонента K единицы группы G была отлична от единичной подгруппы $\{e\}$, то она обладала бы нетривиальной фактор-группой K/N, являющейся связной группой Ли [см. ([15]), теорема 5]. Но всякая связная группа Ли положительной размерности обладает нетривиальными однопараметрическими подгруппами, которые не удовлетворяют, очевидно, условию максимальности для замкнутых подгрупп. Поэтому случай $K \neq \{e\}$ исключен и, следовательно, группа G вполне несвязна.

4.3. ЛЕММА. *Любая недискретная разрешимая локально бикомпактная группа G, удовлетворяющая условию максимальности для замкнутых подгрупп, обладает недискретными бикомпактными нильпотентными нормальными делителями.*

Доказательство. Будучи разрешимой, группа G обладает конечным рядом замкнутых нормальных делителей

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$$

с абелевыми факторами A_i/A_{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$. Каждый из факторов A_i/A_{i-1} удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп и обладает поэтому единственной максимальной бикомпактной подгруппой D_i/A_{i-1}. Ясно, что эта подгруппа инвариантна в G/A_{i-1}. Группы A_i/A_{i-1} локально бикомпактны и вполне несвязны (лемма 4.2); ясно также, что хотя бы одна из этих групп, например A_j/A_{j-1}, недискретна. Но тогда соответствующая группа D_j/A_{j-1} является абелевым бикомпактным недискретным [см. ([13]), теорема 16] нормальным делителем группы G/A_j. Существует поэтому такой номер k, что группа G, A_k обладает недискретными нильпотентными бикомпактными нормальными

делителями, а группы G/A_i при $i<k$ такими нормальными делителями не обладают. Если $k=0$, то лемма доказана. Покажем, что предположение $k>0$ приводит к противоречию. В самом деле, не нарушая общности, можно предполагать в этом случае, что $k=1$. Иначе говоря, в группе G/A_1 имеется недискретный нильпотентный бикомпактный нормальный делитель B_1/A_1, в то время как группа G таких нормальных делителей не имеет.

Группа B_1 является недискретным замкнутым нормальным делителем группы G. Централизатор C подгруппы A_1 в группе B_1 также, очевидно, замкнут и инвариантен в G. Группа A_1 дискретна, ибо в противном случае ее максимальная бикомпактная подгруппа была бы недискретным абелевым бикомпактным нормальным делителем группы G. Но тогда A_1 имеет, очевидно, конечное число образующих (см. 4.1.2). Любой неединичный элемент фактор-группы B_1/C_1 индуцирует нетождественный автоморфизм группы A_1 и поэтому не может переводить каждый элемент некоторой фиксированной системы M образующих этой группы в себя. Так как система M может быть выбрана конечной, то отсюда следует дискретность группы B_1/C. Поэтому группа C не может быть дискретной. Вместе с тем группа C нильпотентна, ибо подгруппа A_1 содержится в ее центре, а фактор-группа C/A нильпотентна. Но тогда все бикомпактные элементы из C составляют подгруппу B [см. ([5]), теорема 1], которая, очевидно, инвариантна в G. Группа B, как содержащая всюду плотную подгруппу с конечным числом образующих (лемма 4.12), является бикомпактной [см. ([5]), лемма 2]. Так как группа C локально бикомпактна и вполне несвязна (лемма 4.2), то фактор-группа C/B дискретна и, следовательно, инвариантная в G нильпотентная бикомпактная подгруппа B недискретна, что противоречит исходному предположению. Таким образом, $k=0$, и лемма доказана.

4.3.1. Замечание. Проводя некоторые дополнительные рассмотрения, можно показать, что группа G, удовлетворяющая условию леммы 4.3, обладает не только нильпотентными, но и абелевыми недискретными бикомпактными нормальными делителями. Однако это обстоятельство в дальнейшем не используется.

4.4. ТЕОРЕМА. *Любая разрешимая локально бикомпактная группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп является расширением разрешимой бикомпактной группы с условием максимальности для замкнутых подгрупп посредством дискретной разрешимой группы с условием максимальности для подгрупп. Обратно, всякое такое расширение представляет собою разрешимую локально бикомпактную группу с условием максимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть группа G разрешима, локально бикомпактна и удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп. Ввиду условия максимальности, в G имеется бикомпактный нормальный делитель A, не содержащийся ни в каком большем бикомпактном нормальном делителе этой группы. Поскольку расширение бикомпактной группы посредством бикомпактной группы снова бикомпактно, фактор-группа G/A не имеет нетривиальных бикомпактных нормальных делителей. Ясно также, что группы A и G/A разрешимы и удовлетво-

ряют условию максимальности для замкнутых подгрупп. Но тогда, ввиду леммы 4.3, группа G/A дискретна.

Обратно, если в топологической группе G имеется разрешимый бикомпактный нормальный делитель A, удовлетворяющий условию максимальности для замкнутых подгрупп, а фактор-группа G/A дискретна, разрешима и удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то группа G, очевидно, локально бикомпактна, разрешима и удовлетворяет, ввиду леммы 4.1.1, условию максимальности для замкнутых подгрупп.

4.5. ЛЕММА. *Любая коммутативная локально бикомпактная группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп разлагается в конечную прямую сумму дискретных циклических подгрупп и подгрупп, топологически изоморфных аддитивным группам целых p-адических чисел* ($p = 2, 3, 5, \ldots$).

Действительно, из теоремы 4.4 вытекает, что подгруппа A всех бикомпактных элементов группы G бикомпактна и открыта в G. Но тогда A служит в G прямым слагаемым [см. ([3]), следствие 5 теоремы 21]: $G = A + B$. Группа B, очевидно, дискретна и удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, поэтому она разлагается в прямую сумму конечного числа своих дискретных циклических подгрупп. Группа характеров A^* группы A есть дискретная коммутативная группа с условием минимальности для подгрупп, т. е. конечная прямая сумма квазициклических и конечных циклических групп [см. ([10]), стр. 341]. Поэтому группа A разлагается в конечную прямую сумму конечных циклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивным группам целых p-адических чисел ($p = 2, 3, 5, \ldots$). Объединяя прямые разложения групп A и B, получим требуемое прямое разложение группы G.

4.5.1. Обратно, поскольку аддитивные группы целых p-адических чисел и циклические группы удовлетворяют условию максимальности для замкнутых подгрупп, получим, на основании леммы 4.1.1, что любая конечная прямая сумма дискретных циклических групп и групп, топологически изоморфных аддитивным группам целых p-адических чисел, удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп.

Из теоремы 4.4, лемм 4.5, 4.1.1 и п. 4.5.1 непосредственно вытекает следующее предложение:

4.6. ТЕОРЕМА. *Топологическая группа G тогда и только тогда является разрешимой локально бикомпактной группой с условием максимальности для замкнутых подгрупп, когда она обладает конечным нормальным рядом*

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

все факторы которого топологически изоморфны аддитивным группам целых p-адических чисел ($p = 2, 3, 5, \ldots$) *или дискретным циклическим группам, причем p-адические факторы предшествуют всем бесконечным циклическим факторам.*

4.6.1. Следствие. Разрешимая локально бикомпактная p-группа тогда и только тогда удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп, когда она является бикомпактной группой с конечным p-рядом (см. 1.1).

Для случая нильпотентных групп возможно дальнейшее уточнение полученных результатов:

4.7. ТЕОРЕМА. *Любая нильпотентная локально бикомпактная группа G с условием максимальности для замкнутых нормальных делителей обладает конечным центральным рядом*

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n =$$

$$= C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = G,$$

где фактор-группы A_i / A_{i-1} $(i = 1, \ldots, k)$ — конечные циклические, фактор-группы B_j / B_{j-1} $(j = 1, \ldots, m)$ топологически изоморфны аддитивным группам целых p-адических чисел по некоторым (не обязательно различным) простым p, а фактор-группы C_s / C_{s-1} $(s = 1, \ldots, n)$ — бесконечные дискретные циклические группы.

Доказательство. Обозначим через P нормальный делитель группы G, составленный из всех элементов конечного порядка этой группы. Известно [см. ([14]), § 1, лемма 2], что в нильпотентных группах пересечение любого неединичного нормального делителя с центром группы также отлично от единицы. Поэтому, если $P \neq \{e\}$, то в центре группы G найдется нетривиальная конечная циклическая подгруппа A_1. Так как всякая конечная подгруппа замкнута в G, то можно перейти к факторгруппе. Если эта фактор-группа обладает нетривиальными элементами конечного порядка, то в ее центре снова выделим конечную циклическую подгруппу A_2 / A_1. Продолжая подобным образом, получим возрастающую последовательность замкнутых нормальных делителей

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots,$$

составляющих возрастающую центральную цепь группы G и таких, что фактор-группы A_i / A_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots)$ — конечные циклические. Ввиду условия максимальности, в этом ряде найдется такой нормальный делитель $A_k = B_0$, что фактор-группа $G' = G / B_0$ не содержит отличных от единицы элементов конечного порядка. Однако эта группа может содержать еще нетривиальные бикомпактные элементы, т. е. элементы, содержащиеся в бикомпактных подгруппах. Множество всех бикомпактных элементов группы G' представляет собою замкнутый нормальный делитель [см. ([5]), теоремы 1 и 2], который мы обозначим через Q'. Если нормальный делитель Q' нетривиален, то нетривиально и его пересечение с центром Z' группы G'. А тогда из леммы 4.5 легко выводится, что группа Z' имеет замкнутый в G' прямой множитель $B_1' = B_1 / B_0$, топологически изоморфный аддитивной группе целых p-адических чисел, по какому-либо p и такой, что фактор-группа Z' / B_1' не имеет отличных

от единицы элементов конечного порядка. Поскольку группа G'/Z' также не имеет нетривиальных элементов конечного порядка [см. ([12]), теорема 2], то то же самое справедливо и для группы $G'/B_1' \cong G/B_1$. Продолжая подобным же образом, получим возрастающую цепочку замкнутых нормальных делителей группы G:

$$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots,$$

составляющую вместе с построенными ранее нормальными делителями A_i возрастающую центральную цепь группы G и такую, что фактор-группы G/B_{j-1} не содержат нетривиальных элементов конечного порядка, а фактор-группы B_j/B_{j-1} $(j = 1, 2, \ldots)$ изоморфны аддитивным группам целых p-адических чисел. Ввиду условия максимальности, найдется такой номер m, что фактор-группа $G'' = G/B_m$ не содержит нетривиальных бикомпактных элементов. Будучи, кроме того, вполне несвязной (лемма 4.2), нильпотентная группа G'' является дискретной группой без кручения [см. ([5]), теорема 3]. Ввиду условия максимальности для нормальных делителей, выполняющегося, очевидно, в группе G'', ее центр Z'' имеет конечное число образующих. Кроме того, G''/Z'' есть группа без кручения [см. ([12]), теорема 2]. Поэтому в Z'' существует такая бесконечная дискретная циклическая подгруппа $C_1' = C_1/B_m$, что фактор-группа $G''/C_1' \cong G/C_1$ есть снова дискретная нильпотентная группа без кручения. Теперь ясно, что построенная ранее возрастающая центральная цепь

$$\{e\} = A_0 \subset \ldots \subset A_k = B_0 \subset \ldots \subset B_m = C_0$$

группы G может быть дополнена новыми нормальными делителями $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$, определяющими бесконечные дискретные циклические фактор-группы C_i/C_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots)$, причем эта цепь не стабилизируется прежде, чем достигнет группы G. Ввиду условия максимальности найдется такой номер n, что $C_n = G$, чем и завершается доказательство теоремы.

4.7.1. Замечание. Из леммы 4.1.1 легко следует, что предложение, обратное теореме 4.7, также справедливо.

4.7.2. Следствие. Для нильпотентных локально бикомпактных групп условие максимальности для замкнутых нормальных делителей и условие максимальности для замкнутых подгрупп эквивалентны между собой.

Это предложение обобщает аналогичный результат, установленный ранее для дискретных нильпотентных групп [см. ([9])].

4.8. Теорема 4.4 показывает, что изучение разрешимых, а следовательно, и нильпотентных локально бикомпактных групп с условием максимальности для замкнутых подгрупп в значительной мере сводится к изучению бикомпактных групп, удовлетворяющих тем же условиям. Покажем, что нильпотентные бикомпактные группы с условием максимальности для замкнутых подгрупп в свою очередь легко конструируются из групп, изучавшихся в предыдущих параграфах.

4.9. ТЕОРЕМА. *Конечные прямые произведения нильпотентных бикомпактных групп с конечными p-рядами (по одному или нескольким простым p) и только они являются нильпотентными бикомпактными группами с условием максимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть G есть нильпотентная бикомпактная группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп. Будучи вполне несвязной (лемма 4.2), группа G разлагается в топологическое прямое произведение топологических p-групп [см. ([5]), теорема 11] и даже, ввиду условия максимальности, в конечное прямое произведение топологических p-групп. Каждый из прямых множителей G_p этого разложения является нильпотентной бикомпактной p-группой (по какому-нибудь простому числу p) с условием максимальности для замкнутых подгрупп. Из теоремы 4.6 следует теперь, что группы G_p обладают конечными p-рядами.

Обратно, из леммы 4.11 легко следует, что любая бикомпактная группа с конечным p-рядом, или конечное прямое произведение таких групп, удовлетворяют условию максимальности для замкнутых подгрупп.

4.10. ТЕОРЕМА. *Во всякой нильпотентной бикомпактной группе G с конечным p-рядом имеется однозначно определенный нормальный делитель A, являющийся конечной p-группой и такой, что фактор-группа G/A есть нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом.*

Действительно, группа G является топологической p-группой (следствие 1.5.1). Поэтому топологическими p-группами являются также факторы любого ее нормального ряда. Справедливость утверждения теоремы вытекает теперь из теоремы 4.7.

Поступило
4. VI. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G., Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. of Math., 38 (1937), 526—532.
[2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, ИЛ, 1950.
[3] Виленкин Н. Я., Теория топологических групп. II, Успехи матем. наук, 5, № 4 (38) (1950), 19—74.
[4] Глушков В. М., О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения, Матем. сборн., 30 (72), № 1 (1952), 79—104.
[5] Глушков В. М., Об одном классе некоммутативных локально бикомпактных групп, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 2 (1954), 229—232.
[6] Глушков В. М., Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями, Матем. сборн., 37 (79) : 3 (1955), 477—506.
[7] Граев М. И., Теория топологических групп. I, Успехи матем. наук, 5, № 2, (36) (1950), 3—56.
[8] Дынкин Е. Б., Нормированные алгебры Ли и аналитические группы, Успехи матем. наук, 5, № 1 (35) (1950), 135—186.
[9] Jennings S. A., A note on chain conditions in nilpotent rings and groups, Bull. Amer. Math. Soc., 50, № 10 (1944), 759—763.

[10] Курош А. Г., Теория групп, Москва, ГИТТЛ, 1953.
[11] Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 9—32.
[12] Мальцев А. И., Нильпотентные группы без кручения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 201—212.
[13] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, ГИТТЛ, 1954.
[14] Черников С. Н., К теории полных групп, Матем. сборн., 22 (64) (1948), 319—348.
[15] Jamabe H., A generalization of a theorem of Gleason. Ann. of Math., 58, № 2 (1953), 351—365.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 547—568

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

КОЛЬЦА С АННУЛЯТОРНЫМ УСЛОВИЕМ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе вводятся и изучаются кольца, у которых аннулятор всякого минимального двустороннего идемпотентного идеала является максимальным идеалом.

Введение

Если I — минимальный правый идеал произвольного ассоциативного кольца K, то ясно, что либо I нильпотентен, причем тогда $I^2 = 0$, либо I идемпотентен, т. е. $I^2 = I$. Во втором случае, как хорошо известно [см. ([23]), стр. 172], кольцо I имеет левую единицу и выделяется прямым слагаемым в K.

Если же мы рассмотрим минимальный двусторонний идеал B кольца K, то хотя идеал B также, очевидно, является либо нильпотентным, либо идемпотентным, но, в отличие от правого минимального идемпотентного идеала, двусторонний минимальный идемпотентный идеал далеко не всегда является прямым слагаемым в K. Поэтому целесообразно рассмотреть те ассоциативные кольца, у которых всякий двусторонний минимальный идемпотентный идеал выделяется прямым слагаемым, или, что то же самое, кольца, у которых аннулятор каждого двустороннего минимального идемпотентного идеала является максимальным идеалом. Такие кольца мы называем *кольцами с аннуляторным условием* или, сокращенно, A-кольцами.

A-кольца составляют тот естественный класс колец, который поддается изучению, если накладывать те или иные условия минимальности лишь на двусторонние идеалы, а не на односторонние, как это делается обычно при исследовании строения колец.

Класс A-колец очень широк. Дискретная прямая сумма простых ненулевых колец или, более обще, специальная подпрямая сумма таких колец являются, очевидно, A-кольцами. В работе показано, что полупростое кольцо в смысле Брауна — Маккоя и Сегала [см. ([7]) и ([21])] и всякое кольцо с условием минимальности для главных правых идеалов являются также A-кольцами.

В § 1 доказывается ряд общих лемм, относящихся к произвольным кольцам.

В § 2 даются два эквивалентных определения A-колец и рассматриваются примеры этих колец.

В § 3—5 устанавливается ряд результатов, относящихся к A-кольцам и полупростым кольцам в смысле Брауна — Маккоя. Основным ре-

зультатом является теорема о том, что всякое A-кольцо K с условием минимальности для главных двусторонних идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы

$$K = E \dotplus E_F^{\bullet} \dotplus F^{\bullet},$$

где E — полупростое кольцо в смысле Брауна — Маккоя, $E_F^{\bullet}$ — кольцо без нильпотентных идеалов и одновременно присоединенно-простое кольцо, а $F^{\bullet}$ — кольцо без f-регулярных идеалов, т. е. подпрямая сумма f-примитивных колец (точное определение последних понятий см. ниже).

Наконец, в § 6 рассматриваются кольца, обладающие минимальными правыми идеалами и, как приложение результатов из предыдущих параграфов, доказываются две новые теоремы о кольцах с условием минимальности для главных правых идеалов.

Краткое изложение некоторых результатов настоящей работы опубликовано раньше [см. (3)].

Автор рад высказать глубокую благодарность А. Г. Курошу за ценные замечания и советы по данной работе.

§ 1. Общие леммы

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо. Как обычно, ненулевой идеал B * назовем минимальным, если единственный идеал кольца K, строго содержащийся в B, есть нулевой идеал. Ясно, что всякий минимальный идеал B является либо нильпотентным, причем тогда уже $B^2 = 0$, либо идемпотентным, т. е. $B^2 = B$.

ЛЕММА 1. *Если B — произвольный идеал кольца K и элемент $b \in B$, то $(b)^3 \subseteq (b)_B$, где (b) и $(b)_B$, соответственно, — главные идеалы в K и B.*

Действительно,

$$(b)^3 \subseteq B(b)B = B\{nb + bx + yb + \sum x_i b y_i\} \subseteq (b)_B.$$

Следствие 1. *Всякий минимальный идемпотентный идеал B является простым кольцом.*

Действительно, пусть $b \neq 0$ и $b \in B = B^2$. Тогда

$$B = (b) = (b)^2 = (b)^3 \subseteq (b)_B \subseteq B,$$

т. е. $B = (b)_B$.

Как известно, кольцо K называется *присоединенно-простым* [см. (16) и (1)], если оно не допускает гомоморфных отображений на ненулевые кольца с единицей.

ЛЕММА 2. *В произвольном кольце K всякий минимальный идеал B является либо присоединенно-простым кольцом, либо простым кольцом с единицей.*

---

* Здесь и всюду дальше под *идеалом* следует понимать двусторонний идеал.

Действительно, ввиду следствия 1, всякий минимальный идеал является либо нильпотентным, либо простым ненулевым* кольцом без единицы, либо простым кольцом с единицей. Но как нильпотентные, так и простые кольца без единицы являются, очевидно, присоединенно-простыми кольцами.

ЛЕММА 3**. *Если в кольце K идеал B_1, рассматриваемый как кольцо, обладает единицей и содержится в некотором идеале B, то существует такой идеал B_2 кольца K, что $B = B_1 \dotplus B_2$.*

Действительно, пусть e_1 — единица идеала B_1. Заметим, сначала, что e_1 лежит в центре кольца K, так как для любого x из K

$$e_1 x = (e_1 x)\, e_1 = e_1 (x e_1) = x e_1.$$

Применяя для произвольного элемента y из B пирсовское разложение по единице e_1, получим:

$$y = y e_1 + (y - y e_1),$$

где $y e_1 \in B_1$. Если y пробегает идеал B, то множество $\{y - y e_1\}$ образует идеал B_2 кольца K, содержащийся в B. Из равенства $B_2\, e_1 = 0$ следует $B = B_1 \dotplus B_2$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 4. *Если B — такой идеал кольца K, что $(b) = (b)^2$ для всякого элемента b из B (в частности, если B — минимальный идемпотентный идеал), то для любого идеала $\mathscr{C}$ кольца K справедливы равенства:*

$$B \cap \mathscr{C} = B\mathscr{C} = \mathscr{C}B.$$

Так как всегда $B\mathscr{C} \subseteq B \cap \mathscr{C}$, то нужно доказать только включение

$$B \cap \mathscr{C} \subseteq B\mathscr{C}.$$

Пусть $b \in B \cap \mathscr{C}$. Тогда

$$(b) = (b)^2 \subseteq B\mathscr{C},$$

т. е. $b \in B\mathscr{C}$. Аналогично, если $b \in B \cap \mathscr{C}$, то $b \in \mathscr{C}B$.

Под аннулятором B^* некоторого идеала B мы будем понимать, как обычно, идеал, состоящий из всех таких элементов a кольца K, что

$$aB = Ba = 0.$$

Ясно, что аннулятор K^* самого кольца K является нильпотентным идеалом, причем $(K^*)^2 = 0$. Отсюда следует, что в кольце без нильпотентных идеалов K (в частности, в простом ненулевом кольце) аннулятор K^* есть нулевой идеал.

Если идеал $\mathscr{C}$ содержится в некотором идеале B, то через $\mathscr{C}_B^*$ будем обозначать аннулятор идеала $\mathscr{C}$ в кольце B. Ясно, что

$$\mathscr{C}_B^* = \mathscr{C}^* \cap B.$$

---

* Простое кольцо K называется ненулевым, если $K^2 \neq 0$.

** См. ([15]), стр. 549 и ([19]), лемма 2.

ЛЕММА 5. *Если* $K = B \dotplus \mathscr{C}$, *где* B *и* $\mathscr{C}$ *— идеалы кольца* K, *то* $\mathscr{C} = B^*$ *тогда и только тогда, когда* $B_B^* = 0$.

Заметим сначала, что $\mathscr{C} \subseteq B^*$. Действительно, из $B \cap \mathscr{C} = 0$ следует

$$B\mathscr{C} = \mathscr{C}B = 0.$$

Пусть теперь $\mathscr{C} = B^*$. Тогда

$$B_B^* = B^* \cap B = \mathscr{C} \cap B = 0.$$

Если же $B_B^* = 0$, то, ввиду дедекиндовости структуры идеалов и включения $\mathscr{C} \subseteq B^*$, получим:

$$B^* = B^* \cap (B \dotplus \mathscr{C}) = B^* \cap B \dotplus \mathscr{C} = B_B^* \dotplus \mathscr{C} = \mathscr{C}.$$

Обозначим через B^L левый аннулятор идеала B, т. е. идеал, состоящий из всех таких элементов a кольца K, что $aB = 0$. Ясно, что $B^* \subseteq B^L$.

ЛЕММА 6. *Если* $K = B \dotplus \mathscr{C}$, *где* B *– двусторонний и* $\mathscr{C}$ *— правый идеалы кольца* K, *то* $\mathscr{C} = B^L$ *тогда и только тогда, когда* $B_B^L = 0$.

Доказательство аналогично предыдущему. Заметим, что если $\mathscr{C} = B^L$, то $B^L = B^*$, так как из $B \cap \mathscr{C} = 0$ следует

$$B \cap B^L = 0, \quad BB^L = B^L B = 0,$$

т. е. $B^L \subseteq B^*$.

ЛЕММА 7. *Если минимальный идемпотентный идеал* B *выделяется прямым слагаемым из некоторого главного идеала* (c), *т. е.* $(c) = B \dotplus B_1$, *то* B_1 *является также главным идеалом.*

Действительно, во-первых, $B_B^* = 0$ и поэтому, в силу леммы 5, $B_1 = B_{(c)}^*$. Во-вторых, если $c = b + b_1$ есть запись элемента c в разложении $(c) = B \dotplus B_1$, то

$$(c) = (b + b_1) \subseteq (b) \dotplus (b_1).$$

Но

$$(b) \dotplus (b_1) \subseteq B \dotplus B_1 = (c)$$

и, следовательно,

$$(c) = (b) \dotplus (b_1).$$

Ясно, что $b \neq 0$, так как иначе $B = 0$. Ввиду минимальности идеала B, $(b) = B$ и поэтому

$$(c) = B \dotplus (b_1).$$

Следовательно, в силу той же леммы 5,

$$(b_1) = B_{(c)}^* = B_1,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8. *Если* $\mathscr{C}$ *— произвольный идеал в кольце* K *и* $K = B \dotplus M$, *где* B *— минимальный идемпотентный идеал, а* M *— некоторый идеал, то*

$$\mathscr{C} = \mathscr{C} \cap B \dotplus \mathscr{C} \cap M.$$

Действительно, в силу минимальности идеала B, либо $\mathscr{C} \cap B = B$, либо $\mathscr{C} \cap B = 0$. В первом случае $B \subseteq \mathscr{C}$ и, ввиду дедекиндовости структуры идеалов,

$$\mathscr{C} = \mathscr{C} \cap K = \mathscr{C} \cap (B + M) = \mathscr{C} \cap B + \mathscr{C} \cap M.$$

Если же $\mathscr{C} \cap B = 0$, то $\mathscr{C}B = B\mathscr{C} = 0$, и так как $M = B^*$, то $\mathscr{C} \subseteq M$, откуда

$$\mathscr{C} = \mathscr{C} \cap M = \mathscr{C} \cap B + \mathscr{C} \cap M.$$

Определение 1*. Идеал $\mathscr{C}$ некоторого кольца K назовем *полумодулярным*, если фактор-кольцо $\overline{K} = K/\mathscr{C}$ идемпотентно.

ЛЕММА 9. *Пересечение конечного числа таких максимальных полумодулярных идеалов, которые выделяются прямыми слагаемыми в кольце K, является также полумодулярным прямым слагаемым в K.*

Действительно, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — максимальные полумодулярные прямые слагаемые в кольце K, т. е.

$$K = B_i + M_i \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

где B_i — минимальные идемпотентные идеалы. Применяя $n-1$ раз лемму 8, получим:

$$K = B_1 + M_1 = B_1 + M_1 \cap B_2 + M_1 \cap M_2 =$$
$$= B_1 + M_1 \cap B_2 + M_1 \cap M_2 \cap B_3 +$$
$$+ M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \cdots = B + M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n,$$

где идеал

$$B = B_1 + M_1 \cap B_2 + \cdots + M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{n-1} \cap B_n,$$

являясь конечной прямой суммой идемпотентных колец, также идемпотентен.

ЛЕММА 10. *Пусть I — произвольный правый (левый) идеал кольца K, а I_1 — правый (левый) идеал в кольце I. Если в кольце I существует такой правый (левый) идеал I_2, что $I_1 = I_1 I_2 (I_1 = I_2 I_1)$, то I_1 является правым (левым) идеалом и в K.*

Действительно,

$$I_1 K = I_1 I_2 K \subseteq I_1 I K \subseteq I_1 I \subseteq I_1.$$

Следствие 2. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный идеал в кольце K. Если идеал B кольца $\mathscr{C}$ идемпотентен, то B является идеалом и в K.

ЛЕММА 11. *Для того чтобы некоторое кольцо было представимо в виде прямой суммы*

$$K = \dot{\sum_{\alpha}} I_\alpha + I,$$

где $\dot{\sum_{\alpha}} I_\alpha$ — дискретная прямая сумма минимальных идемпотентных правых идеалов, охватывающая все идеалы такого рода, а I — правый идеал,

* Напомним, что идеал $\mathscr{C}$ кольца K называется *модулярным* (регулярным, отмеченным), если фактор-кольцо $\overline{K} = K/\mathscr{C}$ имеет единицу [см. (21) и (22)].

необходимо и достаточно, чтобы всякий главный правый идеал кольца K содержал прямую сумму не более чем конечного числа минимальных идемпотентных правых идеалов.

Необходимость условия леммы следует из того, что если

$$K = \sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha \dotplus I,$$

то каждый элемент a из K имеет конечную запись и поэтому пересечение

$$(a)_r \cap \sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha,$$

где $(a)_r$ — главный правый идеал, есть прямая сумма не более конечного числа минимальных идемпотентных правых идеалов I_α.

Докажем теперь достаточность условия леммы. Если в кольце K нет минимальных идемпотентных правых идеалов, то все доказано: $K = I$. Пусть теперь главный правый идеал $(a)_r$ содержит минимальный идемпотентный правый идеал I_1. Тогда, взяв пирсовское разложение по идемпотенту e_1 идеала I_1, получим:

$$(a)_r = I_1 \dotplus I',$$

где I' — главный правый идеал, порожденный элементом $a - e_1 a$. Если I' не содержит минимальных идемпотентных правых идеалов кольца K, то разложение заканчиваем. В противном случае выделяем из идеала I' минимальный идемпотентный правый идеал I_2. В силу условия леммы, этот процесс выделения минимальных идемпотентных правых идеалов закончится через конечное число шагов, и мы получим разложение:

$$(a)_r = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \cdots \dotplus I_n \dotplus I^{(n)},$$

где $I^{(n)}$ — главный правый идеал, не содержащий минимальных идемпотентных правых идеалов. Так как кольцо K есть сумма всех своих главных правых идеалов $(a)_r$, то

$$K = \sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha \dotplus I,$$

где I есть сумма всех главных правых идеалов, не содержащих минимальных идемпотентных правых идеалов кольца K.

§ 2. Определение и примеры колец с аннуляторным условием

Определение 2. Кольцо K будем называть *кольцом с аннуляторным условием*, или, сокращенно, A-кольцом, если аннулятор всякого минимального идемпотентного идеала является максимальным идеалом.

Легко доказать следующее утверждение:

Кольцо K является A-кольцом тогда и только тогда, когда всякий его минимальный идемпотентный идеал B выделяется прямым слагаемым в K.

Действительно, пусть B — минимальный идемпотентный идеал в A-кольце K. Так как аннулятор B^* — максимальный идеал, то либо $B \dotplus B^* = K$, либо $B \subseteq B^*$.

Вторая возможность исключается, так как в силу леммы 4

$$B \cap B^* = BB^* = 0.$$

Следовательно, $K = B \dotplus B^*$.

Обратно, пусть $K = B \dotplus B'$, где B — минимальный идемпотентный идеал некоторого кольца K. Так как B — простое кольцо, то $B' = B^*$ и $K / B^* \cong B$, т. е. аннулятор B^* является максимальным идеалом.

Замечание 1. В A-кольце K всякий минимальный идемпотентный идеал B выделяется прямым слагаемым из любого его содержащего идеала $\mathscr{C}$.

Действительно, если $B \subseteq \mathscr{C}$, то, в силу дедекиндовости структуры идеалов,

$$\mathscr{C} = \mathscr{C} \cap K = \mathscr{C} \cap (B \dotplus B^*) = B \dotplus \mathscr{C} \cap B^* = B \dotplus B^*_{\mathscr{C}}.$$

Замечание 2. Из следствия 2 и замечания 1 вытекает следующее утверждение:

Всякий идеал A-кольца также является A-кольцом.

Ясно, что дискретная прямая сумма и специальная подпрямая* сумма простых ненулевых колец являются A-кольцами.

Напомним, что в произвольном кольце K сумма всех *присоединенно-простых идеалов*, т. е. идеалов, являющихся присоединенно-простыми кольцами, есть также присоединенно-простой идеал. Этот единственный максимальный присоединенно-простой идеал кольца и есть радикал в смысле Брауна — Маккоя и Сегала [см. ([7]), ([21]), ([1])]. В дальнейшем он будет обозначаться через N. Радикал N охватывает все нильпотентные идеалы кольца; более того, он содержит и радикал Джекобсона ([13]). Если кольцо K — не присоединенно-простое, то K содержит максимальные *модулярные* идеалы M_α и радикал N есть пересечение всех M_α. Как обычно, кольцо K называется *полупростым***, если $N = 0$, т. е. если K не содержит присоединенно-простых идеалов. Фактор-кольцо K / N является полупростым и некоторое кольцо K будет полупростым в том и только в том случае, если оно изоморфно подпрямой сумме простых колец с единицей.

Из определения полупростого кольца и леммы 2 вытекает

Замечание 3. В полупростом кольце всякий минимальный идеал (если такой существует) является простым кольцом с единицей.

Из предыдущего замечания и леммы 3 получаем следующее утверждение:

---

* Подпрямая сумма K некоторого множества колец S_α называется специальной подпрямой суммой [см. ([19])], если для любого α $K \supseteq S_\alpha$.

** Здесь и всюду ниже, если не будет оговорено полупростота кольца будет пониматься в смысле Брауна — Маккоя и Сегала.

Полупростое кольцо является A-кольцом.

Замечание 4. В кольце K с условием минимальности для главных правых идеалов каждый главный правый идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных идемпотентных правых идеалов.

Действительно, в силу условия минимальности, процесс выделения минимальных идемпотентных правых идеалов из главных правых идеалов закончится через конечное число шагов (см. доказательство достаточности леммы 11).

Теперь нетрудно доказать следующее утверждение:

Всякое кольцо K с условием минимальности для главных правых идеалов является A-кольцом.

Действительно, в силу замечания 4 и леммы 11,

$$K = \sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha \dotplus I,$$

где прямая сумма $\sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha$ охватывает все минимальные идемпотентные правые идеалы кольца K. Пусть теперь B — произвольный двусторонний минимальный идемпотентный идеал кольца K и I' — минимальный главный правый идеал, содержащийся в B. Ясно, что I' является минимальным среди всех правых идеалов кольца K, причем легко видеть, что I' идемпотентен. Действительно, если $I'^2 = 0$, то I' порождает двусторонний нильпотентный идеал $KI' + I' = B$, что противоречит идемпотентности идеала B. Далее, из $KI' \supseteq I'^2 = I'$ следует $B = KI'$, т. е. B есть дискретная прямая сумма K-изоморфных минимальных идемпотентных правых идеалов вида aI', где $a \in K$.

Таким образом, B есть сумма некоторого множества идеалов из $\sum_{\alpha}^{\cdot} I_\alpha$, а потому

$$K = B \dotplus B',$$

где B' — правый идеал. Но в простом ненулевом кольце B левый аннулятор B^L есть нулевой идеал, а потому, в силу леммы 6,

$$B' = B^L = B^*.$$

Следовательно, $K = B \dotplus B^*$, т. е. K есть A-кольцо.

§ 3. Сумма минимальных идемпотентных идеалов в A-кольцах и A-кольца без нильпотентных идеалов

В дальнейшем через $F(K)$ или просто F будем обозначать сумму всех минимальных идемпотентных идеалов B_α некоторого кольца K, т. е. $F = \sum_{\alpha} B_\alpha$. В силу леммы 4,

$$B_\alpha \cap \Big(\sum_{\beta \neq \alpha} B_\beta\Big) = B_\alpha \Big(\sum_{\beta \quad \alpha} B_\beta\Big) = \sum_{\beta \neq \alpha} B_\alpha B_\beta = 0,$$

т. е. F есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец B_α. Если кольцо K не содержит минимальных идемпотентных идеалов, то $F = 0$.

Замечание 5. Если $b \in F$, то $(b) = (b)^2$.

Действительно, так как всякий идеал B, содержащийся в F, есть дискретная прямая сумма некоторого множества идемпотентных идеалов B_α, то, очевидно, идеал B идемпотентен.

ЛЕММА 12. *Для того чтобы A-кольцо K было представимо в виде прямой суммы $K = F + F^*$, необходимо и достаточно, чтобы всякий главный идеал кольца K содержал прямую сумму не более конечного числа минимальных идемпотентных идеалов.*

Если принять во внимание замечание 2 и лемму 7, то доказательство леммы 12 может быть проведено аналогично доказательству леммы 11.

Заметим, что кольцо F^* не содержит минимальных идемпотентных идеалов.

ЛЕММА 13*. *В кольце без нильпотентных идеалов всякий минимальный правый (левый) идеал порождает минимальный двусторонний идеал, который является простым кольцом.*

Действительно, пусть I — минимальный правый идеал в кольце без нильпотентных идеалов K. Так как $I^2 \neq 0$, то $I^2 = I$. Следовательно, $KI \supseteq I^2 = I$, т. е. KI есть двусторонний идеал, порожденный правым идеалом I. Пусть теперь $\mathscr{C}$ — двусторонний идеал кольца K, строго содержащийся в KI, т. е. $\mathscr{C} \subset KI$. Тогда $I \cap \mathscr{C} = 0$ и, тем более, $I\mathscr{C} = 0$. Таким образом,

$$\mathscr{C} \subseteq KI\mathscr{C} = 0,$$

откуда $\mathscr{C} = 0$. Следовательно, KI — минимальный, причем, очевидно, идемпотентный идеал, т. е. KI — простое ненулевое кольцо.

Следствие 3. Всякое A-кольцо без нильпотентных идеалов, в котором каждый главный идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных идеалов, представимо в виде прямой суммы $K = F + F^*$, где F — дискретная прямая сумма простых ненулевых колец, а F^* — кольцо без нильпотентных идеалов и не содержащее как двусторонних, так и односторонних минимальных идеалов.

Замечание 6. Если в A-кольце выполнено условие минимальности для главных идеалов, то каждый главный идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных идемпотентных идеалов.

Действительно, в силу условия минимальности, процесс выделения минимальных идемпотентных идеалов из главных идеалов закончится через конечное число шагов.

Из замечания 6 и леммы 12 следует

ТЕОРЕМА 1. *A-кольцо без нильпотентных идеалов и с условием минимальности для главных идеалов есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец.*

Обратное утверждение очевидно.

---

* Эта лемма следует также из более общих результатов Дьедонне [см. ([8])].

Следствие 4. A-кольцо с единицей без нильпотентных идеалов и с условием минимальности для главных идеалов есть конечная прямая сумма простых колец с единицей.

Действительно, наличие единицы влечет за собой конечность прямой суммы и существование единицы в каждом прямом слагаемом.

Следствие 5. A-кольцо без нильпотентных идеалов и с условием минимальности для всех идеалов есть конечная прямая сумма простых ненулевых колец.

ЛЕММА 14. *Если $\mathfrak{C}$ — произвольный идеал некоторого кольца, то*

$$F(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap F(K) = \mathfrak{C}F(K) = F(K)\mathfrak{C}.$$

Ввиду замечания 5 и леммы 4, нужно доказать только равенство

$$F(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap F(K).$$

Из следствия 2 вытекает, что $F(\mathfrak{C})$ является суммой тех минимальных идемпотентных идеалов кольца K, которые содержатся в $\mathfrak{C}$, т. е.

$$F(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C} \cap F(K).$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{C} \cap F(K) = \mathfrak{C}F(K) = \mathfrak{C}\left(\dot{\sum_{\alpha}} B_\alpha\right) = \dot{\sum_{\alpha}} \mathfrak{C}B_\alpha \subseteq F(\mathfrak{C}).$$

ТЕОРЕМА 2. *Всякое A-кольцо K с условием минимальности для главных идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы двух слагаемых, из которых одно есть кольцо без нильпотентных идеалов, а другое — кольцо без минимальных идемпотентных идеалов.*

Доказательство. В силу замечания 6 и леммы 12,

$$K = F \dotplus F^*, \tag{1}$$

причем, очевидно, кольца F и F^* удовлетворяют условиям теоремы. Докажем единственность разложения (1). Пусть

$$K = F_1 \dotplus F_2$$

— второе разложение кольца K, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Заметим сначала, что, по лемме 5, $F_2 = F_1^*$. Остается доказать равенство $F_1 = F$. В силу замечания 5, леммы 14 и 4 и предположения о кольце F_1, получим:

$$F = F \cap (F_1 \dotplus F_1^*) = F \cap F_1 \dotplus F \cap F_1^* = F \cap F_1 \dotplus F(F_1^*) = F \cap F_1,$$

т. е. $F \subseteq F_1$. С другой стороны, кольцо без нильпотентных идеалов F_1, в силу замечания 2, является A-кольцом и, очевидно, удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов. Следовательно, по теореме 1,

F_1 есть дискретная прямая сумма минимальных идемпотентных идеалов кольца K, т. е. $F_1 \subseteq F$. Таким образом, $F_1 = F$ и $F_1^* = F^*$, что и требовалось доказать.

Как обычно, будем говорить, что кольцо K *ограничено радикалом* N, если $N^* \subseteq N$ или, что то же самое, если $(N^*)^2 = 0$. В работе (²) было доказано следующее утверждение (теорема 5):

Кольцо K с условием минимальности для модулярных (отмеченных) идеалов будет ограничено радикалом N тогда и только тогда, когда оно не содержит минимальных идеалов с единицей.

Из теоремы 2 и предыдущего утверждения следует

ТЕОРЕМА 3. *Всякое A-кольцо K с условием минимальности для всех идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $K = F \dotplus F^*$, где F — кольцо без нильпотентных идеалов (конечная прямая сумма простых ненулевых колец), а F^* — кольцо, ограниченное радикалом N.*

В § 5 мы покажем, что теорема 2 является частным случаем более общего утверждения. Это даст нам возможность сказать несколько больше о кольце F^* из разложения (1).

ЛЕММА 15. *Кольцо K содержит минимальные идемпотентные идеалы в том и только в том случае, если $K \neq F^*$.*

Действительно, если $F = 0$, то $F^* = K$. Обратно, если $F^* = K$, то $F \subseteq F^*$ и

$$F = F \cap F^* = FF^* = 0.$$

ЛЕММА 16. *Если в A-кольце K аннулятор $F^* \neq K$, то F^* есть пересечение всех таких максимальных полумодулярных идеалов, которые являются прямыми слагаемыми в кольце K.*

Действительно, в силу леммы 15, в кольце K существуют минимальные идемпотентные идеалы B_α, и так как K есть A-кольцо, то

$$K = B_\alpha \dotplus B_\alpha^*,$$

где B_α^* — максимальные полумодулярные идеалы. Далее,

$$F^* = \Big(\dot{\sum_\alpha} B_\alpha\Big)^* = \bigcap_\alpha B_\alpha^*.$$

Напомним, что подпрямая сумма K колец S_α называется специальной подпрямой суммой, если K содержит все S_α. Как известно [см. (¹⁹), теорема 15], кольцо K с нулевым аннулятором K^* будет изоморфно специальной подпрямой сумме некоторого множества идеалов B_α тогда и только тогда, когда:

1°. $B_\alpha \cap B_\beta = 0$ для $\alpha \neq \beta$.

2°. Каждый идеал B_α является прямой компонентой в кольце K, т. е. существует такой единственный идеал $\mathfrak{C}_\alpha$, что $K = B_\alpha \dotplus \mathfrak{C}_\alpha$.

3°. $\bigcap \mathfrak{C}_\alpha = 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Кольцо K является специальной подпрямой суммой простых ненулевых колец тогда и только тогда, когда K есть A-кольцо и $F^* = 0$.*

Доказательство. Пусть кольцо K есть специальная подпрямая сумма простых ненулевых колец B_α. Ясно, что K не содержит нильпотентных идеалов, так как любой ненулевой идеал кольца K гомоморфно отображается на некоторое B_α. Следовательно, аннулятор $K^* = 0$. Далее, в силу условий 2^0 и 3^0, $K = B_\alpha \dotplus B_\alpha^*$ и $\bigcap\limits_\alpha B_\alpha^* = 0$, где B_α^* — максимальные полумодулярные идеалы. Следовательно, K есть A-кольцо и, в силу леммы 16,

$$F^* = \bigcap_\alpha B_\alpha^* = 0.$$

Пусть теперь в A-кольце K аннулятор $F^* = 0$. Заметим сначала, что K не содержит нильпотентных идеалов. Действительно, если $\mathscr{C}$ — произвольный нильпотентный идеал кольца K, то $F(\mathscr{C}) = 0$.

С другой стороны, в силу леммы 14,

$$F(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cap F = \mathscr{C}F = F\mathscr{C}$$

и поэтому $\mathscr{C} \subseteq F^* = 0$. Таким образом, в кольце K аннулятор $K^* = 0$. Далее, в силу леммы 16 и нашего предположения,

$$\bigcap_\alpha B_\alpha^* = F^* = 0 \text{ и } K = B_\alpha \dotplus B_\alpha^*,$$

где B_α — минимальные идемпотентные идеалы, а потому $B_\alpha \cap B_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Следовательно, все условия сформулированного критерия для специальной подпрямой суммы колец B_α выполнены и теорема доказана.

ЛЕММА 17. *В произвольном кольце K всякий ненулевой идеал содержит минимальные идемпотентные идеалы тогда и только тогда, когда $F^* = 0$.*

Действительно, пусть $F_L^* = 0$ и $\mathscr{C}$ — произвольный ненулевой идеал в кольце K. Тогда, по меньшей мере, один из идеалов $\mathscr{C}F$ и $F\mathscr{C}$ будет отличным от нуля. Пусть, для определенности, $B = \mathscr{C}F \neq 0$. Так как $B \subseteq F$, то B есть сумма некоторого множества минимальных идемпотентных идеалов и поэтому идеал $\mathscr{C} \supseteq B$ также содержит минимальные идемпотентные идеалы.

Обратно, пусть всякий ненулевой идеал содержит минимальные идемпотентные идеалы. Так как

$$F(F^*) = FF^* = 0,$$

то, ввиду нашего предположения, $F^* = 0$.

Из теоремы 4 и леммы 17 следует

ТЕОРЕМА 5. *Кольцо K является специальной подпрямой суммой простых ненулевых колец в том и только в том случае, если всякий ненулевой идеал содержит минимальные идемпотентные идеалы и K есть A-кольцо.*

Следствие 6. Кольцо без нильпотентных идеалов будет специальной подпрямой суммой простых ненулевых колец тогда и только тогда, когда всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы и K является A-кольцом.

ТЕОРЕМА 6. *Если в A-кольце K аннулятор F^* есть нулевой идеал и K удовлетворяет условию минимальности для полумодулярных прямых слагаемых, то K есть конечная прямая сумма простых ненулевых колец.*

Обратное утверждение очевидно.

Доказательство. Так как $F^* = 0$, то, по лемме 16, пересечение всех максимальных полумодулярных прямых слагаемых M_α есть нулевой идеал, т. е. $\bigcap\limits_\alpha M_\alpha = 0$. Ввиду условия минимальности и леммы 9, существует такое конечное (минимальное) подмножество максимальных полумодулярных прямых слагаемых $\{M_j\}$ $(j=1,2,\ldots,n)$, что $\bigcap\limits_{j=1} M_j = 0$. Теперь теорема сразу следует из доказательства леммы 9.

Отметим, что аннулятор F^* не является радикалом в смысле общего определения этого понятия, данного А. Г. Курошем [см. ([17])].

Действительно, согласно этому определению, гомоморфный образ радикального кольца должен быть также радикальным кольцом. Если же мы рассмотрим кольцо целых чисел Z, то, очевидно, $Z = F^*$. Однако гомоморфный образ кольца целых чисел может быть полем P, а в поле аннулятор $F^*(P)$ есть нулевой идеал, т. е. $P \neq F^*(P)$.

§ 4. Сумма минимальных идеалов с единицей в произвольных кольцах и полупростые кольца

Так как всякий минимальный идеал с единицей является идемпотентным, то все высказывания о минимальных идемпотентных идеалах в произвольных кольцах остаются верными и для минимальных идеалов с единицей. Более того, ввиду леммы 3, все утверждения из предыдущего параграфа, относящиеся к минимальным идемпотентным идеалам, их сумме F и максимальным полумодулярным идеалам в A-кольцах, остаются справедливыми для минимальных идеалов с единицей, их суммы E * и максимальных модулярных идеалов в произвольных кольцах. Далее, так как полупростые кольца (в смысле Брауна — Маккоя) являются, как мы видели, A-кольцами и не содержат нильпотентных идеалов, то все результаты из § 3, относящиеся к A-кольцам без нильпотентных идеалов, переносятся и на полупростые кольца. Отметим только, что в формулировках соответствующих результатов, ввиду замечания 3, будут участвовать не просто минимальные идемпотентные идеалы, а минимальные идеалы с единицей.

Для полноты изложения сформулируем указанные выше результаты.

ЛЕММА 18. *Для того чтобы кольцо K было представимо в виде прямой суммы $K = E \dotplus E^*$, необходимо и достаточно, чтобы всякий главный идеал кольца K содержал прямую сумму не более конечного числа минимальных идеалов с единицей* (см. лемму 12).

ЛЕММА 19. *В полупростом кольце всякий минимальный правый (левый) идеал порождает минимальный двусторонний идеал с единицей* (см. лемму 13).

* В дальнейшем через $E(K)$ или просто E будет обозначаться сумма всех минимальных идеалов с единицей кольца K.

Следствие 7. Полупростое кольцо, в котором каждый главный идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных идеалов, представимо в виде прямой суммы $K = E \dotplus E^*$, где E — дискретная прямая сумма простых колец с единицей, а E^* — полупростое кольцо, не содержащее как двусторонних, так и односторонних минимальных идеалов (см. следствие 3).

Замечание 7. В кольце с условием минимальности для главных идеалов всякий главный идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных идеалов с единицей (см. замечание 6).

ТЕОРЕМА 7. *Полупростое кольцо с условием минимальности для главных идеалов есть дискретная прямая сумма простых колец с единицей.*

Обратное утверждение очевидно (см. теорему 1).

Следствие 8. Полупростое кольцо с единицей и с условием минимальности для главных идеалов есть конечная прямая сумма простых колец с единицей.

Следствие 9*. Полупростое кольцо с условием минимальности для всех идеалов есть конечная прямая сумма простых колец с единицей.

ЛЕММА 20. *Если $\mathfrak{C}$ — произвольный идеал некоторого кольца K, то*

$$E(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap E(K) = \mathfrak{C}E(K) = E(K)\mathfrak{C}$$

(см. лемму 14).

ТЕОРЕМА 8. *Всякое кольцо K с условием минимальности для главных идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $K = E \dotplus E^*$, где E — полупростое кольцо, а E^* — кольцо без минимальных идеалов с единицей* (см. теорему 2).

ТЕОРЕМА 9. *Всякое кольцо K с условием минимальности для всех идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $K = E \dotplus E^*$, где E — полупростое кольцо (конечная прямая сумма простых колец с единицей), а E^* — кольцо, ограниченное радикалом N* (см. теорему 3).

ЛЕММА 21. *Кольцо K содержит минимальные идеалы с единицей тогда и только тогда, когда $K \neq E^*$* (см. лемму 15).

ЛЕММА 22. *Если $E^* \neq K$, то E^* есть пересечение всех таких максимальных модулярных идеалов, которые являются прямыми слагаемыми в K* (см. лемму 16).

ТЕОРЕМА 10. *Кольцо K является специальной подпрямой суммой простых колец с единицей тогда и только тогда, когда $E^* = 0$* (см. теорему 4).

ЛЕММА 23. *В кольце K всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы с единицей тогда и только тогда, когда $E^* = 0$* (см. лемму 17).

ТЕОРЕМА 11**. *Кольцо K является специальной подпрямой суммой простых колец с единицей в том и только в том случае, если всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы с единицей* (см. теорему 5).

---

* Другое доказательство этого утверждения см. в работе ([7]), теорема 9.

** См. также ([18]), теорема 16.

Следствие 10. Полупростое кольцо является специальной подпрямой суммой простых колец с единицей тогда и только тогда, когда всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы (см. следствие 6).

ТЕОРЕМА 12. *Если* $E^* = 0$ *и кольцо* K *удовлетворяет условию минимальности для модулярных прямых слагаемых, то* K *есть конечная прямая сумма простых колец с единицей* (см. теорему 6).

§ 5. Максимальный f-регулярный идеал кольца и основная теорема об A-кольцах

Как известно [см. (6)], элемент a некоторого кольца K называется *f-регулярным*, если $a \in (a)^2$ или, что то же самое, если $(a) = (a)^2$. Идеал B называется *f-регулярным*, если каждый его элемент является f-регулярным. Наконец, некоторое кольцо K является *f-регулярным*, если оно состоит только из f-регулярных элементов. Легко видеть, что кольцо K будет f-регулярным тогда и только тогда, когда всякий его идеал является идемпотентным. Ясно, что f-регулярные кольца не содержат нильпотентных идеалов. Более того, f-регулярные кольца это в точности кольца, всякий ненулевой гомоморфный образ которых не содержит нильпотентных идеалов [см. (6)].

Сумма всех f-регулярных идеалов некоторого кольца K является также f-регулярным идеалом. Этот единственный максимальный f-регулярный идеал кольца K в дальнейшем будет обозначаться через $\mathfrak{F}(K)$ или просто $\mathfrak{F}$. Как показано в работе (6), $\mathfrak{F}$ есть пересечение всех таких идеалов Q_α, что факторкольца K/Q_α являются f-примитивными*. Если $\overline{K} = K/\mathfrak{F}(K)$, то $\mathfrak{F}(\overline{K}) = 0$ и в некотором кольце K идеал $\mathfrak{F}$ есть нулевой идеал тогда и только тогда, когда K является подпрямой суммой f-примитивных колец.

Замечание 8. Так как всякий минимальный идемпотентный идеал, очевидно, является f-регулярным идеалом, то $F \subseteq \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 24. *Если* $\mathscr{C}$ *— некоторый f-регулярный идеал в произвольном кольце* K, *то всякий идеал* B *кольца* $\mathscr{C}$ *является идеалом и в* K.

Действительно, идеал B кольца $\mathscr{C}$ есть сумма всех главных идеалов $(b)_{\mathscr{C}}$ кольца $\mathscr{C}$, содержащихся в B. Но, так как $\mathscr{C}$ есть f-регулярный идеал, то, в силу леммы 1,

$$(b) = (b)^2 = (b)^3 = (b)_{\mathscr{C}},$$

т. е. всякий главный идеал кольца $\mathscr{C}$ является главным идеалом и в K.

Замечание 9. Из предыдущей леммы вытекает, что всякий f-регулярный идеал является f-регулярным кольцом, а также, что если в кольце K выполнено условие минимальности для идеалов, то это же условие имеет место и в любом f-регулярном идеале.

---

* Кольцо называется *f-примитивным*, если пересечение всех его ненулевых идеалов есть ненулевой нильпотентный идеал T, т. е. $T^2 = 0$.

ТЕОРЕМА 13. *Если A-кольцо удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, то* $\mathfrak{F} = F$.

Это утверждение непосредственно следует из замечаний 2, 8, 9 и теоремы 1.

Замечание 10. Лемма 4 может быть теперь сформулирована следующим образом:

Если B — f-регулярный идеал кольца K, а $\mathscr{C}$ — произвольный идеал, то

$$B \cap \mathscr{C} = B\mathscr{C} = \mathscr{C}B.$$

ЛЕММА 25. *Если* $\mathscr{C}$ *— произвольный идеал кольца* K, *то*

$$\mathfrak{F}(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cap \mathfrak{F}(K) = \mathscr{C}\mathfrak{F}(K) = \mathfrak{F}(K)\mathscr{C}.$$

Ввиду замечания 10, нужно доказать только равенство

$$\mathfrak{F}(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cap \mathfrak{F}(K).$$

Пусть $c \in \mathfrak{F}(\mathscr{C})$, т. е. пусть элемент c порождает f-регулярный идеал $(c)_{\mathscr{C}}$ в кольце $\mathscr{C}$. Так как

$$(c)_{\mathscr{C}}^2 = (c)_{\mathscr{C}},$$

то, по следствию 2,

$$(c)_{\mathscr{C}} = (c),$$

т. е. (c) является f-регулярным идеалом кольца K, а потому $c \in \mathfrak{F}(K)$. Следовательно,

$$\mathfrak{F}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C} \cap \mathfrak{F}(K).$$

Проверим теперь включение

$$\mathscr{C} \cap \mathfrak{F}(K) \subseteq \mathfrak{F}(\mathscr{C}).$$

Если $c \in \mathscr{C} \cap \mathfrak{F}(K)$, то (c) является f-регулярным идеалом и поэтому $(c) = (c)^2$. Отсюда, в силу леммы 1, $(c) = (c)_{\mathscr{C}}$, т. е. $(c)_{\mathscr{C}}$ является f-регулярным идеалом в кольце $\mathscr{C}$. Следовательно, $c \in \mathfrak{F}(\mathscr{C})$. Лемма доказана.

В дальнейшем через $R(K)$ или просто R будем обозначать радикал кольца K в смысле Бэра ([5]). Напомним, что радикал R есть нильидеал, содержащий все нильпотентные идеалы кольца.

Как показано в работе ([18]), кольцо K является полупростым в смысле Бэра, т. е. $R = 0$ в том и только в том случае, если оно не содержит нильпотентных идеалов.

В произвольном кольце K имеют место следующие соотношения:

I. $\mathfrak{F} \cap R = 0$,

II. $R \subseteq \mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{F} \subseteq R^*$,

III. $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^* = 0$,

IV. $R = R(\mathfrak{F}^*)$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(R^*)$.

Доказательство. Если $a \in \mathfrak{F} \cap R$, то идеал (a) одновременно является полупростым и радикальным кольцом, а потому $a = 0$, т. е. $\mathfrak{F} \cap R = 0$. Из свойства I следует, что $\mathfrak{F}R = R\mathfrak{F} = 0$, откуда получаем

соотношения II. Соотношение III следует из замечания 10. Наконец, из свойства II и теоремы о том, что $R(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cap R(K)$ для любого идеала $\mathscr{C}$ кольца K [см. ([20])], получим:

$$R = R \cap \mathfrak{F}^* = R(\mathfrak{F}^*).$$

Точно так же, из свойства II и леммы 25, получим:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \cap R^* = \mathfrak{F}(R^*).$$

ТЕОРЕМА 14. *Для того чтобы кольцо K было представимо в виде прямой суммы $K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^*$, необходимо и достаточно, чтобы максимальный f-регулярный идеал всякого главного идеала (a) выделялся прямым слагаемым в кольце (a).*

Доказательство необходимости. Пусть $K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^*$ и

$$a = b + c \tag{2}$$

— запись произвольного элемента a в разложении $K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^*$.

Докажем сначала равенство

$$(a) = (b) \dotplus (c). \tag{3}$$

Действительно,

$$(a) = (b + c) \subseteq (b) \dotplus (c).$$

С другой стороны, $b = a - c$ и поэтому

$$(b) = (a - c) \subseteq (a) + (c).$$

Отсюда, так как

$$(b)(c) \subseteq (b) \cap (c) = 0,$$

получим:

$$(b)^2 \subseteq (b)[(a) + (c)] = (b)(a) \subseteq (a).$$

Но $b \in \mathfrak{F}$, а потому $(b) = (b)^2$. Следовательно, $(b) \subseteq (a)$ и из равенства (2) получим $c \in (a)$. Таким образом,

$$(b) \dotplus (c) \subseteq (a),$$

т. е.

$$(a) = (b) \dotplus (c).$$

Далее, в силу леммы 25,

$$\mathfrak{F}((a)) = (a) \cap \mathfrak{F} = [(b) \dotplus (c)] \cap \mathfrak{F} = (b) \dotplus (c) \cap \mathfrak{F} + (b).$$

Заменяя в равенстве (3) идеал (b) через $\mathfrak{F}((a))$, получим:

$$(a) = \mathfrak{F}((a)) \dotplus (c),$$

где (c), в силу леммы 5, будет аннулятором идеала $\mathfrak{F}((a))$ в кольце (a), т. е.

$$(c) = \mathfrak{F}^*((a)).$$

Необходимость доказана.

Заметим, что попутно мы показали, что если $K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^*$, то максимальный f-регулярный идеал каждого главного идеала также является главным идеалом.

Доказательство достаточности. Если максимальный f-регулярный идеал $\mathfrak{F}((a))$ всякого главного идеала (a) выделяется прямым слагаемым в (a), т. е.

$$(a) = \mathfrak{F}((a)) \dotplus \mathfrak{F}^*((a)),$$

то, так как кольцо K есть сумма всех своих главных идеалов (a), получим:

$$K = \sum_\alpha (a_\alpha) = \sum_\alpha \mathfrak{F}((a_\alpha)) \dotplus \sum_\alpha \mathfrak{F}^*((a_\alpha)).$$

Но, очевидно,

$$\sum_\alpha \mathfrak{F}((a_\alpha)) = \mathfrak{F},$$

а потому

$$\sum \mathfrak{F}^*((a_\alpha)) = \mathfrak{F}^*,$$

т. е. $K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^*$, что и требовалось доказать.

Приведем теперь новое доказательство теоремы 2 и одновременно уточним ее. Для этого предположим, что A-кольцо K удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов. В силу теоремы 13, $\mathfrak{F} = F$, где F — дискретная прямая сумма всех минимальных идемпотентных идеалов кольца K. Если (a) — произвольный главный идеал кольца K, то, по лемме 25,

$$\mathfrak{F}((a)) = (a) \cap \mathfrak{F} = (a) \cap F.$$

В силу замечания 6, пересечение $(a) \cap F$ является прямой суммой не более чем конечного числа минимальных идемпотентных идеалов кольца K, а потому $\mathfrak{F}((a))$ выделяется прямым слагаемым в K. Согласно теореме 14,

$$K = \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{F}^* = F \dotplus F^*,$$

причем F^* есть кольцо не только без минимальных идемпотентных идеалов, но и без f-регулярных идеалов, т. е. F^* является подпрямой суммой f-примитивных колец.

Таким образом, мы получаем следующее уточнение теоремы 2:

Всякое A-кольцо с условием минимальности для главных идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы двух слагаемых, из которых одно есть кольцо без нильпотентных идеалов, а другое — кольцо без f-регулярных идеалов.

Применяя теорему 8 к кольцу F из разложения $K = F \dotplus F^*$, т. е. представляя кольцо F в виде $F = F \dotplus E_F^*$, мы получим следующее утверждение:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Всякое A-кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для главных идеалов, представимо единственным образом в виде прямой суммы*

$$K = E \dotplus E_F^* \dotplus F^*,$$

где E — полупростое кольцо в смысле Брауна — Маккоя (дискретная прямая сумма простых колец с единицей), E_F^* — кольцо без нильпотентных идеалов и одновременно присоединенно-простое кольцо (дискретная прямая сумма простых ненулевых колец без единицы), а F^* — кольцо без f-регулярных идеалов (подпрямая сумма f-примитивных колец).

§ 6. Кольца, обладающие минимальными правыми идеалами

ЛЕММА 26 [см. (9), лемма 1]. *В кольце без нильпотентных элементов всякий идемпотент лежит в центре кольца.*

Ввиду краткости доказательства, мы его приведем. Если $e^2 = e$, то для любого элемента x кольца получаем:

$$(exe - ex)^2 = e(xe - x)e(xe - x) = ex(e^2 - e)(xe - x) = 0.$$

Следовательно, $exe - ex = 0$, т. е. $exe = ex$. Аналогично, $exe = xe$, откуда $ex = xe$.

Следствие 11. В кольце K без нильпотентных элементов всякий минимальный правый идеал I является двусторонним идеалом, причем кольцо I есть тело.

Действительно, как хорошо известно, $I = eK$, где e — левая единица кольца I. По лемме 26,

$$I = eK = Ke,$$

т. е. I — минимальный двусторонний идеал с единицей.

Ввиду леммы 3, кольцо I не содержит односторонних собственных идеалов, и так как $I^2 \neq 0$, то I является телом.

ТЕОРЕМА 15. *Если в кольце K без нильпотентных элементов существует хотя бы один минимальный правый идеал, причем каждый главный правый идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных правых идеалов, то K представимо в виде прямой двусторонней суммы $K = E \dotplus E^*$, где E — дискретная прямая сумма тел, а E^* — кольцо без нильпотентных элементов и не содержащее минимальных правых идеалов.*

Обратное утверждение очевидно.

Теорема 15 непосредственно вытекает из леммы 11, следствия 11 и леммы 6.

Из предыдущей теоремы и замечания 4 следует основная теорема Герчикова (10), а именно:

Для того чтобы кольцо K было разложимо в дискретную прямую сумму некоторого множества тел, необходимо и достаточно, чтобы в K выполнялось условие минимальности для главных правых идеалов и чтобы в K отсутствовали нильпотентные элементы.

Как известно [см. (8)], сумма S всех минимальных правых идеалов некоторого кольца K есть двусторонний идеал — цоколь (правый) кольца K. Нам понадобятся следующие утверждения [см. (8)]:

1°. Если I — минимальный правый идеал кольца K, то сумма всех минимальных правых идеалов, K-изоморфных с I (т. е. изоморфных как K-модули), есть двусторонний идеал P в кольце K — *основание* цоколя S. Цоколь S есть прямая сумма своих оснований.

II°. Если P — одно из оснований цоколя, то $P = B \dotplus \mathscr{C}$, где B — двусторонний идеал в кольце K, — сумма всех минимальных нильпотентных правых идеалов, содержащихся в P, а $\mathscr{C}$ — правый идеал в K — сумма всех минимальных идемпотентных правых идеалов, содержащихся в P. Кольцо $\mathscr{C}$ является простым, а B — нильпотентным, причем $B^2 = 0$.

ТЕОРЕМА 16. *Кольцо K без нильпотентных идеалов, в котором каждый главный правый идеал содержит прямую сумму не более конечного числа минимальных правых идеалов, представимо в виде двусторонней прямой суммы $K = S \dotplus S^*$, где S — дискретная прямая сумма простых ненулевых колец с минимальными правыми идеалами, а S^* — кольцо без нильпотентных идеалов и не содержащее минимальных правых идеалов.*

Обратное утверждение очевидно.

Доказательство. В силу леммы 11,

$$K = \sum_{\alpha} I_\alpha \dotplus I,$$

где сумма $\sum_{\alpha} I_\alpha$ охватывает все минимальные идемпотентные правые идеалы. Так как кольцо K не содержит нильпотентных идеалов, то $\sum_{\alpha} I_\alpha$ есть цоколь S кольца K. В силу утверждения I° и II°, S является дискретной прямой суммой простых ненулевых колец с минимальными правыми идеалами. Следовательно, $K = S \dotplus I$ и, по лемме 6, $I = S^L = S^*$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 16 и замечания 4 вытекает

ТЕОРЕМА 17. *Кольцо без нильпотентных идеалов и с условием минимальности для главных правых идеалов есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец с минимальными правыми идеалами.*

Обратное утверждение очевидно.

Заметим, что теорема 17 вытекает также из теоремы 1. Действительно, как было показано в § 2, кольцо с условием минимальности для главных правых идеалов является A-кольцом.

Теорема 17 обобщает результат Капланского [см. ([14]), теорема 8.1] о том, что полупростое кольцо в смысле Джекобсона ([13]) с условием минимальности для главных правых идеалов есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец с минимальными правыми идеалами.

Основная теорема об A-кольцах, в случае колец с условием минимальности для главных правых идеалов, может быть сформулирована следующим образом:

Всякое кольцо K с условием минимальности для главных правых идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы

$$K = E \dotplus E_F^* \dotplus F^*,$$

где E — полупростое кольцо в смысле Брауна — Маккоя (дискретная прямая сумма матричных колец над некоторыми телами), E_F^* — полупростое кольцо в смысле Джекобсона и одновременно присоединенно-простое

кольцо (дискретная прямая сумма плотных колец линейных преобразований конечного ранга** подходящих бесконечно-мерных линейных пространств над некоторыми телами), а F^* — кольцо без j-регулярных идеалов (подпрямая сумма j-примитивных колец).*

Действительно, кольцо E является дискретной прямой суммой простых колец с единицей и с минимальными правыми идеалами. Но, в силу теоремы Артина — Уэйплса [см. (4), теорема 2], простое кольцо с единицей, содержащее минимальные правые идеалы, есть матричное кольцо над некоторым телом.

Кольцо E_F^* является дискретной прямой суммой простых ненулевых колец без единицы с минимальными правыми идеалами. Но известно [см. (12), теорема 9], что простое ненулевое кольцо, содержащее минимальные правые идеалы, изоморфно плотному кольцу линейных преобразований конечного ранга подходящего линейного пространства над некоторым телом. Так как всякое плотное кольцо линейных преобразований конечно-мерного линейного пространства совпадает со всем кольцом линейных преобразований и, следовательно, содержит единицу, то в нашем случае пространство будет бесконечно-мерным. Наконец, всякое плотное кольцо линейных преобразований векторного пространства над некоторым телом и прямая сумма таких колец являются полупростыми кольцами в смысле Джекобсона.

Заметим, что предыдущее утверждение обобщает известную теорему М. Холла (11) о том, что *всякое кольцо K с условием минимальности для всех правых идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы полупростого (в классическом смысле) и ограниченного своим классическим радикалом колец.*

Действительно, предположим, что кольцо K удовлетворяет условию минимальности для всех правых идеалов. Тогда в разложении

$$K = E \dotplus E_F^* \dotplus F^*$$

кольцо E будет конечной прямой суммой матричных колец над некоторыми телами, т. е. полупростым кольцом в классическом смысле. Так как E_F^* — присоединенно-простое кольцо и удовлетворяет условию минимальности для всех правых идеалов, то E_F^* нильпотентно [см. (7) и (1)]. С другой стороны, E_F^* — полупростое кольцо в смысле Джекобсона, а потому $E_F^* = 0$. Наконец, как мы показали раньше (см. теорему 3), кольцо F^* ограничено радикалом N. Но радикал N в случае условия минимальности для всех правых идеалов совпадает с классическим радикалом.

Поступило
15·VII·1955

---

* Множество $\mathfrak{M}$ линейных преобразований векторного пространства R над некоторым телом D называется *плотным*, если для всяких n линейно независимых над D векторов из $Rx_1, x_2, \ldots, x_n$ и произвольных n векторов из $R\,y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует такое линейное преобразование A в $\mathfrak{M}$, что $x_i A = y_i$.

** Линейное преобразование *конечного ранга* — это такое линейное преобразование, которое переводит все пространство в конечно-мерное.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андрунакиевич В. А., К определению радикала кольца, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 217—224.

[2] Андрунакиевич В. А., Кольца с условием минимальности для идеалов, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 3 (1954), 329—332.

[3] Андрунакиевич В. А., Кольца, обладающие минимальными двусторонними идеалами, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 3 (1955), 405—408.

[4] Artin E., Whaples G., The theory of simple rings, Amer. J. Math., 65 (1943), 87—107.

[5] Baer R., Radical ideals, Amer. J. Math., 65 (1943), 537—568.

[6] Blair R. L., Ideal lattices and the structure of rings, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 136—153.

[7] Brown B., McCoy N. H., Radicals and subdirect sums, Amer. J. Math., 69 (1947), 86—58.

[8] Dieudonné J., Les ideaux minimaux dans les anneaux associatifs, Proc. international Congres of Math., II (1950), 44—48.

[9] Forsythe A., McCoy N. H., On the commutativity of certain rings, Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1946), 523—526.

[10] Герчиков А. И., Кольца, разложимые в прямую сумму тел, Мат. сб., (49) (1940), 591—597.

[11] Hall M., The position of the radical in an algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 391—404.

[12] Jacobson N., Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Math. Soc., 57 (1945), 228—245.

[13] Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67 (1945), 300—320.

[14] Kaplansky I., Topological representation of Algebras. II, Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 62—75.

[15] Köthe G., Abstracte Theorie nicht kommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, Math. Annallen, 103 (1930), 545—572.

[16] Курочкин В. М., Кольца с условием минимальности для присоединенных идеалов, Доклады Ак. наук СССР, 66, № 4 (1949), 549—551.

[17] Курош А. Г., Радикалы колец и алгебр, Мат. сб., 33 (75) (1953), 13—26.

[18] Levitzki J., Prime ideals and the lower radical, Amer. J. Math., 73 (1951), 25—29.

[19] Mc Coy N. H., Subdirect sums of rings, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 857—877.

[20] Mc Coy N. H., Prime ideals in general rings, Amer. J. Math., 71 (1949), 823—833.

[21] Segall I., The groupalgebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 69—105.

[22] Шульгейфер Е. Г., Мультипликативная теория присоединенных идеалов в коммутативных кольцах, Доклады Ак. наук СССР, 64, № 5 (1949), 633—636.

[23] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. II, М.—Л., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 569—582

Б. А. ТРАХТЕНБРОТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА И ДЕДУКТИВНАЯ НЕПОЛНОТА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Дается доказательство дедуктивной неполноты формализованной теории множеств, основанное на понятии рекурсивной неотделимости. Этот метод обнаруживает формально не разрешимые предложения, которые содержательно утверждают эквивалентность некоторых условий конечности множества.

Введение

В этой работе понятие рекурсивной отделимости применяется для доказательства дедуктивной неполноты широкого класса исчислений, описывающих теорию множеств. Именно, если в рамках исчисления можно строить модели для формул узкого исчисления предикатов, допускающих конечные интерпретации, то множество K формул, выводимых в исчислении, не отделимо рекурсивно от множества L формул, опровержимых в нем. Из неотделимости же этих множеств вытекает, что рассматриваемое исчисление непополнимо, т. е. не является дедуктивно полным и не допускает непротиворечивого расширения до дедуктивно полного исчисления.

Предлагаемое доказательство дедуктивной неполноты позволяет выявлять существование неразрешимых предложений вида

$$(q)\,[\mathfrak{A}(q) \rightarrow \mathfrak{B}(q)],$$

где $\mathfrak{A}(q)$ и $\mathfrak{B}(q)$ выражают в теоретико-множественных терминах такие условия конечности множества q, которые могут быть записаны в узком исчислении предикатов посредством формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, тождественно истинных в любой конечной области (но опровержимых в бесконечной области). Это обстоятельство истолковывается в данной работе как невозможность доказывать в аксиоматической теории множеств эквивалентность любых двух условий (определений) конечности. Такое толкование полученного результата представляет некоторый интерес в связи с исследованиями Тарского, Френкеля и Мостовского по вопросу об определении конечного множества в аксиоматической теории множеств. Так, например, в своих «10 лекциях по теории множеств» А. Френкель указывает на то, что на основании предложенной им системы аксиом теории множеств без аксиомы выбора не удается доказать эквивалентность дедекиндова определения («множество конечно, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству») с некоторыми другими определениями конечности.

Там же высказывается предположение, что присоединения аксиомы выбора уже достаточно для доказательства любых двух условий конечности. Впоследствии А. Мостовский уточнил понятие «условие конечности» и установил, что в рассматриваемом им классе условий конечности нет ни самого сильного, ни самого слабого: при этом условие A считается более сильным (вернее, не менее слабым), чем B, если в рассматриваемом исчислении доказуемо, что всякое множество, удовлетворяющее условию A, удовлетворяет также и условию B [см. (2)].

Теорема 6 настоящей работы является усилением теорем, высказанных А. Мостовским без доказательства в (2).

Содержание настоящей работы по параграфам распределяется следующим образом: § 1 имеет вспомогательный характер: в нем приводятся терминология и обозначения, принятые в статье, а также формулировки некоторых теорем, ранее доказанных.

В § 2 дается точное описание дедуктивных исчислений типа τ, подлежащих исследованию; существенным является то, что во всяком таком исчислении содержатся в качестве аксиом или теорем предложения $\tau_1) - \tau_6)$. Здесь же уточняется, в каком смысле понимается термин «определение конечного множества».

В § 3 устанавливается, что предложения $\tau_1) - \tau_6)$ позволяют строить конечные модели для формул узкого исчисления предикатов, которые интерпретируемы в конечном (лемма 3 и теорема 3).

В § 4 устанавливается неполнота всякого исчисления типа τ (а значит, и его непополнимость, ибо непротиворечивое расширение исчисления типа τ является опять-таки исчислением типа τ).

Результаты настоящей работы были изложены в неопубликованной главе из диссертации автора (Киев, 1950 г.) до опубликования Клини (1951 г.) теоремы о существовании рекурсивно-перечислимых множеств, не отделимых рекурсивно, и до выхода в свет в 1953 г. статьи (7), в которой дается общая трактовка понятия дедуктивной непополнимости на основе понятия рекурсивной отделимости. По сравнению с диссертацией предлагаемое здесь изложение отличается лишь тем, что в качестве исходной пары рекурсивно не отделимых множеств берутся множество P всех тождественно истинных формул узкого исчисления предикатов и множество R всех формул этого исчисления, которые опровержимы в конечном [см. пример из работы (4)].

С точки зрения понятий и результатов работы (7) доказываемая в настоящей статье теорема неполноты может быть интерпретирована следующим образом:

В качестве дедуктивного исчисления τ в смысле работы (7) берется формальная аксиоматическая система теории множеств. В этом исчислении выделяется $\mathfrak{B}$-класс формул, имеющих строение

$$(q)\,[\mathfrak{A}(q) \to \mathfrak{B}(q)],$$

где $\mathfrak{A}(q)$ и $\mathfrak{B}(q)$ — формулы некоторого специального вида (см. § 2). Далее, при помощи результатов работы (4) устанавливается, что если подчинить исчисление некоторым естественным требованиям, то множе-

ства $K_{\mathfrak{B}}(\pi)$ и $L_{\mathfrak{B}}(\pi)$ не отделимы. Отсюда, в силу работы (7), автоматически вытекает неполнимость исчисления π в применении к $\mathfrak{B}$. Поскольку $K_{\mathfrak{B}}(\pi)$ и $L_{\mathfrak{B}}(\pi)$ в действительности являются эффективно не отделимыми, то, в силу (7), можно было бы утверждать, что π даже эффективно непополнимо.

§ 1

I. Формулы узкого исчисления предикатов (и. п.) будем обозначать прописными готическими буквами: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... и т. д. Иногда в скобках будут указаны некоторые из предикатных символов, встречающихся в формуле, например $\mathfrak{A}(F^2, M^1, \ldots)$; здесь верхний индекс указывает число аргументов, от которых зависит соответствующий предикат. Если противное не будет оговорено, то подразумевается, что в рассматриваемых формулах допускается специальный предикат тождества (символ $=$).

Моделью или интерпретацией формулы $\mathfrak{A}(F^i, G^j, \ldots)$ называется всякое множество q с зафиксированными на нем функциями (предикатами) $F_0^i, G_0^j, \ldots$ такими, что $\mathfrak{A}(F_0^i, G_0^j, \ldots)$ истинно. q называется предметной областью, его мощность — мощностью модели, а F_0^i, G_0^j, ... — интерпретирующими предикатами.

II. Будем обозначать через $K_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$, K_ω, P * соответственно классы формул, тождественно истинных в области из i элементов, тождественно истинных в любой конечной области, тождественно истинных в любой области. Формула $\mathfrak{A}$ называется строго k-тождественной, если $\mathfrak{A} \in K_n (n = 1, 2, \ldots, k)$ и $\mathfrak{A} \overline{\in} K_n (n > k)$. Совокупность всех $\mathfrak{B}$ таких, что $\mathfrak{B} \in K_\omega$, $\mathfrak{B} \overline{\in} P$, обозначим через K_Ω. Для того чтобы указать класс, к которому принадлежит данная формула, мы иногда будем приписывать ей соответствующий верхний индекс, например $\mathfrak{A}^n$, $\mathfrak{A}^\omega$, $\mathfrak{A}^\Omega$, ...

Через R будем обозначать совокупность всех формул, опровержимых в конечном, т. е. R дополняет K_ω до класса всех формул и. п.

Если формула $\mathfrak{A}$ не содержит предиката тождества и опровержима в какой-либо области, то она опровержима и в любой области большей мощности; поэтому из $\mathfrak{A} \in K_m$ вытекает $\mathfrak{A} \in K_n (0 < n < m)$. Необходимость различать в данной работе формулы, содержащие предикат тождества, от формул, его не содержащих, связана как раз с этим обстоятельством. Укажем правило «исключения тождества», которое переводит формулу $\mathfrak{A}$, содержащую знак $=$, в формулу $\mathfrak{A}'$, не содержащую этого знака, с соблюдением условия: если одна из формул $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}'$ имеет модель данной мощности, то и другая имеет модель той же или меньшей мощности. $\mathfrak{A}'$ определяется как $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$, где:

а) $\mathfrak{A}_1$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой $x = y$ новым символом двуместного предиката $I(x, y)$, не встречающимся в $\mathfrak{A}$.

б) $\mathfrak{A}_2$ есть конъюнкция всех формул вида

$$(x_i)(y)(I(x_i, y) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) H^k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \to \\ \to H^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, x_{i+1}, \ldots, x_k)), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (*)$$

где H^k — произвольный предикат из $\mathfrak{A}_1$.

* K_0 — это класс формул, которые не тождественно истинны ни в какой области, т. е. опровержимы в любой области.

Смысл этого преобразования заключается в том, что специальный предикат тождества заменяется переменным предикатом, обладающим свойствами тождества, описанными в (*).

III. Понятия «рекурсивно-перечислимое множество», «рекурсивное множество» употребляются в общепринятом смысле [см., например, (4)]. В этой работе использована рекурсивная перечислимость множества P, множества R, а также множества предложений, выводимых в формально дедуктивной теории. Множества P и R не являются рекурсивными, хотя они рекурсивно-перечислимы.

IV. Через $\bar{M} = k\,(k = 1, 2, \ldots)$ обозначаем формулу

$$(Ex_1, \ldots, x_k)\{\underset{i<j\leqslant k}{\&}(x_i \neq x_j)\,\&\,(x)\,(M(x) \equiv \underset{i\leqslant k}{V}(x = x_i))\},$$

утверждающую, что предикат $M(x)$ истинен в точности для k элементов. Из теоремы 1 статьи (3) непосредственно вытекает, что для любого рекурсивно-перечислимого множества A существует формула $\mathfrak{A}(M^1, \ldots)$ такая, что в последовательности формул

$$\mathfrak{A}(M^1, \ldots)\,\&\,\bar{M} = k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (**)$$

интерпретируемы те и только те формулы, в которых $k \in A$.

Легко усмотреть, что этим же свойством обладает и последовательность формул, получаемых из (**) «исключением тождества» (см. II). Сохраняя запись (**), мы будем в дальнейшем (§ 4) предполагать, что предикат тождества уже исключен.

V. Множества A и B отделимы рекурсивно, если существуют непересекающиеся рекурсивные A' и B' такие, что

$$A \subset A' \text{ и } B \subset B'.$$

Существуют пары рекурсивно-перечислимых множеств, которые неотделимы рекурсивно. Таковы, например, множества P и R [см. (4)].

§ 2

На протяжении этого параграфа теория множеств рассматривается в виде логического исчисления τ, получаемого присоединением к исчислению предикатов (с аксиомами тождества) некоторой конечной системы аксиом*. Не останавливаясь на определенном выборе этих аксиом, мы потребуем только, чтобы из них были выводимы приводимые ниже предложения $\tau_1) - \tau_6)$. Выполнение этого требования влечет за собой неполноту исчисления τ относительно определенного класса предложений (см. теоремы § 4). В частности, за τ можно взять систему аксиом Геделя — Бернайса (Г — Б) и любое ее непротиворечивое расширение за счет присоединения новых аксиом [см. (1)].

* Требование конечности не существенно; достаточно, чтобы присоединяемые аксиомы образовывали рекурсивно-перечислимую совокупность

Будем придерживаться терминологии и обозначений (Г — Б). В предложениях $\tau_1) - \tau_6)$ малые латинские буквы обозначают переменные множества.

$\tau_1)$ $(x)(x \in u \equiv x \in v) \equiv u = v$,

$\tau_2)$ $(Eu)(v)(v \overline{\in} u)$,

$\tau_3)$ $(x)(Ey)(v)(v \in y \equiv v = x)$,

$\tau_4)$ $(x, y)(Eu)(v)(v \in u \equiv v \in x \vee v \in y)$,

$\tau_5)$ $(u, v)(Ez)(x)[x \in z \equiv (E\xi, \eta)(\xi \in u \,\&\, \eta \in v \,\&\, x = <\xi, \eta>)]$,

$\tau_6)$ $(u, x)(Ev)[x \in u \to x \overline{\in} v \,\&\, (z)(z \in u \equiv z = x \vee z \in v)]$.

$\tau_1)$ — это аксиома объемности; если множества u, v имеют одни и те же элементы, то они совпадают;

$\tau_2)$ утверждает существование пустого множества, которое мы будем обозначать через q_0.

$\tau_3) - \tau_6)$ позволяют из существования некоторых множеств заключить о существовании других множеств, получаемых из первых посредством следующих операций: окаймление (т. е. образование множества, содержащего в качестве своего единственного элемента исходное множество), сумма (двух слагаемых), прямое произведение и вычитание одного элемента из данного множества. Мы сохраним для этих операций обычные обозначения: $\{u\}$, $u \cup v$, $u \times v$, $u - \{v\}$. Согласно Геделю, через $<x, y>$ обозначаем упорядоченную пару из элементов x, y, которая определяется как множество $\{x, \{x, y\}\}$, где $\{x, y\}$ — множество из двух элементов x, y.

С помощью $\tau_1)$, $\tau_3)$, $\tau_4)$ доказывается существование пар, троек, ..., образованных из данных множеств (см. Г — Б).

Введем некоторые сокращенные обозначения:

$$q = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \underset{Df}{=} (z)(z \in q \equiv \bigvee_{i \leqslant k} (z = x_i)),$$

т. е. q состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Далее,

$$\tilde{q} = k \underset{Df}{=} (Ex_1, \ldots, x_k)\left[q = \{x_1, \ldots, x_k\} \,\&\, \bigwedge_{i<j\leqslant k} (x_i \neq x_j)\right],$$

т. е. q состоит из k различных элементов:

$$\tilde{q} > k \underset{Df}{=} (Ex_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\left[\,\&\, \bigwedge_{i\leqslant k+1} (x_i \in q) \,\&\, \bigwedge_{i<j\leqslant k} (x_i \neq x_j)\right].$$

Для любого k одними лишь средствами исчисления предикатов доказуемо предложение:

$$(q)[(Ex)(x \in q) \to \tilde{q} = 1 \vee \tilde{q} = 2 \vee \ldots \vee \tilde{q} = k \vee \tilde{q} > k]. \qquad (1)$$

Роль аксиом $\tau_1) - \tau_6)$ заключается в том, что они позволяют осуществить теоретико-множественные конструкции, описанные в приводимых ниже теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Из* $\tau_1) - \tau_6)$ *вытекает существование множеств любых конечных мощностей, т. е. для любого натурального* k *доказуемы предложения*:

$$(Eq)(\tilde{q} = k) \;\; и \;\; (Eq)(\tilde{q} > k).$$

Доказательство. Отправляясь от пустого множества q_0, можно построить следующие множества:

$$q_1 = \{q_0\},\ q_2 = \{q_0, q_1\}, \ldots,\ q_k = \{q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}\}, \ldots,$$

существование которых вытекает из $\tau_1) - \tau_4)$. q_k содержит в точности k элементов (в системе Геделя—Бернайса q_k изображает натуральное число k).

Условимся в следующих терминах:

Объемом n-местного предиката, определенного на множестве q, будем называть множество тех упорядоченных последовательностей из n элементов множества q, для которых предикат истинен.

Два элемента множества q считаются *неразличимыми* относительно некоторого фиксированного предиката, если значение предиката не меняется при замене одного из этих элементов, как значения аргумента предиката, другим из этих элементов, независимо от того, где именно происходит эта замена.

ТЕОРЕМА 2. *Из* $\tau_1) - \tau_6)$ *вытекает существование объема любого такого предиката на* q, *относительно которого все элементы множества* q, *за исключением, быть может, конечного числа их, попарно неразличимы.*

Доказательство приведем для двуместного предиката, ибо в других случаях оно протекает совершенно аналогично.

Пусть все элементы множества q, за исключением элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, попарно неразличимы относительно предиката $F(x, y)$. k-кратным применением $\tau_6)$ устанавливается существование множества

$$u = q - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},$$

состоящего из попарно неразличимых элементов.

Рассмотрим $(k+1)^2$ множеств:

$$<x_i, x_j>,\quad \{x_i\} \times u,\quad u \times \{x_j\},\quad u \times u,$$

где i, j пробегают независимо один от другого значения $1, 2, \ldots, k$. Существование этих множеств гарантируется аксиомами $\tau_3) - \tau_5)$. Объем предиката $F(x, y)$ является суммой нескольких из только что перечисленных множеств, а значит, существует в силу $\tau_4)$. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ попрежнему обозначают формулы узкого исчисления предикатов (и. п.). Сохраним эти же обозначения для формул, которые получатся из $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, если все входящие в них предикатные переменные связать кванторами общности. Известно, что истинность формулы $\mathfrak{A}$, не содержащей никаких свободных переменных, зависит только от мощности предметной области, а поэтому $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как утверждение о мощности некоторого множества q, взятого за предметную область. Но такое утверждение о множестве q можно выразить в терминах теории множеств и даже записать в виде формулы $\mathfrak{A}(q)$ исчисления τ. Для этого мы исходим из известной интерпретации формул и. п., при которой каждый предикат $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенный на множестве q, заменяется его объемом.

Формальный переход от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{A}(q)$ описывается следующим образом: Пусть $\mathfrak{A}(F^i, G^j, \ldots)$ — формула и. п. (без предикатных кванторов) и $Q(x)$ — предикатный символ, не встречающийся в ней. Обозначим через $\mathfrak{A}_Q(F^i, G^j, \ldots)$ формулу, получаемую из $\mathfrak{A}(F^i, G^j, \ldots)$ в результате ограничения всех входящих в нее предметных кванторов непустым предикатом $Q(x)$, т. е. заменой (x) на «$(x)(Q(x) \to$» и (Ex) на «$(Ex)(Q(x) \&\ldots)$» *. Подставим в $\mathfrak{A}_Q$ вместо предикатов

$$Q(x), \quad F(x_1, \ldots, x_i), \quad G(x_1, \ldots, x_j), \ldots$$

выражения

$$x \in q, \quad <x_1, \ldots, x_i> \in f, \quad <x_1, \ldots, x_j> \in g, \ldots$$

соответственно. Эти подстановки, которые мы будем называть допустимыми, превращают $\mathfrak{A}_Q(F^i, G^j, \ldots)$ в формулу $\mathfrak{A}(q, f, g, \ldots)$ исчисления τ.

Пример. Формуле

$$\mathfrak{A}(F, G) \underset{Df}{=} (x, y)(\overline{F}(x, y) \vee G(y, x))$$

соответствует в τ формула $\mathfrak{A}(q, f, g)$, где

$$\mathfrak{A}(q, f, g) \underset{Df}{=} (Ez)(z \in q) \to$$
$$\to (x)\{x \in q \to (Ey)(y \in q \,\&\, <x, y> \overline{\in} f \,\&\, <y, x> \in g)\}.$$

Если же в исходной формуле и. п. $\mathfrak{A}$ предикатные переменные связаны кванторами общности, то в формуле $\mathfrak{A}(f, g, \ldots, q)$ нужно связать ограниченными кванторами общности переменные $f, g, \ldots$. Окончательно $\mathfrak{A}(q)$ выглядит так:

$$(f)(g)\ldots[f \subset q^i \,\&\, g \subset q^j \,\&\ldots \mathfrak{A}(f, g, \ldots, q)],$$

где переменные f, g пробегают подмножества определенных степеней q^n множества q, а именно, переменная, соответствующая k-местному предикату формулы $\mathfrak{A}$, пробегает все подмножества k-й степени множества q. **

Рассмотрим формулу S класса K_Ω и соответствующую ей $S(q)$, где

$$S \equiv (x, y, z)([(P(x, y) \,\&\, P(x, z) \to y = z] \,\&\, [P(y, x) \,\&\, P(z, x) \to$$
$$\to y = z]) \,\&\, (x)(Ey)\, P(x, y) \to (y)(Ex)\, P(x, y).$$

Легко усмотреть, что $S(q)$ действительно есть утверждение о мощности q, а именно, утверждение о конечности q в смысле определения Дедекинда. Аналогично, всякой формуле $\mathfrak{A} \in K_\Omega$ соответствует в τ некоторое утверждение $\mathfrak{A}(q)$, выражающее условие конечности множества q. В этом смысле каждая формула $\mathfrak{A} \in K_\Omega$ порождает определение конечности множества, которое формулируется следующим образом: «q конечно, если $\mathfrak{A}(q)$».

---

* Поясним на примере: формула $(x)(Ey)\, F(x, y)$ переходит в результате такого ограничения в формулу

$$(Ex)\, Q(x) \to (x)[Q(x) \to (Ey)(Q(y) \,\&\, F(x, y))].$$

** q^n — это прямое произведение $\underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{n \text{ раз}}$

Под определением конечного множества мы будем понимать в дальнейшем всякое высказывание о множестве q, которое записывается в виде формулы $\mathfrak{A}(q)$, соответствующей формуле $\mathfrak{A}$ из K_Ω.

Мы будем говорить, что определение конечного множества, порожденное формулой $\mathfrak{A}$, сильнее определения, порожденного формулой $\mathfrak{B}$ (или что второе слабее первого), если в теории множеств τ доказуемо предложение:

$$(q)(\mathfrak{A}(q) \to \mathfrak{B}(q))$$

(читается: «всякое множество, конечное в смысле $\mathfrak{A}$, конечно и в смысле $\mathfrak{B}$»). В случае выводимости и обратной импликации будем считать определения эквивалентными.

Возникают следующие вопросы:

1) Доказуема ли в τ (например, в системе Геделя—Бернайса) эквивалентность всяких двух определений конечного множества?

2) Существует ли самое сильное или самое слабое определение конечности?

В этой статье оба эти вопроса решаются в отрицательном смысле (см. теоремы § 4).

§ 3

Основным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 3. *В аксиоматической теории множеств предложение*

$$(q)[\mathfrak{A}^m(q) \to \mathfrak{B}^s(q)],$$

где $\mathfrak{A}^m$ *и* $\mathfrak{B}^s$ *— формулы, лишенные предиката тождества, выводимо при* $m = 0, 1, 2, \ldots, s \geqslant m$ *или* $s = \omega$ *и опровержимо при* $s = 0, 1, 2, \ldots, m > s$ *или* $m = \omega$.

Доказательство этой теоремы основано на приводимых ниже трех леммах.

ЛЕММА 1. *Какова бы ни была тождественно истинная формула* $\mathfrak{A}(F, G, \ldots)$, *соответствующая ей формула* $\mathfrak{A}(q)$ *выводима в* τ.

Доказательство. $\mathfrak{A}_Q(F, G, \ldots)$ получается из $\mathfrak{A}(F, G, \ldots)$ ограничением ее предметных кванторов предикатом $Q(x)$ и поэтому также тождественно истинна, а значит и выводима в и. п. Для перехода к $\mathfrak{A}(q)$ остается еще произвести допустимые подстановки и связать кванторами переменные $f, g, \ldots$; поэтому $\mathfrak{A}(q)$ выводима в τ.

ЛЕММА 2. *Какова бы ни была* k*-тождественная формула* $\mathfrak{B}(F, H, \ldots)$, *в* τ *выводимо предложение*

$$(q)(\tilde{q} = k \to \mathfrak{B}(q)).$$

Доказательство. Построим формулу и. п.

$$\tilde{Q} = k \to \mathfrak{B}_Q(F, H, \ldots),$$

по своему смыслу означающую, что формула $\mathfrak{B}(F, H, \ldots)$ истинна, если в ней кванторы ограничиваются по множеству, насчитывающему k элементов. Легко усмотреть, что она тождественно истинна, а значит и вы-

водима из аксиом и. п. и аксиом тождества. Посредством допустимых подстановок осуществляется дальнейший переход к формуле

$$(q)(\tilde{q} = k \to \mathfrak{B}(q));$$

тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Какова бы ни была формула и. п., не содержащая предиката тождества и интерпретируемая в области из k элементов, в τ доказуемы предложения*:

$$(q)[\tilde{q} = k \to (Ef, g, \ldots)\mathfrak{A}(f, g, \ldots, q)], \tag{2}$$

$$(q)[\tilde{q} > k \to (Ef, g, \ldots)\mathfrak{A}(f, g, \ldots, q)]. \tag{3}$$

Доказательство. Для простоты изложения допустим, что $\mathfrak{A}$ содержит только один предикатный символ $F(x, y)$; в общем случае рассуждения аналогичны. Предположим сперва, что $\mathfrak{A}(F^2)$ имеет модель в области, состоящей из k элементов: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим через J множество всех тех пар $<i, j>$, для которых интерпретирующий предикат $F_0(x, y)$ при $x = a_i$ и $y = a_j$ истинен, и рассмотрим формулу:

$$(Ex_1, \ldots, x_k)\{[\&_{i<j\leqslant k}(x_i \neq x_j)\,\&\,(z)\vee_{i\leqslant k}(z = x_i)]\,\&\,[(x, y)(F(x, y) \equiv \equiv \vee_{<i, j>\in J}(x = x_i\,\&\,y = x_j))]\} \to \mathfrak{A}(F^2). \tag{4}$$

Формула утверждает, что $\mathfrak{A}(F^2)$ истинно, когда предметная область состоит из k различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а предикат $F(x, y)$ ведет себя на этих элементах как интерпретирующий предикат $F_0(x, y)$ на $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Это позволяет легко усмотреть тождественную истинность формулы (4), а значит и ее выводимость в и. п. с аксиомами тождества. Ограничив кванторы формулы (4) новым предикатным символом $Q(x)$ и произведя затем допустимые подстановки, мы получим формулу исчисления τ, из которой одними лишь правилами и. п. легко выводится:

$$(Ex_1, \ldots, x_k)\ [\&_{i<j\leqslant k}(x_i \neq x_j)\,\&\,q = \{x_1, \ldots, x_k\}\,\& \\ \&\,(z)(z \in f \equiv \vee_{<i, j>\in J}(z = <x_i, x_j>))] \to \mathfrak{A}(f, q). \tag{5}$$

Рассмотрим интерпретацию $\mathfrak{A}(F^2)$ в области, насчитывающей более k элементов. Известно, что такую можно легко извлечь из интерпретации в области, насчитывающей k элементов *, следующим образом. Пусть u — множество элементов предметной области, отличных от $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим через L множество таких l, для которых $F_0(a_l, a_k)$ истинно (в прежней модели), и через M — множество таких m, для которых $F_0(a_k, a_m)$ истинно (там же). Объем F интерпретирующего предиката большей мощности можно определить так: он содержит все пары $<a_i, a_j>$, где $<i, j> \in J$, и все пары вида $<a_l, y>$ и $<x, a_m>$, где

* Здесь учтено то, что в формуле $\mathfrak{A}$ нет предиката тождества (см. § 1, II).

$l \in L$, $m \in M$ и x, y — произвольные элементы u; если $<k, k> \in J$, то он будет содержать и все пары $<x, x>$, где $x \in u$. Иными словами, объем этого интерпретирующего предиката есть теоретико-множественная сумма следующих множеств:

$$\{<a_i, a_j>\}, \quad \{a_l\} \times u, \quad u \times \{a_m\},$$

где $<i, j> \in J$, $l \in L$, $m \in M$. Это означает, что интерпретирующий предикат доопределяется на всех элементах x, отличных от $a_1, a_2, \ldots, a_k$ путем «склеивания» x с элементом a_k.

Сообразно этому, по аналогии с (4), строим тождественно истинную формулу (6), утверждающую, что $\mathfrak{A}(F^2)$ истинно, когда в предметной области можно выделить k элементов $x_1, \ldots, x_k$, участвующих в определении предиката $F(x, y)$ так, как это было только что указано; при этом множество u элементов, попарно неразличимых относительно $F(x, y)$, описывается в этой формуле как объем одноместного предиката $U(x)$:

$$(Ex_1, \ldots, x_k)(T(x_1, \ldots, x_k) \& S(x_1, \ldots, x_k)) \to \mathfrak{A}(F^2), \tag{6}$$

где

$$T(x_1, \ldots, x_k) = \underset{Df}{\&}_{i<j\leqslant k} (x_i \neq x_j) \& (x)\left[\overline{U(x)} = \bigvee_{i\leqslant k} (x = x_i)\right] \& (Ex)\, U(x)$$

и

$$S(x_1, \ldots, x_k) = \underset{Df}{(x, y)}\{F(x, y) = \bigvee_{<i, j>\in J} (x = x_i \& y = x_j) \bigvee_{l\in L} (x = x_l \& U(y)) \bigvee_{\in M m} (U(x) \& y = x_m)\}.$$

При помощи ограничения кванторов и допустимых подстановок можно выразить утверждение, содержащееся в (6), в виде выводимой в τ формулы (7), аналогичной (5):

$$(f, q)(\mathfrak{N}(f, q) \to \mathfrak{A}(f, q)\}. \tag{7}$$

Здесь в посылке $\mathfrak{N}(f, q)$ как раз и дается приведенное выше описание предметной области q и предиката f, относительно которого все элементы множества u попарно неразличимы.

Дальнейшие рассуждения опираются уже на аксиомы $\tau_1) - \tau_6)$. На основании теорем § 2, существуют множества мощности k и больше и на каждом таком множестве существует объем предиката, описанного в формуле (5) или в формуле (7), а отсюда вытекают предложения леммы 3. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть даны произвольные формулы $\mathfrak{A}^m$ и $\mathfrak{B}^s$ $(m \leqslant s)$. По лемме 2, в τ выводимы предложения:

$$(q)[\widetilde{q} = k \to \mathfrak{A}^m(q)] \quad \text{и} \quad (q)[\widetilde{q} = k \to \mathfrak{B}^s(q)] \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Применяя лемму 3 к формуле $\overline{\mathfrak{A}}^m$, можно установить выводимость в τ формул:

$$(q)\,[\tilde{q} = m+1 \to \overline{\mathfrak{A}}^m(q)], \quad (q)\,[\tilde{q} > m+1 \to \overline{\mathfrak{A}}^m(q)].$$

Поэтому в τ выводимо предложение:

$$\&_{k \leqslant m}\,[(q)\,(\tilde{q} = k \to (\mathfrak{A}^m(q) \to \mathfrak{B}^s(q)))]\,\&\,(q)\,[\tilde{q} > m \to (\mathfrak{A}^m(q) \to \mathfrak{B}^s(q))],$$

которое, совместно с формулой (1) § 2, влечет за собой предложение:

$$(q)\,[\mathfrak{A}^m(q) \to \mathfrak{B}^s(q)].$$

Допустим, что $m > s$ или $m = \omega$ и $s = 0, 1, 2, \ldots$, и рассмотрим формулы $\mathfrak{A}^m$ и $\mathfrak{B}^s$. Для множества q_{s+1}, насчитывающего $s+1$ элемент (см. теорему 1 § 2), выводимы предложения:

$$\mathfrak{A}^m(q_{s+1}) \quad \text{и} \quad \overline{\mathfrak{B}^s(q_{s+1})},$$

что непосредственно влечет за собой

$$(Eq)\,(\mathfrak{A}^m(q)\,\&\,\overline{\mathfrak{B}}^s(q)),$$

т. е. опровержимость предложения

$$(q)\,(\mathfrak{A}^m(q) \to \mathfrak{B}^s(q)).$$

Теорема доказана.

§ 4

ТЕОРЕМА 4. *В аксиоматической теории множеств не существует ни самого сильного, ни самого слабого определения конечного множества.*

В этой теореме содержатся два утверждения, которые мы установим последовательно.

Утверждение 1. *Какова бы ни была формула* $\mathfrak{A}^\Omega$, *существует такая формула* $\mathfrak{B}^\Omega$, *что предложение*

$$(q)\,(\mathfrak{A}^\Omega(q) \to \mathfrak{B}^\Omega(q))$$

не доказуемо в τ.

Доказательство. Рассмотрим рекурсивную совокупность формул исчисления τ вида

$$(q)\,(\mathfrak{A}^\Omega(q) \to \mathfrak{B}(q)), \tag{8}$$

где $\mathfrak{B}$ — произвольная формула и. п., лишенная знака $=$, и $\mathfrak{A}^\Omega$ фиксирована, и обозначим через K множество тех $\mathfrak{B}$, для которых (8) доказуемо; легко усмотреть, что K рекурсивно-перечислимо. Если $\mathfrak{B}$ строго n-тождественная ($n = 0, 1, 2, \ldots$), то, по теореме 3, $\mathfrak{B} \overline{\in} K$, а потому K есть часть класса K_ω. Но K_ω неперечислимо рекурсивно, следовательно, K образует собственную часть K_ω. С другой стороны, из $\mathfrak{B} \in P$ следует, что $\mathfrak{B} \in K$ (см. лемму 1). Но $K_\omega = P \cup K_\Omega$; следовательно, существует такая формула $\mathfrak{B}$, для которой одновременно верно:

$$\mathfrak{B} \in K_\Omega, \quad \mathfrak{B} \overline{\in} K,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Если* $\mathfrak{B}^{\Omega}(q)$ *не выводимо в* τ, *то существует такая формула и. п.* $\mathfrak{A}^{\Omega}$, *что*

$$(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q) \to \mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right)$$

также не выводимо в τ.

Доказательство. Рассмотрим совокупность формул вида

$$(q)\left(\mathfrak{A}(q) \to \mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right), \tag{9}$$

где $\mathfrak{A}$ — произвольная формула и. п., не содержащая предиката тождества, и обозначим через L множество тех формул $\mathfrak{A}$, для которых (9) выводима. Очевидно, множество L рекурсивно-перечислимо.

Если $\mathfrak{A} \in P$, то $\mathfrak{A} \overline{\in} L$, в силу условия о невыводимости в τ формулы $(q)\mathfrak{B}^{\Omega}(q)$. Но дополнение к классу P во множестве всех формул и. п., не содержащих знака $=$, неперечислимо рекурсивно, и поэтому L составляет собственную часть этого дополнения.

С другой стороны, согласно теореме 3, всякая строго k-тождественная формула ($k = 1, 2, \ldots$) и всякая формула класса k_0 принадлежит L; отсюда следует существование такой формулы $\mathfrak{A}$, для которой одновременно имеет место: $\mathfrak{A} \in K_{\Omega}$ и $\mathfrak{A} \overline{\in} L$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Теорема в целом и каждое из утверждений в отдельности устанавливают существование таких предложений вида

$$(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q) \to \overline{\mathfrak{B}^{\Omega}(q)}\right),$$

формулируемых в терминах τ, которые истинны содержательно, но недоказуемы в этой теории. Если потребовать, чтобы из рассматриваемой системы аксиом теории множеств не были выводимы (содержательно-ложные) предложения вида

$$(Eq)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q) \,\&\, \mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right),$$

то, на основании вышесказанного, можно было бы заключить о существовании в τ неразрешимых предложений вида $(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q) \to \mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right)$.

Очевидно, выполнение такого требования* влечет за собою и формальную непротиворечивость рассматриваемой системы, но обратное, вообще говоря, неверно. Мы установим существование неразрешимых предложений такого вида при предположении одной лишь формальной непротиворечивости τ.

ТЕОРЕМА 5. *В аксиоматической теории множеств существуют неразрешимые предложения вида:*

$$(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q) \to \mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть A и B — рекурсивно-перечислимые множества, не отделимые рекурсивно. Как уже указывалось раньше**, существуют формулы

$$\mathfrak{A}(M^1, \ldots) \,\&\, \tilde{M} = k \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}(M^1, \ldots) \,\&\, \tilde{M} = k,$$

* Это — аналог ω-непротиворечивости.

** См. § 1, IV.

не содержащие предиката тождества, такие, что при любом натуральном k

1) $k \in A$ равносильно интерпретируемости в конечном

$$\mathfrak{A}(M^1, \ldots) \& \tilde{M} = k;$$

2) $k \in B$ равносильно интерпретируемости в конечном

$$\mathfrak{B}(M^1, \ldots) \& \tilde{M} = k.$$

Без ограничения общности можно считать, что в бесконечной области

$$\mathfrak{A}(M^1, \ldots) \& \tilde{M} = k$$

интерпретируема при любом k. В самом деле, достаточно взять вместо $\mathfrak{A}$ формулу $\mathfrak{A} \vee S$, где S — произвольная формула, не имеющая общих предикатов с $\mathfrak{A}$ и интерпретируемая только в бесконечной области. Аналогичное предположение можно сделать и относительно $\mathfrak{B}$.

Введем обозначения $\mathfrak{A}_m$ для

$$\overline{\mathfrak{A}(M^1 \ldots) \& \tilde{M} = m}$$

и $\mathfrak{B}_m$ для

$$\overline{\mathfrak{B}(M^1, \ldots) \& \tilde{M} = m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Если $m \in A$, то $\mathfrak{A}_m$, в силу 1), строго k-тождественна при некотором k, зависящем от m. Если же $m \overline{\in} A$, то $\mathfrak{A}_m$ — формула класса K_Ω. То же самое верно для B и для $\mathfrak{B}_m$.

Рассмотрим рекурсивную совокупность предложений S_m $(m = 1, 2, \ldots)$, определенных следующим образом:

$$S_m \underset{Df}{=} (q)(\mathfrak{A}_m(q) \to \mathfrak{B}_m(q)).$$

Пусть S' — множество тех m, для которых S_m доказуемо, и S'' — множество тех m, для которых S_m опровержимо. S' и S'' не пересекаются; кроме того, S' и S'' рекурсивно-перечислимы.

Покажем, что имеют место включения:

$$A \subset S', \quad B \subset S''. \tag{11}$$

Действительно, пусть $m \in A$, а следовательно, $m \overline{\in} B$; тогда, по сказанному выше, $\mathfrak{A}_m$ строго k-тождественна (при некотором k), а $\mathfrak{B}_m$ тождественна в конечном; значит, по теореме 3, S_m доказуемо, т. е. $m \in S'$.

Пусть теперь $m \in B$, а следовательно, $m \overline{\in} A$; тогда $\mathfrak{A}_m$ тождественна в конечном и $\mathfrak{B}_m$ строго k-тождественна. По теореме 3, S_m опровержимо, и, следовательно, $m \in S''$.

$S' \cup S''$ не содержит всех натуральных чисел, ибо в противном случае S' и S'', как пара рекурсивно-перечислимых множеств, дополняющих одно другое, были бы рекурсивными множествами; но это невозможно, поскольку S' и S'', согласно (11), отделяют множества A и B, которые, по предположению, не отделимы рекурсивно.

С другой стороны, если $m \overline{\in} S' \cup S''$, то $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{B}_m$ принадлежат классу K_Ω, а значит, S_m является неразрешимым предложением вида (10). Теорема доказана.

Опираясь на отмеченную в § 1 теорему о рекурсивной неотделимости классов формул P и R, можно усилить теорему следующим образом:

ТЕОРЕМА 6. *Для всякой* $\mathfrak{A}^{\Omega}(q)$ *существуют такие* $\mathfrak{B}^{\Omega}(q)$ *и* $\mathfrak{C}^{\Omega}(q)$, *что предложения*

$$(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q)\to\mathfrak{B}^{\Omega}(q)\right) \quad и \quad (q)\left(\mathfrak{C}^{\Omega}(q)\to\mathfrak{A}^{\Omega}(q)\right)$$

неразрешимы в системе τ.

Доказательство. Рассмотрим предложения вида:

$$(q)\left(\mathfrak{A}^{\Omega}(q)\to\mathfrak{B}(q)\right), \tag{12}$$

где $\mathfrak{B}(q)$ происходит от произвольной формулы и. п., лишенной предиката тождества.

Обозначим через A_1 совокупность тех формул $\mathfrak{B}$ исчисления предикатов, для которых соответствующие предложения вида (12) выводимы в τ, и через A_2 — совокупность тех, которым соответствуют опровержимые в τ предложения. A_1 и A_2 — непересекающиеся рекурсивно-перечислимые множества. Из леммы 1 § 3 вытекает: $A_1 \supset P$, а по теореме 3 $A_2 \supset R$. Поскольку P неотделимо рекурсивно от R, непересекающиеся и рекурсивно-перечислимые A_1 и A_2 не могут быть рекурсивными, а значит, их теоретико-множественная сумма не содержит всех формул и. п.

Рассмотрим какую-нибудь формулу из дополнения к $A_1 \cup A_2$: она принадлежит дополнению к $P \cup R$, т. е. является некоторой формулой $\mathfrak{B}^{\Omega}$. Очевидно, соответствующее ей предложение вида (12) не выводимо и не опровержимо в τ. Таким образом, первая часть теоремы доказана. Совершенно аналогично устанавливается и существование формулы $\mathfrak{C}^{\Omega}(q)$, которое гарантируется теоремой. Для этого достаточно рассмотреть совокупность предложений вида $(q)\left(\mathfrak{C}(q)\to\mathfrak{A}^{\Omega}(q)\right)$, где $\mathfrak{C}(q)$ происходит от произвольной формулы и. п.

Поступило
15. VI. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гедель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, Успехи матем. наук. т. III., вып. 1 (23) (1948), 96—149).

[2] Mostowski A., Über der Begriff des endlichen Menge, Sprawozdanja tow. rank. Warsz. Wydzial, III (1938), 13.

[3] Трахтенброт Б. А., Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, Доклады Ак. наук СССР, 70 (1953), 569—572.

[4] Трахтенброт Б. А., О рекурсивной отделимости, Доклады Ак. наук СССР, 88 (1953), 953—956.

[5] Fränkel A., Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Leipzig, 1927.

[6] Зыков А. А., Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 63—76.

[7] Успенский В. А., Теорема Геделя и теория алгоритмов, Доклады Ак. наук СССР, 91 (1953), 737—740.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 583—584

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей работе «Теория символа Шафаревича» (1) при доказательстве теорем 1 и 8 используется лемма 1, которая справедлива только при некоторых предположениях, не выполняющихся в тех случаях, в которых применяется эта лемма *. Ниже мы даем исправление доказательств указанных теорем.

Заметим, что в теоремах 1 и 8 лемма 1 применяется только в случае, когда $(\lambda) \equiv 0\,(p)$; в остальных случаях доказательство вполне корректно. Но случай $(\lambda) \equiv 0\,(p)$ сводится к остальным, доказательство которых не опирается на лемму 1.

Действительно, если

$$(\lambda, \mu) = 1. \tag{1}$$

$$\lambda \approx \pi^{p^r a}\eta,$$

где $a \not\equiv 0 \pmod p$, то λ есть норма числа $\pi^a H$ из неразветвленного расширения $k_\omega^r = k\left(\sqrt[p^r]{\omega}\right)$. Применяя формулу сдвига для неразветвленных расширений, которая доказывается в работе (1) без использования леммы 1, к равенству (1), получим:

$$1 = (\lambda, \mu) = (\pi^a H, \mu)_{k_\omega^{(r)}},$$

и так как $a \not\equiv 0\,(p)$, то из последнего равенства следует, что $\pi^a H$ есть норма числа Γ из $k_{\mu,\omega}$, а значит,

$$\lambda = N_\omega \pi^a H = N_\omega N_\mu \Gamma = N_\mu N_\omega \Gamma.$$

Пусть теперь

$$\lambda = N_\mu \Lambda; \tag{2}$$

докажем, что $(\lambda, \mu) = 1$.

Будем различать два случая:

1) одно из чисел λ, μ — единица из k;

2) ни одно из чисел λ, μ не является в k единицей.

1. Пусть $\bar\lambda = \lambda\omega$, где $\delta_\pi(\bar\lambda) \approx 1$. Тогда

$$(\pi, \lambda\omega)_\pi = 1$$

и, значит, $\pi = N_{\lambda\omega}\Pi$. Так как λ — единица, то

$$\lambda = N_\omega \Lambda_1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\lambda = N_{\mu\,\omega}(\Lambda_2)$ и, значит, $\pi\lambda = N_{\mu\omega}(\Gamma)$, где $\Gamma = \Lambda_2\Pi$. Так как $w(\pi\lambda) \not\equiv 0\,(p)$, то из последнего равенства следует:

$$1 = (\pi\lambda, \mu\omega) = (\pi, \mu\omega)(\lambda, \mu)(\lambda, \omega)$$

и, значит, $(\lambda, \mu) = 1$.

2. Подберем число a так, чтобы число $\xi = \mu\lambda^{-a}$ было единицей из k. Так как $\lambda = N_\mu \Lambda$, то $\lambda = N_\xi \Lambda_1$. Отсюда, по доказанному,

$$1 = (\lambda, \xi) = (\lambda, \mu\lambda^{-a}) = (\lambda, \mu).$$

Кроме того, лемма 1 была использована в работе (2) при доказательстве теорем, аналогичных теоремам 1 и 8 работы (1), а также при доказательстве общей формулы

---

* На это указал Кнезер, реферируя мою работу (1) (см. Zentralblatt, B. 52, H. 6/10 (1955), 274).

сдвига. В этой формуле лемма 1 использовалась для доказательства следующего утверждения:

Если ε — единица из k и $\nu = N_\varepsilon B_\varepsilon$, то из равенства $(\mu, \nu) = 1$ следует равенство $(\mu, B_\varepsilon)_\varepsilon = 1$.

Это доказательство можно провести без использования леммы 1 следующим образом. Пусть $\mu = \lambda^a \xi$. Будем различать два случая:

1) $a \not\equiv 0 (l)$ и

2) $a \equiv 0 (l)$.

В первом случае выбираем a' из условия $aa' \equiv 1 (l)$. Заменяя μ на $\mu^{a'}$, мы можем считать μ простым числом. По условию, $\nu = N_\varepsilon B_\varepsilon$, и так как $(\mu, \nu) = 1$, то, в силу теоремы 1 работы [2], $\nu = N_\mu B_\mu$.

Далее, в силу той же теоремы и п. 1 теоремы 2, имеем:

$$1 = (\varepsilon, \nu) = (\varepsilon, B_\mu)_\mu.$$

Следовательно, $B_\mu = N_\varepsilon B_{\mu, \varepsilon}$ и, значит,

$$\nu = N_\mu B_\mu = N_\mu N_\varepsilon B_{\mu, \varepsilon} = N_\varepsilon N_\mu B_{\mu, \varepsilon} = N_\varepsilon B_\varepsilon.$$

Отсюда, по теореме Гильберта, получаем:

$$B_\varepsilon = \Gamma^{1-\sigma} N_\mu B_{\mu, \varepsilon},$$

где σ — автоморфизм $k_{\mu, \varepsilon} | k_\mu$. По теореме 1 и лемме 11 работы [2] отсюда следует, что $(\mu, B_\varepsilon) = 1$.

Второй случай, когда $a \equiv 0 (l)$, можно свести к первому точно таким же путем, как это было нами сделано в исправлении к работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лапин А. И., Теория символа Шафаревича, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 31—50.

[2] Лапин А. И., К теории символа Шафаревича, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 145—158.

А. И. Лапин

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 585—610

Н. Н. БОГОЛЮБОВ и О. С. ПАРАСЮК

О ВЫЧИТАТЕЛЬНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ПРИ УМНОЖЕНИИ ПРИЧИННЫХ ФУНКЦИЙ

В работе приведено математическое обоснование вычитательного формализма квантовой теории поля на базе теории обобщенных функций.

Введение

Задача умножения причинных функций, как и сами причинные функции, возникла в квантовой теории поля при построении матрицы рассеяния с помощью теории возмущений.

Так как причинные функции не являются функциями в обычном, классическом смысле и точно могут быть определены лишь как линейные функционалы на пространстве гладких функций (обобщенные функции в смысле Соболева — Шварца), то задача умножения этих функций отнюдь не является тривиальной.

Если, например, действовать формально и находить импульсный образ произведения причинных функций, то мы встретимся с расходящимися интегралами при больших импульсах (расходящиеся интегралы квантовой теории поля).

Таким образом возникает проблема придания конечного значения этим расходящимся интегралам. Попытка решения этой задачи привела к разработке специальной вычитательной процедуры [см. Фейнман ([1]), Дайсон ([2]), Салам ([3])]. Однако до настоящего времени исследования по этому вопросу не получили надлежащего завершения.

Наиболее глубокая в этой области работа Салама ([3]) не содержит достаточно четкого определения вычитательной процедуры, а эффективность последней затемнена использованием понятия «базисных переменных».

Содержащееся в работе ([3]) доказательство теоремы о том, что вычитание действительно приводит к конечным результатам, не является строгим, а сама вычитательная процедура математически не осмыслена.

Новый подход к этим трудным вопросам, основанный на развитии идей Штюкельберга, разработан в цикле статей ([4]).

В этих работах построены разложения для матрицы рассеяния на основе четырех физических постулатов:

1) соответствие с классической теорией,

2) лоренцинвариантность,

3) унитарность,

4) причинность,

заменяющих гамильтоновский формализм.

При этом показано, что в отличие от обычного подхода, приводящего для n-го приближения матрицы рассеяния к формуле

$$S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = i^n T[L(x_1) L(x_2) \ldots L(x_n)],$$

новый подход дает для S_n более общее выражение:

$$S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = i^n T[L(x_1) L(x_2) \ldots L(x_n)] +$$

$$+ \sum_{\substack{2 \leqslant m \leqslant n-1 \\ \sum \nu_i = n}} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \ldots, x_{\nu_1} | \ldots | \ldots x_n) T[A_{\nu_1}(x_1, \ldots, x_{\nu_1}) \ldots A_{\nu_m}(\ldots x_n)] +$$

$$+ iA_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где $L(x)$ — лагранжиан взаимодействующих полей, T — символ хронологического умножения, P — символ симметризации. Входящие в формулу (1) выражения являются произвольными квази-локальными операторами [см. (4)].

Эти операторы и используются для устранения расходимостей в коэффициентных функциях операторного выражения $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Явная запись этих коэффициентных функций немедленно приводит к формулировке вычитательной процедуры, называемой ниже операцией R.

Изучению математических вопросов, связанных с применением R-операции к определению произведения причинных функций, и посвящена настоящая работа. Ее результаты фактически уже использовались в статьях (4) и позволили провести строгое обоснование употребляемой там процедуры.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части, в первом параграфе даны краткие сведения из теории причинных функций.

Во втором параграфе формулируется задача умножения причинных функций и анализируются трудности, связанные с ее решением.

В третьем параграфе определяется вычитательная операция R и исследуются ее комбинарные свойства.

Во второй части, в первом параграфе исследуются аналитические свойства операции R, выражением которых являются теоремы 1, 2, 3.

Во втором параграфе приведены заключительные соображения по поводу решаемой задачи.

Несколько замечаний по поводу применяемых обозначений: всюду в дальнейшем аргументы функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки четырехмерного пространства времени, $k_i = (k_i^0, k_i^1, k_i^2, k_i^3)$ — четырехмерные векторы импульса $kx = k^0x^0 - k^1x^1 - k^2x^2 - k^3x^3$, $\delta(x)$ — символ четырехмерной функции Дирака, $dk = dk^0dk^1dk^2dk^3$, $dx = dx^0dx^1dx^2dx^3$ и т. д.

Настоящую работу можно рассматривать как полное изложение результатов работ (5), (6).

ЧАСТЬ 1

§ 1. Причинные функции квантовой теории поля

Причинные функции квантовой теории поля являются обобщенными функциями в смысле теории Соболева — Шварца [см. (7), (8)]. При определении обобщенных функций необходимо выбрать сначала пространство основных функций, после чего обобщенные функции определяются как линейные функционалы на этом пространстве. Для наших целей удобно взять за основное пространство сумму пространств

$$\sum_{q,\,r} C(q, r, n),$$

где $C(q, r, n)$ — пространство функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающих производными до порядка q и таких, что все произведения

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}} \tag{1.1}$$

$$(s = 0, 1, \ldots, r, \quad p = 0, 1, \ldots, q, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

ограничены.

Итак, линейные функционалы $K(F)$ на пространствах $C(q, r, n)$ (q, r — какие угодно целые числа) условимся называть обобщенными функциями, употребляя при этом также обозначение

$$K(F) \equiv K(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.1}$$

Иногда более удобно задавать обобщенные функции как слабые пределы функционалов типа функции. Если, например, имеется последовательность обычных функций $K_M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые, кроме того, порождают линейные функционалы $K_M(F)$ на пространстве $C(q, r, n)$, и если существует слабый предел

$$K_M(F) \to K(F), \tag{3.1}$$

то $K(F)$ будет линейным функционалом, следовательно, обобщенной функцией в нашем определении.

Не представляет труда перенести основные факты теории обобщенных функций на вводимый выше класс обобщенных функций, что будет сделано в другом месте.

Причинная функция $D^c(x)$ может быть теперь совершенно строго определена соотношением

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} D^c(k)\, dk, \tag{4.1}$$

где

$$D^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}, \tag{5.1}$$

причем предел по ε следует понимать как слабый предел.

Наряду с функциями $D^c(x)$ будем рассматривать также и более общие функции:

$$\Delta^c(x) = P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) D^c(x),$$

где P — некоторый полином.

Функции $D^c(x)$, $\Delta^c(x)$, как это хорошо известно, имеют особенности на световом конусе, вследствие чего они являются обобщенными, или, как принято говорить среди физиков, сингулярными функциями.

Поэтому приобретает интерес тот факт, что всегда существует последовательность $\operatorname{reg}\Delta^c_M(x)$ обычных регулярных и лоренцинвариантных функций, которая слабо сходится к $\Delta^c(x)$ при $M\to\infty$. Метод построения такой последовательности носит название регуляризации Паули — Вилларса [см. (4)]. Для получения такой последовательности составляют линейную комбинацию функций $\Delta^c(x)$ с различными массами M_i:

$$\operatorname{reg}\Delta^c(x)=\Delta^c(x)+\sum_{1\leqslant j\leqslant l} c_j\Delta^c_{M_j}(x), \tag{6.1}$$

причем должны выполняться дополнительные условия:

$$\begin{aligned} 1+\sum_j c_j &= 0,\\ m^2+\sum_j c_j M_j^2 &= 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m^{2(l-1)}+\sum_j c_j M_j^{2(l-1)} &= 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

гарантирующие сокращение особенностей.

Лучше всего смысл условий (7.1) может быть выяснен, если воспользоваться равенством:

$$\frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon}=i\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2-k^2-i\varepsilon)}d\alpha \tag{8.1}$$

и записать $D^c(x)$ в виде

$$D^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}D^c(k)\,dk=\frac{1}{2^4\pi^2}\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2-i\varepsilon)}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}i}\,\frac{d\alpha}{\alpha^2}. \tag{9.1}$$

Из формулы (9.1) видно, что особенности функции $D^c(x)$ происходят, в частности, от полюса при $\alpha=0$. Но теперь функция $\operatorname{reg}\Delta^c(x)$ может быть записана в виде:

$$\operatorname{reg}\Delta^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}e^{ikx}\left\{iP(k)\int_0^\infty I(\alpha)\,e^{i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)}d\alpha\right\}dk, \tag{10.1}$$

где функция

$$I(\alpha)=1+\sum c_j e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)} \tag{11.1}$$

имеет, в силу условий (7.1), нули достаточно высокого порядка при $\alpha=0$. Эти нули как раз и погашают полюсы в нуле и в результате $\operatorname{reg}\Delta^c(x)$ обладают нужной нам регулярностью. Легко обнаружить также существование предельного соотношения в смысле слабой сходимости:

$$\operatorname{reg}\Delta^c(x)\to\Delta^c(x)$$

при устремлении соответствующим образом масс M_j к бесконечности.

В дальнейшем условимся представление причинной функции в виде (9.1) называть α-представлением.

§ 2. Задача умножения причинных функций

Рассмотрим в четырехмерном пространстве-времени диаграмму G с узлами $x_r\,(r = 1, 2, \ldots, n)$ и направленными линиями l, соединяющими произвольным образом узлы x_r между собой. Каждой линии l, ведущей от x_r к x_s, сопоставим причинную функцию $\Delta_l^c(x_r - x_s)$ и образуем формально произведение

$$\prod_l \Delta_l^c(x_r - x_s), \quad l = 1, 2, \ldots, L \tag{1.2}$$

которое назовем вкладом от диаграммы $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Целью настоящей работы является развитие теории произведений вида (1.2).

Как раз такие произведения необходимы в квантовой теории поля при построении матрицы рассеяния.

Легко убедиться в том, что формальный импульсный образ этого произведения будет

$$I(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \int \prod_r \delta\Big(k_r + \sum e_l^r p_l\Big) \prod_l \Delta_l^c(p_l)\, dp_l, \tag{2.2}$$

где $e_l^r = 1, -1, 0$, в зависимости от того входит, выходит, или вообще не проходит линия l через узел r. На примерах простейших диаграмм можно проверить, что $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ может не иметь смысла вследствие расходимости интегралов при больших импульсах.

Чтобы лучше понять аналитический смысл этого явления, введем в формулу (2.2) вместо функций Δ_l^c регуляризованные причинные функции

$$\operatorname{reg} \Delta_l^c(p_l). \tag{3.2}$$

Воспользуемся, кроме того, α-представлением для причинных функций

$$\operatorname{reg} \Delta_l^c(p_l) = iP_l(p_l) \int_0^\infty I(\alpha_l)\, e^{i\alpha_l(p_l^2 - m_l^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha_l, \tag{4.2}$$

после чего выражение $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ примет вид:

$$I_M(k_1, k_2, \ldots, k_n) = i^L \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_L e^{i\sum\limits_l \alpha_l (i\varepsilon - m_l^2)} \prod_l I(\alpha_l) \cdot$$

$$\cdot \int\int \ldots \int \prod_l P_l(p_l)\, e^{i\alpha_l p_l^2} \prod_r \delta\Big(k_r + \sum_l p_i e_l^r\Big)\, dp_1 dp_2 \ldots dp_L. \tag{5.2}$$

Имеет место

ЛЕММА 1. *Выражение* $I_M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *может быть приведено к виду*

$$I_M(\ldots k \ldots) = \delta\Big(\sum k\Big) \int_0^\infty \ldots d\alpha_l \ldots \prod_l I(\alpha_l)\, e^{-i\sum \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum \alpha_l} \cdot$$

$$\cdot f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L) \equiv \delta\Big(\sum k\Big) \cdot I_M(\ldots k \ldots), \tag{6.2}$$

где

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \equiv f(\ldots k \ldots \alpha \ldots) = F(\ldots k \ldots \alpha \ldots) e^{i \sum A_{ab}(\alpha) x_a x_b},$$

$$(a = 1, 2, \ldots, n-1, \quad b = 1, 2, \ldots, n-1),$$

причем функция $F(\ldots k \ldots \alpha \ldots)$ *является полиномом по* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *и рациональной функцией по* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ *с полюсами при* $\alpha_l = 0$, *форма* $\sum A_{ab}(\alpha) x_a x_b$ *— положительно определенная,* $A_{ab}(\alpha)$ *— однородные рациональные функции первой степени по* α_l.

Прежде чем перейти к доказательству этого важного предложения, отметим, что формула (6.2) наглядно показывает, что при снятии регуляризации, т. е. при устремлении $I(\alpha_l) \to 1$ в выражении (6.2) появляются особенности из-за полюсов при $\alpha_l = 0$. До снятия регуляризации эти особенности устраняются нулями функций $I(\alpha_l)$.

Доказательство леммы проведем с помощью математической индукции по числу линий l и узлов r диаграммы. Легко проверить, что утверждение верно для диаграммы из одной линии и двух узлов. Далее заметим, что диаграмма любой сложности возникает из этой простейшей путем добавления новой линии, соединяющей старые узлы, или же нового узла, соединенного со старыми узлами новой линией. Поэтому достаточно изучить, что происходит с выражением (6.2) при добавлении к диаграмме одной новой линии, соединяющей старые узлы, или нового узла, соединенного новой линией со старыми узлами.

Рассмотрим сначала первый случай. Не нарушая общности, можно предположить, что новая линия соединяет узел 1 с узлом 2. Причинную функцию новой линии обозначим через

$$\operatorname{reg} \Delta^c(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} \left\{ iZ(p) \int_0^\infty I(\alpha) e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha \right\}. \qquad (7.2)$$

Тогда

$$\operatorname{reg} \Delta^c(x_1 - x_2) \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c(x_l - x_s) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4L+4}} \int \operatorname{reg} \Delta^c(p) e^{ip(x_1 - x_2)} \delta\left(\sum k_a\right) J_M(\ldots k \ldots) e^{i \sum k_a x_a} dp\, dk_1 dk_2 \ldots dk_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4L+4}} \int e^{i \sum k_a x_a} \delta\left(\sum k_a\right) \int J_M(k_1 - p, k_2 + p, k_3, \ldots, k_n) \Delta^c(p)\, dp. \qquad (8.2)$$

т. е.

$$f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_L, \alpha) = \int Z(p) e^{i\alpha p^2} f(k_1 - p, k_2 + p, \ldots, k_n, \alpha) dp, \qquad (9.2)$$

где звездочка над выражением f означает, что оно подсчитано для новой диаграммы.

Так как

$$f(k_1 - p, k_2 + p, \ldots) = F(k_1 + ep, k_2 + ep, \ldots)\, e^{i\sum A_{ab}(k_a+ep)(k_b+ep)} =$$

$$= F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \ldots)\, e^{i\sum A_{ab}(k_a+ep)(k_b+ep)+i\sum(k_a+ep)q_a}\,|_{q_a=0}, \qquad (10.2)$$

где $e = \pm 1$ или 0, а ∇q — символ градиента, то квадратура по p может быть выполнена. Действительно,

$$f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots, \alpha) = Z(-i\nabla q)\, F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \ldots)\cdot$$

$$\cdot \int e^{i\alpha p^2 + ipq} e^{i\sum A_{ab}(k_a+ep)(k_b+ep)+i\sum\limits_a (k_a+ep)q_a} dp\,|_{q=q_a=0} =$$

$$= Z(-i\nabla q)\, F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \ldots, -i\nabla q_n, \ldots, \alpha \ldots)\, \frac{\pi^2}{i}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\left(\sum A_{ab} e_a e_b + \alpha\right)^2}\, e^{i\sum A_{ab}k_a k_b + i\sum k_a q_a + ikq}\cdot$$

$$\cdot \exp i\left\{\frac{-\left(2\sum A_{ab}k_a e_b + \sum e_a q_a + eq\right)^2}{4\left(\sum A_{ab}e_a e_b + \alpha\right)}\right\}\Bigg|_{q_a=q=0}. \qquad (11.2)$$

Отметим, что гауссовские интегралы

$$\int e^{i(ap^2+bp)}dp = -i\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-i\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0,$$

вычисляются нами как пределы

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 > 0} \int e^{i(ap^2+bp)-\varepsilon_1(p^1)^2-\varepsilon_2[(p^1)^2+(p^2)^2]},$$

что вполне оправдано с точки зрения теории обобщенных функций [см. [8]].

Формула (11.2) с очевидностью показывает, что при условии справедливости утверждения леммы для функции $f(\ldots k \ldots \alpha \ldots)$ оно будет выполняться и для функции $f^*(\ldots k \ldots \alpha \ldots)$.

Во втором случае, когда к диаграмме добавляется новый узел, который мы обозначим через x^0, аналогично получаем:

$$f^*(k_0, k_1, \ldots, k_n, \alpha, \ldots) = Z(k_0)\, e^{i\alpha k_0^2} f(k_1 - k_0, k_2, \ldots, \alpha), \qquad (12.2)$$

где $Z(k_0)$ — полином функции распространения для вновь добавленной линии.

Из формулы (12.2) видно, что и во втором случае утверждение справедливо.

Этим лемма полностью доказана.

Теперь уже можно понять те трудности, которые необходимо преодолеть при построении теории произведений вида (1.2). Так как

$$\operatorname{reg}\Delta_l^c(x) \to \Delta_l^c(x),$$

то естественно было бы определить

$$\prod_l \Delta_l^c(x_r - x_s)$$

как слабый предел выражения

$$\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^c(x_r - x_s)$$

при устремлении вспомогательных масс к бесконечности:

$$\int \left\{ \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s) \right\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \to$$

$$\to \int \left\{ \prod_l \Delta_l^c (x_r - x_s) \right\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \qquad (13.2)$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(q, r, n)$.

Но так как

$$\int \left\{ \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s) \right\} F(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int I_M (k_1, k_2, \ldots, k_n)\, \Phi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, dk_1 dk_2 \ldots dk_n, \qquad (14.2)$$

где Φ — преобразование Фурье функции F, то, в силу предыдущих разъяснений, такого предела, вообще говоря, не существует.

Тем не менее оказывается справедливой следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для всех функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих к некоторому классу $C(q, r, n)$ (q, r — достаточно большие числа) и обращающихся в нуль вместе с достаточно большим числом своих производных при совпадении аргументов, выражение*

$$\int \left\{ \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s) \right\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (15.2)$$

стремится к пределу при $M \to \infty$.

Доказательство этой теоремы намечено в работе ([9]) и будет дано в другом месте.

Можно сказать, что сформулированная только что теорема определяет произведение $\prod_l \Delta_l^c (x_r - x_s)$ при несовпадающих аргументах.

Ясно, что для построения теории умножения причинных функций необходимо построить продолжение функционала, определяемого предельным соотношением (15.2) на подпространстве $D(q, r, n) \in C(q, r, n)$ функций, аннулирующихся при совпадении аргументов, на все пространство $C(q, r, n)$.

При этом следует заметить, что теория умножения причинных функций строится нами для целей квантовой теории поля и поэтому указанное продолжение должно удовлетворять требованиям 1), 2), 3), 4), о которых говорилось во введении.

В результате учета этих требований в работе ([4]) введена особая вычитательная операция R, при помощи которой можно осуществить продолжение функционала (15.2) и, таким образом, полностью определить умножение причинных функций.

В дальнейшем будет дано определение этой операции, а также будут изучены ее свойства.

§ 3. Вычитательная операция R и ее основные свойства

Пусть $G(x_1, x_2 \dots x_n)$ — некоторая связная диаграмма, линиям l которой поставлены в соответствие регуляризованные причинные функции $\operatorname{reg}\Delta_l^c(x_r - x_s)$.

Обозначим через

$$G = G \times_1 G_2 \times \dots \times G_s \tag{1.3}$$

некоторое фиксированное разбиение диаграммы G на обобщенные узлы

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_{\nu_1}),\ G_2(x_{\nu_1+1}, \dots, x_{\nu_2}), \dots;\ G_s(x_{\nu_{s-1}+1} \dots, x_n),$$

которые назовем «базисными».

Из базисных узлов будем образовывать всевозможными способами обобщенные узлы

$$\Gamma_\alpha = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \dots \times G_{i_k}. \tag{2.3}$$

Допустим, что каждому базисному узлу поставлен в соответствие вклад, импульсный образ которого будет иметь вид

$$\delta\Big(\sum k\Big) f_{G_i}(\dots k \dots), \tag{3.3}$$

где $f_{G_i}(\dots k \dots)$ — полином по k.

Через

$$\Delta(G_1)\,\Delta(G_2) \dots \Delta(G_s) \tag{4.3}$$

будем обозначать подсчет импульсного образа вклада от диаграммы

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_s,$$

согласно следующим правилам:

а) функции распространения вдоль линий, соединяющих различные G_a и G_b, берутся те же, что в первоначальной диаграмме;

б) линии, идущие внутри каждого G_a, не учитываются, но вместо этого каждому G_a ставится в соответствие вклад $\delta\Big(\sum k\Big) f_{G_a}(k)$, который задан операцией $\Delta(G_a)$.

Поставим в соответствие каждому обобщенному узлу Γ_α целое положительное число $\nu(\Gamma_\alpha)$. Способ задания таких чисел будет дальше конкретизирован.

Тогда символом $\Delta(\Gamma_\alpha)$ условимся записывать импульсный образ вклада от диаграммы Γ_α, подсчитанный согласно следующим правилам:

а) если диаграмма Γ_α — слабо связная, т. е. состоит из двух диаграмм, соединенных только одной линией, то

$$\Delta(\Gamma_\alpha) = 0;$$

б) если диаграмма Γ_α — сильно связная (т. е. не слабо связная), то $\Delta(\Gamma_\alpha)$ определяется индуктивно, а именно: допустим, что для всех $\Gamma_\beta \subset \Gamma_\alpha$ вклад $\Delta(\Gamma_\beta)$ уже определен. Тогда

$$\Delta(\Gamma_\alpha) = -M(\Gamma_\alpha)\{\Delta(G_{\alpha_1})\,\Delta(G_{\alpha_2}) \dots \Delta(G_{\alpha_k}) + \\ + \sum \Delta(\Gamma_{\beta_1})\,\Delta(\Gamma_{\beta_2}) \dots \Delta(\Gamma_{\beta_m})\}, \tag{5.3}$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям диаграммы Γ_α на обобщенные узлы Γ_β, операция $\Delta(\Gamma_{\beta_1})\,\Delta(\Gamma_{\beta_2}) \dots \Delta(\Gamma_{\beta_m})$ должна пониматься

так же, как операция (4.3), а символ $M(\Gamma_\gamma)$ означает, что после того, как вклад в скобках подсчитан, скажем, в виде

$$\delta\left(\sum k\right) f_{\Gamma_\gamma}(\ldots k\ldots),$$

его следует заменить на

$$\delta\left(\sum k\right) T_\omega^\nu f_{\Gamma_\gamma}(\ldots k\ldots),$$

где T_ω^ν обозначает часть тейлоровского разложения функции f_{Γ_α} вокруг некоторой, пока произвольной точки $k=\omega$, а именно, суммы тех членов, степени которых не превышают числа $\nu(\Gamma_\alpha)$. Так как $\Delta(G_a)$ задано, то условий а), б) достаточно для определения $\Delta(\Gamma_\alpha)$.

Введем, наконец, операцию $R(G_1G_2\ldots G_s)$ над диаграммой $G=G_1\times G_2\times\ldots\times G_s$ согласно формуле:

$$R(G_1G_2\ldots G_s)=\Delta(G_1)\Delta(G_2)\ldots\Delta(G_s)+$$
$$+\sum_{2\ \ldots\ m\ \ldots\ 1}\Delta(\Gamma_1)\Delta(\Gamma_2)\ldots\Delta(\Gamma_m)+\Delta(G_1G_2\ldots G_s)\equiv$$
$$\equiv\overline{R(G_1G_2\ldots G_s)}+\Delta(G_1G_2\ldots G_s), \tag{6.3}$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям диаграммы G на обобщенные узлы Γ_k:

$$G=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_m,\qquad \Gamma_i=G_{i_1}\times G_{i_2}\times\ldots\times G_{i_k}. \tag{7.3}$$

Операция $R(G_1G_2\ldots G_s)$, в которой за базисные узлы взяты просто точки x_i, будет обозначаться через $R(G)$. Операция $R(G)$ и есть упомянутая выше вычитательная операция, при помощи которой во второй части этой работы будет построено продолжение для функционала, определенного теоремой 1.

Для достижения этой цели изучим сначала некоторые свойства операции R, которые формулируются ниже.

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение:*

$$R(G_1G_2\ldots G_s)=\Delta(G_1)R(G_2G_3\ldots G_s)+$$
$$+\sum P\left(\frac{2,\ 3,\ \ldots,\ \nu_1}{\nu_1+1\ \ldots\ s}\right)\Delta(G_1G_2\ldots G_{\nu_1})R(G_{\nu_1+1}\ldots G_s)+\Delta(G_1G_2\ldots G_s), \tag{8.3}$$

т. е. сумма взята по всевозможным разбиениям множества $(2, 3, \ldots, s)$ *на два подмножества.*

Доказательство. Так как, по условию, обобщенные узлы Γ_i состоят из базисных $G_1, G_2, \ldots, G_k$, то мы всегда в сумме (6.3) найдем члены, имеющие в качестве множителя либо $\Delta(G_1)$, либо $\Delta(G_1G_2)$ и т. д.

Собрав в сумме (6.3) все слагаемые, которые имеют в качестве множителя, например, $\Delta(G_1)$, мы сможем взять $\Delta(G_1)$ за скобку, и, как легко видеть, в скобке получим как раз $R(G_2G_3\ldots G_s)$. В самом деле, в скобке будет стоять сумма по всевозможным разбиениям множества базисных узлов $G_2, G_3, \ldots, G_s$ в обобщенные узлы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, но это и будет как раз $R(G_2G_3\ldots G_s)$.

Таким способом мы получим и другие члены суммы (6.3).

Для полного доказательства формулы (8.3) нужно только убедиться, что таким способом будут исчерпаны все слагаемые суммы (6.3). Но это станет ясным, если заметить, что любое подразбиение множества $G_1, G_2, \ldots, G_s$ на обобщенные узлы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ можно вести следующим образом: выбираем фиксированный узел G_1, а остальные разбиваем всевозможными способами на обобщенные, затем объединяем G_1 и G_2 в обобщенный узел, а остальные разбиваем произвольным способом и т. д.

Таким образом, лемма 2 доказана.

Для дальнейшего операцию $R(G_1G_2\ldots G_s)$ будет удобно записывать в виде

$$R(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\mathcal{A}_\Gamma\ldots), \tag{9.3}$$

где $\mathcal{A}_\Gamma = (\omega_1\omega_2\ldots)_\Gamma$ означает те произвольные точки, вокруг которых производится разложение в ряд Тейлора при подсчете $\Delta(\Gamma)$. Условимся через $R^*(G_1G_2\ldots G_s)$ записывать операцию R над диаграммой G^*, которая возникает из диаграммы G в результате добавления новой линии между базисными узлами G_a и G_b и при сопоставлении тех же чисел $\nu(\Gamma_\alpha)$ обобщенным узлам, что и в диаграмме G. Для простоты обозначений допустим, что эта линия соединяет узлы 1 и 2. Импульсное представление функции распространения линии 1—2 обозначим через $\Delta^c_{12}(t)$. Теперь может быть сформулирована

ЛЕММА 3. *Имеет место следующая итерационная формула:*

$$R^*(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\mathcal{A}_\Gamma\ldots) = \int \Delta^c_{12}(t)\, R_{12}(G_1^tG_2^t\ldots G_s^t\ldots\mathcal{A}_\Gamma^t\ldots)\,dt, \tag{10.3}$$

где значок t вверху означает, что в R_{12} импульс k_1 следует заменить на $k_1 - t$, импульс k_2 — на $k_2 + t$, а $\mathcal{A}_\Gamma^t$ означает замену точки ω_1 на $\omega_1 - t$, а точки ω_2 — на $\omega_2 + t$.

Операция R_{12} определяется формулой:

$$R_{12}(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\mathcal{A}_\Gamma\ldots) = R(G_1G_2\ldots G_s) + \sum_{\Gamma'\subset G} R(G_1G_2\ldots G_s:\Gamma'|\ldots\mathcal{A}_\Gamma\ldots). \tag{11.3}$$

Здесь $\Gamma' = G_{a_1}\ldots G_{a_2}\ldots G_{a_k}$ — те слабо связные диаграммы, которые после добавления новой линии между G_1 и G_2 становятся сильно связными, а $R(G:\Gamma'|\mathcal{A}_\Gamma)$ означает операцию типа R над диаграммой G^*, в которой за базисные узлы взяты диаграмма Γ' и все остальные G_a, не вошедшие в Γ'. При этом операция $\Delta(\Gamma')$ определяется формулой:

$$\Delta(\Gamma') = -M(\Gamma')\,\overline{R(\Gamma')}, \tag{12.3}$$

т. е. $\Delta(\Gamma')$ подсчитывается так, как если бы новой линии между G_1 и G_2 не было и диаграмма Γ' была бы сильно связной.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (8.3), имеем для $R^*(G_1G_2\ldots G_s)$:

$$R^*(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\mathcal{A}_\Gamma\ldots) = \Delta^*(G_1)\,R^*(G_2G_3\ldots G_s) + \Delta^*(G_1G_2)\,R^*(G_3G_4\ldots G_s) + \cdots + \Delta^*(G_1G_2\ldots G_s). \tag{13.3}$$

Звездочки в равенстве (13.3) показывают, что все операции берутся с учетом новой линии 1—2.

Попытаемся преобразовать правую сторону равенства (13.3) так, чтобы туда явно входили операции Δ и R без звездочки.

Естественно, что тогда должна будет явно выделиться причинная функция $\Delta^c_{12}(t)$. С этой целью заметим, что если мы среди слагаемых в (13.3) отберем слагаемые с $\Delta^*(G_1G_2\ldots G_k)$, соответствующими диаграммам, которые были сильно связными до вставки линии между G_1 и G_2, то в случае, если бы этой линии не было, сумма таких слагаемых давала бы как раз $R(G_1G_2\ldots G_s)$. Чтобы проследить, чем отличается сумма отобранных членов от $R(G_1G_2\ldots G_s)$, будем рассуждать следующим образом. Для слагаемых типа

$$\Delta^*(A)\,R^*(B),$$

где $A\supset G_1$ и $B\supset G_2$, сразу получаем:

$$\Delta^*(A)\,R^*(B)=\int\Delta^c_{12}(t)\,\Delta(A^t)\,R(B^t)\,dt.$$

Для слагаемых типа

$$\Delta^*(A)\,R^*(B),$$

где $A\supset G_1G_2$, в силу условий леммы относительно чисел $\nu(\Gamma_2)$, можно вывести то же соотношение.

В самом деле, рассмотрим сначала случай, когда $A=G_1\times G_2$.

Так как, по предположению, A — сильно связная диаграмма и до вставки линии 1—2, то

$$\Delta^*(A)=\Delta^*(G_1G_2)=M(A)\{\Delta^*(G)_1\Delta^*(G_2)\}=$$
$$=-M(A)\left\{\int\Delta^c_{12}(t)\,\Delta(G_1^t)\,\Delta(G_2^t)\,dt\right\}=$$
$$=\int\Delta^c_{12}(t)\{-M(A)[\Delta(G_1^t)\,\Delta(G_2^t)]\}\,dt=\int\Delta^c_{12}(t)\,\Delta(G_1^tG_2^t)\,dt,$$

причем последнее заключение сделано в силу условий относительно чисел $\nu(\Gamma)$.

Допустим теперь, что формула

$$\Delta^*(H)=\int\Delta^c_{12}(t)\,\Delta(H^t)\,dt$$

верна для всех поддиаграмм $H=G_1G_2G_{i_3}\ldots G_{i_k}$ диаграммы $A=G_1G_2\ldots G_{a_s}$, сильно-связной и до вставки линии 1—2, и докажем, что она остается верной и для всей диаграммы A.

В самом деле,

$$\Delta(A)=-M(A)\{\Delta(G_1)\,\Delta(G_2)\ldots\Delta(G_{a_s})+$$
$$+\sum\Delta^*(H_1)\,\Delta^*(H_2)\ldots\Delta^*(H_m)\}=$$
$$=-M(A)\left\{\int\Delta^c_{12}(t)\{\Delta(G_1^t)\,\Delta(G_2^t)\ldots\Delta(G_{a_s}^t)+\right.$$
$$\left.+\sum\Delta(H_1^t)\,\Delta(H_2^t)\ldots\Delta(H_m^t)\}\,dt\right\}=\int\Delta^c_{12}(t)\,\Delta(A^t)\,dt.$$

Теперь уже ясно, что сумма всех выделенных членов представляет собой

$$\int R(G_1^tG_2^t\ldots G_s^t\,|\ldots,\Gamma_\Gamma^t\ldots)\,\Delta^c_{12}(t)\,dt.$$

Остается показать, что остальные слагаемые будут представлять собой

$$\sum_{\Gamma' < G} \int \Delta_{12}^{c}(t)\, R(G^t : \Gamma'^t \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma^t \ldots)\, dt.$$

С этой целью рассмотрим слагаемое

$$\Delta^*(\Gamma')\, R^*(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k}).$$

Ясно, что

$$R^*(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k}) = R(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k}),$$

ибо новая линия 1--2 лежит внутри Γ'. С другой стороны, Γ' была связной и до вставки линии, ибо вставка линии сделала ее сильно связной. В силу того, что число $\nu(\Gamma')$ — одно и то же и до и после вставки линии 1—2, а также в силу связности Γ' и до вставки линии,

$$\Delta^*(\Gamma') = \int \Delta_{12}^{c}(t)\, \Delta(\Gamma'^t)\, dt.$$

Поэтому

$$\Delta^*(\Gamma')\, R^*(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k}) = \int \Delta_{12}^{c}(t)\, \Delta(\Gamma'^t)\, R(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k})\, dt =$$

$$= \int \Delta_{12}^{c}(t)\, R(G^t : \Gamma'^t \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma^t \ldots)\, dt,$$

в силу самого определения $R(G : \Gamma' \mid \mathcal{J}_\Gamma)$.

Остается учесть суммирование по $\Gamma' \subset G$, чтобы полностью доказать формулу (10.3).

Заметим, что так же может быть доказано следующее соотношение:

$$\overline{R^*(G_1 G_2 \ldots G_s \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma)} = \int \Delta_{12}^{c}(t)\, \overline{R}_{12}(G_1^t G_2^t \ldots G_s^t \mid \mathcal{J}_\Gamma^t)\, dt, \qquad (14.3)$$

где

$$\overline{R}_{12} = \overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s)} + \overline{\sum_{\Gamma' \subset G} R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' \mid \mathcal{J}_\Gamma)}.$$

ЧАСТЬ II

§ 1. Аналитические свойства вычитательной операции R

В настоящей части работы будет продолжено изучение аналитических свойств операции R и затем будет показано, как с ее помощью определяется умножение причинных функций.

Предварительно условимся вместо $R(G)$ писать $R(G)\, I_M(k)$ в том случае, когда вместо причинных функций применяются регуляризованные причинные функции, и $R(G)\, I(k)$ — в случае снятия регуляризации.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$ — *связная диаграмма. Тогда* $\overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s)}\, I_M(k)$ *будет функцией вида*

$$\overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s)}\, I_M(k) = \delta\Big(\sum k\Big) \int_0^\infty \ldots d\alpha_l \ldots e^{-i \sum \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum \alpha_l}.$$

$$\prod I(\alpha_l) \sum \frac{f(\ldots \sqrt{\alpha}\, k \ldots \sqrt{\alpha}\, \omega \ldots \sqrt{\alpha} \ldots)}{\Phi_r(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)} e^{i \sum A_{G_a G_b}(\alpha)\, p_a p_b}, \qquad (1.1)$$

где

$$P_a = \begin{cases} \text{либо } \sum\limits_{G_a} k, \\ \text{либо } \sum\limits_{G_a} \omega, \end{cases}$$

$f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}} k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}} \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}} \ldots)$ — *полином по всем своим аргументам,* $\Phi_r(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}_l} \ldots)$ — *однородная рациональная функция* $\sqrt{\alpha}$ *степени* r *по* $\sqrt{\bar{\alpha}}$, *а знак суммы перед* $\frac{f}{\Phi_r} e^{i \sum A_{ab} x_a x_b}$ *означает, что подсчет вклада* $\overline{R}$ *может привести к нескольким выражениям такого же типа,* α — *однородная рациональная функция* α_l *первой степени по* α_l $(l = 1, 2, \ldots, L)$, $r[\Delta(G)]$ — *степень полинома в* $\Delta[G]$, r_l — *степень полинома функции распространения, соответствующей линии* l, L — *полное число линий между базисными узлами* s — *число всех базисных узлов,*

$$r = \sum_a r[\Delta(G_a)] + \sum_l r_l + 4L - 4(s-1),$$

$\sum A_{G_a G_b}(\alpha) x_a x_b$ — *квадратичная форма по* x_a *и однородная рациональная функция первой степени по* α, *обладающая свойствами* (*сумма распространяется по всем узлам, кроме какого-то одного*):

а) *когда все* $\alpha_l > 0$, *квадратичная форма по* x — *определенно положительная*:

б) $\sum A_{G_a G_b} x_a x_b \leqslant \sum_l \alpha_l \left(\sum_a |x_a| \right)^2$.

Доказательство. Будем доказывать это предложение индукцией по числу линий и числу базисных узлов. Рассмотрим сначала случай, когда диаграмма состоит из двух базисных узлов G_1 и G_2, соединенных одной линией. Более сложные диаграммы будут возникать из нее добавлением либо одного нового узла, соединенного одной линией, либо добавлением новой линии между G_a и G_b. Поэтому нужно сначала проверить справедливость утверждения для случая диаграммы $G = G_1 \times G_2$ с одной линией между G_1 и G_2, а затем применить индукцию по числу линий и узлов.

Мы имеем:

$$\overline{R(G_1 G_2)} = \Delta(G_1)\, \Delta(G_2).$$

Пусть

$$\Delta(G_1) = P_1(\ldots k \ldots)\, \delta\left(\sum_{G_1} k\right),$$

$$\Delta(G_2) = P_2(\ldots k \ldots)\, \delta\left(\sum_{G_2} k\right).$$

Обозначив функции распространения линии 1—2 через

$$\Delta^c_{12}(t) \sim P_{12}(t)\, e^{i\alpha t^2},$$

будем иметь (интегрирование по α, а также множитель $I(\alpha)$ будем в дальнейшем пропускать):

$$\Delta(G_1)\Delta(G_2) = \delta\Big(\sum_{G_2} p + \sum_{G_1} k\Big)\int \Delta_{12}^{c}(t)\, P_1^{t}(\ldots k\ldots)\, P_2^{t}(p)\,\delta\Big(\sum p + t\Big)\,dt =$$

$$= \delta\Big(\sum p + \sum k\Big)\,\Delta_{12}\Big(\sum p\Big)\,P_1(k, p)\,P_2(\ldots p\ldots),$$

и поэтому можно написать:

$$\Delta(G_1)\Delta(G_2) = \frac{f(\ldots \sqrt{\alpha}\, k \ldots \sqrt{\alpha}\,\omega \ldots \sqrt{\alpha})}{\Phi_r(\ldots \sqrt{\alpha_l}\ldots)}\, e^{i\alpha(\Sigma p)^2},$$

причем, как легко видеть, степень функции $\Phi_r(\ldots \sqrt{\alpha_l}\ldots)$ будет равна

$$r = r[\Delta(G_1)] + r[\Delta(G_2)] + r_{12} + 4\cdot 1 - 4\cdot(2-1),$$

в полном согласии с утверждением теоремы.

Другие утверждения теоремы в этом частном случае очевидны. Переходим к индукции по числу линий, а затем по числу узлов, причем сначала будем заниматься доказательством предложений, касающихся функций вида

$$\frac{f(\ldots)}{\Phi_r(\ldots)}.$$

Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$ — связная диаграмма при данных $m+1$ линиях, где $m+1 > s$. Мы можем считать, что эта диаграмма возникла из связной диаграммы с m линиями, ибо противоположный случай будет охвачен индукцией по числу узлов. Поэтому мы всегда можем снять любую линию, не нарушая связности диаграммы. Пусть это будет линия, соединяющая G_1 и G_2.

Тогда, в силу леммы 3 части I, имеем:

$$\overline{R^{c}(G_1G_2\ldots G_s)} = \int \Delta_{12}^{c}(t)\,\overline{R_{12}(G_1G_2\ldots G_s \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma^{t}\ldots)}\,dt. \tag{2.1}$$

Если бы мы могли утверждать, что $\overline{R}_{12}$ будет такого же вида, как $\overline{R(G_1G_2\ldots G_s)}$, то для проведения индукции достаточно было бы вычислить интеграл (2.1).

Покажем, что это будет действительно так. В самом деле,

$$\overline{R_{12}(G_1G_2\ldots G_s \mid \mathcal{J}_\Gamma)} =$$

$$= \overline{R(G_1G_2\ldots G_s)} + \sum_{\Gamma'\subset G} \overline{R(G_1G_2G_s : \Gamma' \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma\ldots)}. \tag{3.1}$$

Но, как мы знаем,

$$\overline{R(G_1G_2\ldots G_s : \Gamma' \mid \ldots \mathcal{J}_\Gamma\ldots)} = \Delta(\Gamma')\,\overline{R(G_{a_1}G_{a_2}\ldots G_{a_k})}, \tag{4.1}$$

где $G_{a_1}, G_{a_2}, \ldots, G_{a_k}$ — те G_i, которые не входят в Γ', и

$$\Delta(\Gamma') = -M(\Gamma')\,\overline{R(\Gamma')}. \tag{5.1}$$

Операция $M(\Gamma')$ означает взятие первых $\nu(\Gamma')$ членов ряда Тейлора от функции $\overline{R(\Gamma')}$. По предположению индукции, $\overline{R(\Gamma')}$ будет вида (1.1) и будет удовлетворять всем условиям теоремы. Покажем, что операция $M(\Gamma')$ над $\overline{R(\Gamma')}$ не нарушает этого вида. В самом деле, эта операция

приведет к замене $\sum k$ на $\sum \omega$ в показателе экспоненциала и, кроме того, не повлияет ни на характер числителя, ни на степень однородности знаменателя. Дело в том, что при дифференцировании показательной функции s раз она умножается на выражение типа $(\bar{\alpha}p)^s$. Но от разложения в ряд Тейлора появится множитель $(k-\omega)^s$ и оба эти множителя поглотят $\bar{\alpha}^s$ после того, как их записать в виде

$$(V\bar{\alpha}(k-\omega))^s (V\bar{\alpha}p)^s.$$

При дифференцировании же полинома появятся множители типа $(V\bar{\alpha})^s$, которые будут поглощены множителем типа $(k-\omega)^s$.

Итак, вид $\Delta(\Gamma')$ — такой же, как вид $\overline{R(\Gamma')}$. Отсюда уже легко следует, что и $\overline{R(G:\Gamma'|J_\Gamma)}$ удовлетворяет условиям индукции.

Таким образом, мы вправе допустить, что *

$$\overline{R_{12}(G_1G_2\ldots G_s|\ldots J_\Gamma)} = \sum \frac{f(\ldots V\bar{\alpha}k\ldots V\bar{\alpha}\omega\ldots V\bar{\alpha}\ldots)}{\Phi_r(\ldots V\bar{\alpha}_l\ldots)} e^{i\sum A_{G_aG_b}(\alpha)p_ap_b}. \tag{6.1}$$

Теперь нам нужно проследить за структурой выражения

$$\int \Delta^c_{12}(t)\,\overline{R_{12}(G^t|\ldots J^t_\Gamma)}\,dt. \tag{7.1}$$

Ясно, что это достаточно проделать для одного слагаемого суммы, т. е. достаточно вычислить

$$\int \Delta^c_{12}(t)\frac{f(\ldots V\bar{\alpha}(k+et)\ldots V\bar{\alpha}(\omega+et)\ldots V\bar{\alpha})}{\Phi_r(\ldots V\bar{\alpha}_l\ldots)} e^{i\sum A_{G_aG_b}(p_a+et)(p_b+et)}dt, \tag{8.1}$$

где

$$e=\begin{cases}1, & \text{когда } k=k_1, \text{ либо } \omega=\omega_1,\\ -1, & \text{когда } k=k_2, \text{ либо } \omega=\omega_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Подставляя вместо $\Delta^c_{12}(t)$ выражение

$$P_{12}(t)\,e^{i\alpha t^2}=P_{12}(-i\nabla r)\,e^{i\alpha t^2+itr}\big|_{r=0} \tag{9.1}$$

и вместо

$$f(\ldots V\bar{\alpha}(k+et)\ldots V\bar{\alpha}(\omega+et)\ldots V\bar{\alpha}\ldots)$$

— выражение

$$f(\ldots V\bar{\alpha}(-i\nabla v)\ldots V\bar{\alpha}(-i\nabla w)\ldots V\bar{\alpha})\,e^{i(k+et)v+i(\omega+et)w}\big|_{v=w=0},$$

получаем:

$$\int \Delta^c_{12}(t)\frac{f(\ldots V\bar{\alpha}(k+et)\ldots V\bar{\alpha}(\omega+et)\ldots V\bar{\alpha})}{\Phi_r(\ldots V\bar{\alpha}_l\ldots)} e^{i\sum A_{G_aG_b}(p_a+et)(p_b+et)}dt =$$

$$= P_{12}(-i\nabla r)\frac{f(\ldots V\bar{\alpha}(-i\nabla v)\ldots V\bar{\alpha}(-i\nabla w)\ldots V\bar{\alpha})}{\Phi_r(\ldots V\bar{\alpha}_l\ldots)}.$$

* Мы опять пропускаем интегрирование по α, а также множители $I(\alpha)$ и т. д.

$$\cdot \int e^{i\alpha t^2+ilr+i(k+et)v+i(\omega+et)w}\, e^{i\sum A_{G_aG_b}(p_a+et)(p_b+et)}\, dt\,|_{r=v=w=\ldots=0} =$$

$$= P_{12}(-i\nabla r)\frac{f(\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}(-i\nabla v)\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}(-i\nabla w)\ldots\sqrt{\overline{\alpha}})}{\Phi_r(\ldots\sqrt{\alpha_l}\ldots)}\, e^{ikv+i\omega w}\cdot$$

$$\cdot\, e^{i\sum A_{G_aG_b}p_ap_b}\int e^{i(\alpha+eAe)t^2+it(2eAp_a+r+ev+ew)}dt\,|_{r=v=w=\ldots=0} =$$

$$= P_{12}(-i\nabla r)\frac{f(\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}(-i\nabla v)\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}(-i\nabla w)\ldots\sqrt{\overline{\alpha}})}{\Phi_r(\ldots\sqrt{\alpha_l}\ldots)}\, e^{ikv+i\omega w+ip_aAp_a}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\pi^2}{i(eAe+\alpha)^2}\exp\left\{-\frac{i(2eAp_a+r+ev+ew)^2}{4(eAe+\alpha)}\right\}\Big|_{r=v=w=0}. \qquad (10.1)$$

Теперь легко обнаружить, что степень новой функции $\Phi_r^*(\ldots\sqrt{\alpha_l}\ldots)$, которая получится, если выражению (10.2) придать вид (1.1), увеличится на степень полинома функции распространения и на 4, что соответствует добавлению новой линии.

Допустим теперь, что к диаграмме

$$G = G_2\times G_3\times\ldots\times G_{s+1}$$

добавлен новый базисный узел G_1, соединенный с узлом G_2 одной линией с функцией распространения $\Delta_{12}^c(t)$. В силу формулы (8.3) части I, а также в силу того, что узел G_1 соединен с G_2 только одной линией, получаем:

$$\overline{R(G_1G_2\ldots G_{s+1})} = \Delta(G_1)\,\overline{R(G_2G_3\ldots G_{s+1})} =$$

$$= \delta(\sum k)\int \overline{R(G_2^t\ldots G_{s+1}^t)}\,\Delta(G_1^t)\,\Delta_{12}(t)\,\delta(t+p_1)\,dt, \qquad (11.1)$$

где p_1 — сумма импульсов диаграммы G_1.

Элементарное снятие δ-функции показывает, что и в этом случае утверждение теоремы верно. В самом деле, степень функции Φ_r увеличится на степень полинома $\Delta(G_1)$ и степень полинома $P_{12}(t)$.

Чтобы учесть, что число линий и узлов возросло на единицу, надо к формуле для r добавить и вычесть 4.

Осталось, таким образом, доказать те утверждения теоремы, которые касаются экспоненциального множителя.

Положительность квадратичной формы следует из известного неравенства:

$$(p_aAp_a)(eAe)\geqslant(eAp_a).$$

Неравенство же

$$\sum A_{G_aG_b}(x)\,x_ax_b\leqslant\Big(\sum\alpha_l\Big)\Big(\sum_a|x_a|\Big)^2$$

может быть доказано следующим образом.

Для случая диаграммы из двух узлов, соединенных одной линией, предложение очевидно.

Рассмотрим диаграмму с s узлами и m линиями. Добавим новую линию между узлами 1 и 2 и посмотрим, как изменится наша форма.

В силу формулы (10.1), мы видим, что новая форма

$$\sum A^{*}_{G_aG_b}(\alpha)\,x_ax_b = \sum A_{G_aG_b}(\alpha)\,x_ax_b - \frac{(eAx_a)^2}{(eAe+\alpha)},$$

где $A \equiv (A_{G_aG_b})$. В силу предположения индукции, можно написать:

$$\sum A_{G_aG_b}x_ax_b - \frac{(eAx_a)^2}{(eAe+\alpha)} \leqslant \Big(\sum_l \alpha_l\Big)\Big(\sum_a |x_a|\Big)^2 - \frac{(eAx_a)^2}{(eAe+\alpha)}.$$

Но $eAe > 0$ как диагональный минор положительно определенной матрицы, и поэтому мы усилим неравенство, пропустив в его правой части отрицательный член

$$-\frac{(eAx_a)^2}{(eAe+\alpha)}$$

и добавив положительный

$$\alpha\Big(\sum_a |x_a|\Big)^2.$$

Тогда мы получим:

$$\sum A^{*}_{G_aG_b}(\alpha)\,x_ax_b \leqslant \Big(\sum_l \alpha_l + \alpha\Big)\Big(\sum_a |x_a|\Big)^2. \tag{12.1}$$

Допустим, что к диаграмме с m линиями и s узлами добавляется новый $(s+1)$-й узел, соединенный одной линией с остальной частью диаграммы. Допустим, что эта линия входит в узел G_1.

Легко проверить, пользуясь формулой (11.1), что новая квадратичная форма получится из старой, согласно формуле:

$$A_{G_1G_1}x_1^2 + 2A_{G_1G_2}x_1x_2 + A_{G_2G_2}x_2^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{a>2\\ b>2}} A^{-}_{G_aG_b}x_ax_b \to A_{G_1G_1}(x_1+x_c)^2 + 2A_{G_1G_2}(x_1+x_c)x_2 +$$

$$+ \alpha x_c^2 + \sum_{\substack{a>2\\ b>2}} A_{G_aG_b}x_ax_b,$$

где x_c — сумма импульсов нового $(s+1)$-го узла. Но, как мы знаем, всегда можно считать, что

$$A_{G_1G_1} = 0,\quad A_{G_1G_2} = 0,$$

ибо суммирование в квадратичной форме всегда производится по всем узлам, за исключением какого-то одного.

Так как, по предположению индукции,

$$\sum A_{G_aG_b}x_ax_b \leqslant \Big(\sum_l \alpha_l\Big)\Big(\sum_a |x_a|\Big)^2,$$

то

$$\sum A_{G_aG_b}x_ax_b + \alpha x_c^2 \leqslant \Big(\sum \alpha_l\Big)\Big(\sum |x_a|\Big)^2 + \alpha |x_c|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum \alpha_l + \alpha\Big)\Big(\sum |x_a| + |x_c|\Big)^2.$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$ — *связная диаграмма*, $r[\Delta(G_i)]$ — *степень полинома в* $\Delta(G_i)$, $r(l_{ab})$ — *степень полинома функции распространения, соответствующей линии* l, *соединяющей узел* G_a *с* G_b. *Возьмем числа*

$$\bar{r}[\Delta(G)] \geqslant r[\Delta(G)],$$

$$\bar{r}_l \geqslant r_l.$$

Пусть $\Gamma_a = G_{a_1} \times G_{a_2} \times \ldots \times G_{a_k}$ — *поддиаграмма диаграммы* G *и пусть*

$$\nu(\Gamma_a) = \sum_{a_k} \bar{r}[\Delta(G_{a_k})] + \sum_l \bar{r}_l + 2L_a - 4(s-1), \tag{13.1}$$

где суммирование происходит по тем G_{a_k}, *которые входят в* Γ_a, *и тем* l, *которые соединяют упомянутые* G_a, s — *число базисных узлов в* Γ_a, L_a — *число линий в* Γ_a. *Определим при этих* $\nu(\Gamma_a)$ *операцию*

$$R(G_1 G_2 \ldots G_s) I_M(k) =$$

$$= \delta\left(\sum k\right) \int_0^\infty \ldots d\alpha_l \ldots e^{-i\sum \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum \alpha_l} \prod_l I(\alpha_l) \sum F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b}, \tag{14.1}$$

где F — *полином по* k, ω *и рациональная функция по* α, *причем знак суммы перед функцией* $F \cdot e^{i\sum A p_a p_b}$ *указывает, так же как и в предыдущей теореме, что, вообще говоря, при подсчете* $R(G)$ *получается несколько членов типа:*

$$F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b}. \quad *$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots)| \leqslant \frac{C}{\prod_l \alpha^{1-\frac{1}{2L}}}, \tag{15.1}$$

где L — *число линий, соединяющих базисные узлы* $G_1, G_2, \ldots, G_s$, *а* C — *выражение, полиномиально ограниченное по* k, ω, α.

Доказательство. Случай диаграммы из двух узлов, соединенных одной линией, проверяется непосредственно, в силу проделанных раньше вычислений.

Пусть теорема верна для всех диаграмм с числом линий, не бо́льшим чем $L = m \geqslant s-1$, и числом узлов, не большим чем s; докажем ее для диаграммы с числом линий $L = m+1$.

Рассмотрим диаграмму с $m+1$ линиями. Возможны два случая: либо снятие одной из линий нарушает связность $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$, либо снятие одной любой линии не нарушает связности G.

Рассмотрим первый случай. Пусть имеется линия $G_a - G_b$, снятие которой разбивает $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$ на две части: Γ_a и Γ_b. Как легко видеть, в этом случае $R(G_1 G_2 \ldots G_s)$ будет всегда вида

$$R_a(\ldots k_\nu - \delta_{\nu\nu_0} \sum k \ldots)\, \Delta_{ab}^c \left(\sum k\right) R_b(\ldots k_\mu - \delta_{\mu\mu_0} \sum k \ldots),$$

где R_a, R_b соответствуют Γ_a и Γ_b.

---

* Пользуемся случаем отметить, что по недосмотру в работе [6] при формулировке этой и предыдущей теорем знак суммы был пропущен.

Поэтому

$$F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha) = F_a(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)\,F_b(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)\,P_{ab}\Big(\sum k\Big).$$

где P_{ab} — полином функции распространения Δ^c_{ab}.

Так как число узлов в Γ_a и Γ_b меньше s, то, в силу предположения индукции,

$$|F_a|\prod_{\Gamma_a}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L_a}} \leqslant C_a,$$

$$|F_b|\prod_{\Gamma_b}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L_b}} \leqslant C_b,$$

где $\prod_{\Gamma_a}$, $\prod_{\Gamma_b}$ берутся соответственно по линиям внутри Γ_a, Γ_b.

Поэтому

$$\left|F\prod_{G}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_aC_b\left|P_{ab}\Big(\sum k\Big)\right|\alpha_{ab}^{1-\frac{1}{2L}}\prod_{\Gamma_a}\alpha_l^{\frac{1}{2L_a}-\frac{1}{2L}}\prod_{\Gamma_b}\alpha_l^{\frac{1}{2L_b}-\frac{1}{2L}} \leqslant C,$$

где C — выражение, полиномиально ограниченное по k, ω, α, и $L = L_a + L_b + 1$.

Таким образом, в данном случае утверждение доказано. Отметим, что этот случай реализует фактически индукцию по числу узлов.

Рассмотрим теперь случай, когда снятие любой одной линии не нарушает связности $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_s$.

В этом случае мы будем пользоваться основной «итерационной формулой»:

$$R^*(G_1G_2\ldots G_s) = \int \Delta^c_{12}(t)\,R_{12}(G^t\,|\,\mathcal{J}^t_\Gamma)\,dt$$

в предположении, что исследуется влияние линии 1—2.

Мы уже видели при доказательстве предыдущей теоремы, что применение этой формулы для целей индукции наталкивается на известные трудности, связанные с тем, что требуется сначала показать выполнение предположений индукции не только для $R(G_1G_2\ldots G_s)$, но и для $R_{12}(G, \mathcal{J}_\Gamma)$.

Вспомним, что

$$R_{12}(G_1G_2\ldots G_s\,|\ldots\mathcal{J}_\Gamma\ldots) = R(G_1G_2\ldots G_s\,|\ldots\mathcal{J}_\Gamma\ldots) +$$

$$+\sum_{\Gamma'\subset G} R(G_1G_2\ldots G_s : \Gamma'\,|\,\mathcal{J}_\Gamma)$$

и что операции без звездочки берутся при наличии m линий, но с теми же $\nu(\Gamma_a)$, что и для $m+1$ линий.

Заметим, что это требование не противоречит условиям теоремы, ибо совпадение чисел $\nu(\Gamma_a)$ в диаграмме с $(m+1)$ и с m линиями усиливает условия типа $\bar{r}[\Delta(G)] \geqslant r[\Delta(G)]$ и т. д.

Чтобы показать, что R_{12} удовлетворяет условиям индукции, достаточно это сделать для

$$R(G_1G_2\ldots G_s\,\Gamma'\,|\,\mathcal{J}_\Gamma).$$

Рассмотрим с этой целью $\Delta[\Gamma']$. Это будет сумма типа *

$$\sum C_\lambda(\alpha)\, P_\lambda(k \ldots \omega \ldots)\, e^{i \sum A_{G_a G_b} \omega_a \omega_b},$$

причем в силу того, что Γ' — слабо связная диаграмма (следовательно, $\overline{R(\Gamma')} = R(\Gamma)$) и в силу предположений индукции,

$$|C_\lambda(\alpha)| \leqslant \frac{C}{\prod\limits_{\Gamma'} \alpha_l^{1-\frac{1}{2L_1}}}, \tag{16.1}$$

где L_1 — число линий в Γ'.

Степени полиномов P_λ удовлетворяют условию:

$$r(P_\lambda) \leqslant \nu(\Gamma') = \sum \overline{r}\,[\Delta(G_a)] + \sum \overline{r}_l + 2L_{\Gamma'} - 4(s-1).$$

Заметим, что в силу того, что Γ' объединяет несколько G_i, а также в силу того, что $P_\lambda(k \ldots \omega)$ отделено от $C_\lambda(\alpha)$, мы можем образовать величину

$$R_\lambda(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k} \Gamma' | \ldots J_\Gamma),$$

которой за «базисные» узлы взяты Γ' и G_a, не вошедшие в Γ', причем

$$\Delta(\Gamma') = \delta\Big(\sum k\Big) P_\lambda(\ldots k \ldots \omega),$$

и, в силу условия

$$\nu(\Gamma') \geqslant r(P_\lambda),$$

система операций M со своими числами ν, теми же, что у первоначального M, оказывается подходящей. Поэтому условия индукции для

$$R_\lambda(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k} \Gamma' | \ldots J_\Gamma) = \sum F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum A_{ab} p_a p_b}$$

будут выполнены, т. е.

$$|F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)| \leqslant \frac{C}{\prod \alpha_l^{1-\frac{1}{2L'}}} \leqslant \frac{Q}{\prod \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}, \tag{17.1}$$

где

$$L' = L(G_1 G_2 \ldots G_s) - L(\Gamma').$$

Но

$$R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' | J_\Gamma) = \Delta(\Gamma')\, R(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k} | J_\Gamma) =$$

$$= \sum C_\lambda(\alpha)\, e^{i \sum A^\lambda_{ab} \omega_a \omega_b}\, R_1(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k} \Gamma' | J_\Gamma) =$$

$$= \sum G(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum A_{ab} p_a p_b}.$$

Принимая во внимание (16.1), (17.1), находим, что

$$|G(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)| \leqslant \frac{K}{\prod \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}, \tag{18.1}$$

где K — выражение, полиномиально ограниченное по k, ω, α. Итак, мы убедились, что можно написать:

$$R_{12}(G_1 G_2 \ldots G_s | J_\Gamma) = \sum F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b},$$

---

* См. примечание к стр. 600.

причем

$$|F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha\ldots)|\leqslant\frac{C(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)}{\Pi\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}},\tag{19.1}$$

где C — выражение, полиномиально ограниченное по k, ω, α.

В силу формулы (10.3) части I, отсюда легко заключить, что если

$$R(G_1G_2\ldots G_s\ldots\Gamma\ldots)=\sum F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)\,e^{i\sum\lambda_{G_aG_b}p_ap_b},$$

то

$$|F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)|\leqslant\frac{K}{\Pi\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}\cdot\frac{1}{\alpha_{12}^c},\tag{20.1}$$

где c — положительное число.

Но в силу условий теоремы мы можем снять любую линию, поэтому снимем ту, у которой α_{ab} — наибольшее (мы можем считать, что α_l фиксированы). Для нее

$$\alpha_{ab}\geqslant\frac{1}{L}\sum\alpha_l.\tag{21.1}$$

Отсюда легко выводим:

$$|F|\prod{}^{*}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}\leqslant\frac{K'}{(\sum\alpha_l)^c}.\tag{22.1}$$

В формуле (22.1) звездочка над произведением означает, что оно взято по всем $L=m+1$ линиям. K' — выражение, полиномиально ограниченное по k, ω, α.

С другой стороны, в силу теоремы I,

$$\overline{R(G_1G_2\ldots G_s\ldots\Gamma\ldots)}=\sum\overline{F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)}\,e^{i\sum\lambda_{G_aG_b}p_ap_b},$$

где

$$\overline{F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)}=\frac{f(\ldots\sqrt{\alpha}k\ldots\sqrt{\alpha}\omega\ldots\sqrt{\alpha})}{\Phi_r(\ldots\alpha_l\ldots)}.\tag{23.1}$$

Кроме того, мы знаем, что

$$R^{\nu}(G_1G_2\ldots G_s)=[1-M(G)]\,\overline{R^{\nu}(G_1G_2\ldots G_s)},\tag{24.1}$$

т. е. R^{ν} равно остаточному члену для ряда Тейлора от $\overline{R}$ по степеням $(k-\omega)$ $\nu(G)$-го порядка:

$$R^{\nu}(G_1G_2\ldots G_s)=\frac{1}{\nu!}\int_0^1(1-\tau)^{\nu}\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial\tau^{\nu+1}}\,\overline{R^{\nu}(G_1^{\tau}G_2^{\tau}\ldots G_s^{\tau})}\,d\tau.\tag{25.1}$$

Здесь G_1^{τ} и т. д. означает, что вместо k_j надо подставить $\omega_j+\tau_j(k_j-\omega_j)$, $0\leqslant\tau_j\leqslant1$.

Заметим, что в силу того, что k входит с множителем $\sqrt{\alpha}$, после взятия $(\nu+1)$-й производной появляются в виде множителей однородные рациональные функции $\sqrt{\alpha_l}$ $(\nu+1)$-го порядка.

Поэтому

$$F^{\nu}(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)=\frac{f(\ldots\sqrt{\alpha}k\ldots\sqrt{\alpha}\omega\ldots\sqrt{\alpha}\ldots)}{\Phi_{r,\,(\nu+1)}(\ldots\sqrt{\alpha_l}\ldots)}\tag{26.1}$$

и, в силу (22.1),

$$\left|\frac{f(\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}k\ldots\sqrt{\overline{\alpha}}\omega\ldots\sqrt{\overline{\alpha}})}{\Phi_{r-(\nu+1)}(\ldots\sqrt{\overline{\alpha}_l}\ldots)}\prod{}^{*}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}\right|\leqslant\frac{K^*}{(\sum\alpha_l)^c}. \tag{27.1}$$

Положим

$$t=\sum\alpha_l,\quad \alpha_l'=\frac{1}{t}\alpha_l,\quad \sum\alpha_l'=1.$$

Тогда, как это следует из свойств функции f, в силу (27.1) получим:

$$\left|\frac{f(\ldots\sqrt{\overline{\alpha'}}k\ldots\sqrt{\overline{\alpha'}}\omega\ldots t\sqrt{\overline{\alpha'}})}{\Phi_{r-(\nu+1)}(\ldots\alpha_l'\ldots)}\right|\prod{}^{*}\alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}}\left|t^{\frac{\nu+1-r+2L-1}{2}}\leqslant\frac{K^*}{t^c}\right. . \tag{28.1}$$

Таким образом,

$$\left|\frac{f(\sqrt{\overline{\alpha'}}k\ldots\sqrt{\overline{\alpha'}}\omega\ldots t\sqrt{\overline{\alpha'}}\ldots)}{\Phi_{r-(\nu+1)}(\ldots\sqrt{\overline{\alpha_l'}}\ldots)}\right|\prod{}^{*}\alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}}\leqslant\frac{Q}{t^{c-s}}, \tag{29.1}$$

где

$$s=\frac{\nu+1-r+2L-1}{2}>0.$$

Но так как левая часть (29.1) есть полином по t, а из факта ограниченности полинома некоторым числом N в интервале, скажем (1—2), вытекает ограниченность всех его коэффициентов числами, зависящими лишь от N и от степени полинома, то отсюда следует, что левая часть (29.1) должна быть ограничена выражением типа полинома. В силу положительности числа s, отсюда выводим:

$$\left|\frac{f(\ldots\sqrt{\overline{\alpha'}}k\ldots\sqrt{\overline{\alpha'}}\omega\ldots t\sqrt{\overline{\alpha'}}\ldots)}{\Phi_{r-(\nu+1)}(\ldots\sqrt{\overline{\alpha_l'}}\ldots)}\right|\prod{}^{*}\alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}}t^s\leqslant C^*(k,\omega,t), \tag{30.1}$$

или

$$|F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha\ldots)|\prod{}^{*}\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}\leqslant C^*(\ldots k\ldots\omega\ldots t). \tag{31.1}$$

Теперь мы в состоянии доказать существование слабого предела в выражении $R(G_1G_2\ldots G_s)\,I_M(k)$ при $\varepsilon\to 0$, $M\to\infty$.

ТЕОРЕМА 3. *При* $\varepsilon\to 0$, $M\to\infty$

$$R(G_1G_2\ldots G_s)\,I_M(k)\xrightarrow{\text{сл.}}R(G_1G_2\ldots G_s)\,I(k).$$

Доказательство. То обстоятельство, что при фиксированном $\varepsilon>0$ предел при $M\to\infty$ существует, вытекает из неравенства (15.1). Дело в том, что фактор $e^{-\varepsilon\sum\alpha_l}$ делает интеграл (14.1) абсолютно сходящимся при больших α, а возможные особенности при $\alpha\to 0$ имеют, согласно оценке (15.1), интегрируемый характер. Таким образом, при $M\to\infty$ $R(G)\,I_M(k)$ стремится к пределу:

$$R(G)\,I^{\varepsilon}(k)=\delta\left(\sum k\right)\int_0^{\infty}\ldots d\alpha_l\ldots e^{-i\sum\alpha_l m_l^2-\varepsilon\sum\alpha_l}\sum F(\ldots k\ldots\omega\ldots\alpha)\,e^{i\sum A_{G_aG_b}p_ap_b} \tag{32.1}$$

даже в обычном смысле.

Чтобы доказать существование предела при $\varepsilon\to 0$, допустим, что все массы отличны от нуля: $m_l\neq 0$.

Совершим в интеграле (32.1) сначала чисто формально замену переменных

$$\alpha_l=-i\beta_l. \tag{33.1}$$

Тогда интеграл (32.1) запишется в виде:

$$R(G_1G_2\ldots G_s)\,I^{\varepsilon}(k)=$$

$$=\delta\Big(\sum k\Big)\int\limits_0^{\infty}\ldots d\beta_l\sum e^{-\sum\limits_l\beta_l m_l^2+i\varepsilon\sum\beta_l+\sum A^{*}_{G_aG_b}{}^{(\beta)}p_ap_b}\,F^{\varepsilon}(\ldots k\ldots\omega\ldots\beta\ldots). \quad (34.1)$$

Имеет место

ЛЕММА 1. *При выполнении условия*

$$\Big(\sum p_a^0\Big)^2<\min m_l^2 \quad (35.1)$$

форма

$$A=\sum A^{*}_{G_aG_b}(\beta)\,p_a^0\,p_b^0-\sum A^{*}_{G_aG_b}(\beta)\,\bar{p}_a\,\bar{p}_b-\sum\beta_l m_l. \quad p_a=(p_a^0,\ \bar{p}_a), \quad (36.1)$$

— отрицательно определенная.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$A<\sum\beta_l\Big(\sum p_a^0\Big)^2-\sum\beta_l m_l^2. \quad (37.1)$$

Отсюда, в силу условий (35.1), получаем, что $A<0$.

Из леммы 1 вытекает весьма важный вывод. В силу отрицательности показателя экспоненты при условии (35.1), интеграл (34.1) абсолютно сходится, что делает законным преобразование $\alpha_l=-i\beta_l$.

Функция $R(G)\,I^{\varepsilon}_M(k)$ будет аналитической функцией в области, определяемой неравенством (35.1), при любом $\varepsilon>0$. При $\varepsilon\to 0$ предел выражения $R(G)\,I^{\varepsilon}_M(k)$ существует в области, определяемой неравенством (35.1), и является аналитической функцией.

При любых значениях импульсов предел выражения (34.1) при $\varepsilon\to 0$ будет существовать, но только в смысле слабой сходимости.

Это может быть доказано следующим образом.

Рассмотрим выражение

$$\int R(G)\,I^{\varepsilon}_M(\ldots k\ldots)\,F(\ldots k\ldots)\ldots dk\ldots, \quad (38.1)$$

где $F(\ldots k\ldots)$ — функция класса $C(q,r,n)$ при достаточно больших q,r. Представим функции $F(\ldots k\ldots)$ в виде суммы

$$F(\ldots k\ldots)=\Phi(\ldots k\ldots)-\Phi(\ldots k\ldots)+F(\ldots k\ldots), \quad (39.1)$$

где $\Phi(\ldots k\ldots)$ подбирается так, чтобы вне области (35.1) она обращалась в нуль и чтобы достаточно большое число моментов функции $F-\Phi$ обращалось в нуль:

$$\int h_{i_1}^{\alpha_1}h_{i_2}^{\alpha_2}\ldots h_{i_s}^{\alpha_k}\,[F(\ldots k\ldots)-\Phi(\ldots k\ldots)]\ldots dk=0$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k=0,1,2,3).$$

При $\varepsilon\to 0$ выражения

$$\int R(G)\,I^{\varepsilon}_M(\ldots k\ldots)\,\Phi(\ldots k\ldots)\,dk,$$

$$\int R(G)\,I^{\varepsilon}_M(\ldots k\ldots)\,[F(\ldots k\ldots)-\Phi(\ldots k\ldots)]\,dk$$

стремятся к определенному пределу, первое — в силу существования обычного предела в области (35.1), второе — в силу теоремы 1 части 1.

Наконец, заметим, что в случае, когда все $m_l \neq 0$, аналитичность функции $R(G)I(k)$ в области (35.1) делает возможным фиксировать выбор точек ω, вокруг которых происходит разложение в ряд Тейлора при определении $\Delta(\Gamma)$. В качестве точек ω можно взять точки $\omega = 0$. Такой выбор обеспечивает лоренцинвариантность.

В случае, если не все массы отличны от нуля, аналитичность функций $R(G)I(k)$ может быть доказана только для чисто мнимых временных компонент векторов k. Центры тейлоровских разложений приходится помещать в точках

$$\omega = (i\omega^0, \vec{\omega})$$

с чисто мнимой временной компонентой.

Для того, однако, чтобы не нарушить лоренцинвариантности, необходимо полученные полиномы осреднять по сфере

$$\omega^{02} + \vec{\omega}^2 = \mu^2$$

с произвольным радиусом μ.

§ 2. Заключительные замечания

Теоремы, доказанные в предыдущем параграфе, вместе с результатами первой части этой работы дают возможность полностью решить задачу о построении произведений вида

$$\prod \Delta_l^c(x^r - x_s).$$

С одной стороны, теорема 1 части I определяет это произведение как функционал на подклассе $D(q, r, n) \subset C(q, r, n)$ гладких функций, а с другой стороны, теоремы 1, 2, 3 части II показывают, что операция R осуществляет продолжение этого функционала на все пространство $C(q, r, n)$.

В самом деле, после перехода к x-представлению величины $\Delta(\Gamma_1), \ldots, \Delta(\Gamma_m)$ будут выражаться через функции Дирака от разностей координат $\delta(x_1 - x_2)$, $\delta(x_1 - x_3)$, $\ldots$, $\delta(x_\nu - x_n)$ и их производных, которые, будучи рассматриваемы как функционалы, равны нулю на классе $D(q, r, n)$.

Следует подчеркнуть, что нами рассмотрен лишь случай связных диаграмм. Однако, в силу теоремы прямого умножения, для обобщенных функций случай несвязных диаграмм не создает дополнительных затруднений [см. (4)].

Заметим, что для целей квантовой теории поля необходимо определение выражений $\Delta(\Gamma_k)$ обобщить следующим образом:

$$\Delta(\Gamma) = -M(\Gamma)\overline{R(\Gamma)} + \delta(\sum k) Z'_\Gamma(k),$$

где $Z'_\Gamma(k)$ — полином той же структуры, что и полином $M(\Gamma)\overline{R(\Gamma)}$, а его коэффициенты — произвольные константы. Таким образом, выражение $R(G)I(k)$, рассматриваемое как вклад от диаграммы, будет содержать некоторое количество произвольных постоянных, играющих важную роль

при проведении перенормировки физических констант поля. Этот вопрос выходит за рамки данной работы, он рассмотрен подробно в работе (4).

Поступило
13.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фейнман Р., Теория позитронов, Сборник «Новейшее развитие квантовой электродинамики» под редакцией Д. Д. Иваненко, Москва (1954), 138—160; Пространственно-временная трактовка квантовой электродинамики, Сборник «Новейшее развитие квантовой электродинамики» под редакцией Д. Д. Иваненко, Москва (1954), 161—204.

[2] Дайсон Ф., S-матрица в квантовой электродинамике, Сборник «Новейшее развитие квантовой электродинамики», Москва (1954), 205—238.

[3] Salam A., Divergent integrals in renormalizable field theories, Phys. Rev., 84 (1951), 426—431.

[4] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля, I, II, Успехи физ. наук, т. 55 (1955), 149—214; т. 57 (1955), 1—92.

[5] Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., К теории умножения причинных сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 1 (1955), 25—28.

[6] Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 3 (1955), 429—432.

[7] Соболев С. Л., Methode nouvelle a résoudre le problème de Cauchy, Матем. сборн., 1(43) (1936), 39—72.

[8] Schwartz L., Théorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951.

[9] Парасюк О. С., К теории причинных сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 4 (1955), 643—645.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 611—622

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КОМПАКТНОСТЬ КЛАССОВ $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Доказывается несколько теорем о компактности в классах дифференцируемых функций многих переменных. В частности, ограниченное в метрике $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ множество функций компактно в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$, где $r_i' < r_i$.

Проблеме компактности классов функций, идущей от работ Асколи ([2]) и Арцеля ([1]), посвящено много исследований. Основная теорема Арцеля о компактности относится к классу непрерывных функций. В метрике L_p ей соответствуют теоремы Колмогорова ([1]) (для $p > 1$) и Тулайкова ([16]) (для $p = 1$). Ряд исследований последнего времени относится к проблеме компактности дифференцируемых функций многих переменных. Сюда относятся работы Реллиха ([14]), И. Г. Петровского и К. Н. Смирнова ([11]), В. И. Кондрашева ([5]), Пиконе ([12]), Пуччи ([13]), С. М. Никольского ([7]), Л. Д. Кудрявцева ([6]) и др.

В настоящей работе мы доказываем несколько теорем о компактности в классах $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ дифференцируемых функций многих переменных. Эти исследования непосредственно базируются на наших работах ([7]), ([8]), ([9]), в которых изучались классы $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$.

Мысль заключается в том, что в классах $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$, определенных для произвольных положительных чисел r_i (не обязательно целых), вводится метрика. Она позволяет заключить, что если множество $\mathfrak{S}$ функций f ограничено константой M в смысле данной метрики $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$, то оно компактно в смысле любой метрики $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$, каковы бы ни были числа $r_i' < r_i$.

Однако при этом доказывается, что та функция f, к которой соответствующая подпоследовательность множества $\mathfrak{S}$ сходится в любой метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$, принадлежит к исходному классу $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ снова с нормой, не превышающей M.

Непосредственно обобщается один наш результат о компактности в классе $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ [см. ([7]), теорема 14] (к нему примыкает работа Л. Д. Кудрявцева ([6])) и результаты В. И. Кондрашева ([5]), базирующиеся на теории вложения классов С. Л. Соболева [см. ([15])].

Наряду с классами $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ мы рассматриваем еще определенные классы $W_p^{(\rho)}H^{(\alpha)}(g)$ (ρ — целое, $0<\alpha<1$).

При $\alpha=0$ — это известные классы $W_p^{(\rho)}$ Соболева ([15]). Дальнейшее развитие доказываемых здесь теорем о компактности возможно по линии нахождения областей наиболее общего типа, для которых они имеют место; в частности, важно знать, когда теорема б) верна при $G'=G$.

§ 1

Пусть G есть область n-мерного пространства R_n точек $(x_1,\ldots,x_n)$, $r_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$, $r_i=\overline{r}_i+\alpha_i$, где $\overline{r}_i$ — целое и $0<\alpha_i\leqslant 1$. Положим

$$\|f\|_{L_p(G)}=\Big(\int\limits_G |f|^p\,dG\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (1\leqslant p\leqslant\infty).$$

В частности, при $p=\infty$

$$\|f\|_{L_\infty(G)}=\sup_{\overline{Q}\in G}\operatorname{vrai}|f(\overline{Q})|.$$

Функция f называется принадлежащей к классу $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G;M)$ [см. ([7]), ([8])], если она имеет интегрируемые в p-й степени на G частные (обобщенные) производные

$$f_{x_i}^{(k)}=\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} \quad (k=0,1,\ldots,\overline{r}_i, \quad i=1,\ldots,n)$$

и имеют место неравенства:

$$\|f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}+\overline{h}_i)-f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q})\|_{L_p(G')}\leqslant M|\overline{h}_i|^{\alpha_i} \text{ при } 0<\alpha_i<1, \tag{1.1}$$

$$\|f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}+\overline{h}_i)-2f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q})+f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}-\overline{h}_i)\|\leqslant M|\overline{h}_i| \text{ при } \alpha_i=1, \tag{1.2}$$

где G' — любая область, принадлежащая к G, и $\overline{h}_i$ — любые допустимые векторы, сдвигающие G' в пределах G в направлении x_i. Мы называем вектор $\overline{h}_i$ допустимым, если вместе с ним и векторы $t\overline{h}_i$ сдвигают G' в пределах G при $0\leqslant t\leqslant 1$ в случае $0<\alpha_i<1$ и при $-1\leqslant t\leqslant 1$ в случае $\alpha_i=1$.

Если $G=R_n$, то все векторы $\overline{h}_i$ — допустимые, и в неравенствах (1.1) и (1.2) достаточно считать $G'=G=R_n$.

Положим

$$\|f\|_{L_p(G)}^{(r_1,\ldots,r_n)}=\|f\|_{L_p(G)}+M_f, \tag{1.3}$$

где M_f — наименьшая константа M, с которой функция $f\in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G;M)$. Обозначим через $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ совокупность всех функций f, принадлежащих к $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G;M)$ с любой константой M.

Нетрудно видеть, что $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ с введенной нормой есть линейное нормированное пространство.

При $r_1=\ldots=r_n=r$ положим

$$H_p^{(r)}(G)=H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G), \quad \|f\|_{L_p(G)}^{(r)}=\|f\|_{L_p(G)}^{(r_1,\ldots,r_n)}. \tag{1.4}$$

Если G есть R_n, то будем опускать G; таким образом, будем писать

$$H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}, \quad H_p^{(r)}, \quad \|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_n)}$$

вместо, соответственно,

$$H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(R_n), \quad H_p^{(r)}(R_n), \quad \|f\|_{L_p(R_n)}^{(r_1,\ldots,r_n)} \ldots$$

Будем еще рассматривать классы $H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ периодических периода 2π функций (по всем переменным x_i), которые, кроме того, что они периодические, определяются как классы $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(\Delta_*)$, где

$$\Delta_* = \{0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi \ (i = 1, \ldots, n)\}.$$

В этом случае в неравенствах (1.1) и (1.2) можно считать $G' = G = \Delta_*$, так как теперь функции f определены на всем пространстве R_n и векторы $\bar{h}_i$ любой длины допустимы.

Положим также

$$\|f\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)} = \|f\|_{L_p(\Delta_*)}^{(r_1,\ldots,r_n)}, \quad \|f\|_{L_p^*}^{(r)} = \|f\|_{L_p(\Delta_*)}^{(r)},$$

$$\|f\|_{L_p^*} = \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f|^p \, dx_1 \ldots dx_n\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Величина (1.3) удовлетворяет всем условиям нормы Банаха. Таким образом, $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ есть линейное нормированное банахово пространство. При $G = R_n$ оно во всяком случае полно, так же как пространство $H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ [см. (9), лемма].

Мы еще будем рассматривать класс функций $W_p^{(\rho)}H^{(\alpha)}(G; M)$ [см. (9)], где ρ — целое и $0 < \alpha < 1$, состоящий из всех функций f, интегрируемых в p-й степени вместе со своими частными (обобщенными) производными (смешанными и несмешанными) до порядка ρ включительно; при этом частные производные ψ порядка ρ удовлетворяют неравенству

$$\|\psi(\bar{Q} + \bar{h}) - \psi(\bar{Q})\|_{L_p(G')} \leqslant M |\bar{h}|^\alpha \tag{1.1'}$$

для любых $G' \subset G$ и всех допустимых векторов $\bar{h}$, сдвигающих G' в пределах G в любом направлении. Положим

$$\|f\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f, \tag{1.5}$$

где M_f — наименьшая константа, для которой при всех G' и допустимых $\bar{h}$ выполняется неравенство (1.1'), и введем линейное нормированное пространство $W_p^{(\rho)}H^{(\alpha)}(G)$ функций f с нормой (1.5).

Заметим, что выражение $\rho + \alpha$, входящее в обозначение $\|f\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)}$, мы понимаем не как сумму, а как специальный знак, так как a priori мы должны различать нормы в пространствах $W_p^{(\rho)}H^{(\alpha)}(G)$ и $H_p^{(r)}(G)$, где $r = \rho + \alpha$.

Впрочем, когда $G = \Delta$ есть прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, эти нормы не отличаются существенно [см. (9), теорема 3].

Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА О КОМПАКТНОСТИ. *Пусть задана последовательность* $\{f_m\}$ *функций, обладающая одним из следующих свойств:*

а) $f_m \in H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$, $\quad \|f_m\|_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)} \leqslant K$,

б) $f_m \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$, $\quad \|f_m\|_{L_p(G)}^{(r_1,\ldots,r_n)} \leqslant K$,

в) $f_m \in W_p^{(\rho)}H^{(\alpha)}(G)$, $\quad \|f_m\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)} \leqslant K$;

в случае в) *предполагается, что область* G *ограничена и граница ее* S *непрерывно дифференцируема* $\rho+1$ *раз.*

Тогда можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$ *и такую функцию* f, *удовлетворяющую соответственно условиям* а), б), в), *что будут выполняться следующие свойства:*

каковы бы ни были числа r_i' *и* α', *для которых*

$$0<r_i'<r_i \quad (i=1,\ldots,n), \qquad 0<\alpha'<\alpha, \tag{1.6}$$

имеет место соответственно:

в случае а)

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{m_k}-f\|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}=0; \tag{1.7}$$

в случае б)

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{m_k}-f\|_{L_p(G')}^{(r_1',\ldots,r_n')}=0, \tag{1.8}$$

какова бы ни была ограниченная область G' *такая, что* $\overline{G'}\subset G$. *Если* $G=\Delta=\{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i\leqslant 1,\ldots,n\}$ *есть прямоугольный параллелепипед, то можно считать* $G'=G$.

В случае в)

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{m_k}-f\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha')}=0. \tag{1.9}$$

Доказательство этой теоремы будет базироваться на следующей лемме функционального анализа, представляющей собою небольшое обобщение известной теоремы (Мазура) функционального анализа [см. (3), а), стр. 237 или (3), б), также см. (10)].

ЛЕММА 1. *Пусть одно и то же линейное множество элементов* x *нормировано двумя нормами Банаха* $\|x\|$ *и* $\|x\|_*$, *где* $\|x\|_*\leqslant c\|x\|$. *Таким образом, его можно рассматривать как пространства* E *и* E_* (*не обязательно полные*). *Здесь константа* c *не зависит от* x.

Пусть в E *задано ограниченное множество* F *и последовательность операторов* $A_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$, *отображающих* E *в* E_*, *определяемых равенствами*

$$A_n(x)=x-U_n(x)$$

и удовлетворяющих условиям:

1) *операторы* $y=U_n(x)$, *где* $x\in E$ *и* $y\in E_*$, *вполне непрерывны* (*линейность* U_n *не требуется*);

2) $\sup\limits_{x\in F}\|A_n(x)\|=\eta_n\to 0 \quad (n\to\infty)$.

Тогда множество F *компактно в* E_*.

Доказательство. Зададим произвольную последовательность элементов $x_1, x_2,\ldots$, принадлежащих к F. Она ограничена и, вследствие свойства 1), из нее можно выбрать подпоследовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\ldots$, для которой $U_1(x_k^{(1)})$ $(k=1,2,\ldots)$ сходится в E_*. Из этой подпоследовательности можно выбрать, в свою очередь, подпоследовательность $x_1^{(2)}, x_2^{(2)},\ldots$, для которой $U_2(x_k^{(2)})$ $(k=1,2,\ldots)$ сходится в E_*. Продолжив этот процесс неограниченно и взяв диагональную последовательность $z_1=x_1^{(1)}$, $z_2=x_2^{(2)},\ldots$, мы получим, что для нее $U_n(z_k)$ сходится в E_* при $k\to\infty$ и при любом n. Зададим теперь $\varepsilon>0$. В силу условия 2), при некото-

ром $n = N$ выполняется неравенство

$$\| A_N(x) \|_* \leqslant c \| A_N(x) \| < \varepsilon$$

для всех $x \in F$.

Если p и q превышают достаточно большое число, то будем иметь:

$$\| z_p - z_q \|_* \leqslant \| A_N(z_p) \|_* + \| U_N(z_p) - U_N(z_q) \|_* + \| A_N(z_q) \|_* \leqslant 3\varepsilon,$$

и компактность F в E_* доказана.

§ 2

Доказательство утверждения теоремы для случая а).

Зададим числа r_i', для которых имеет место (1.6), и подберем число α так, чтобы

$$r_i' \leqslant r_i \alpha < r_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ функций $f \in H_{p^*}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, для которых выполняется неравенство

$$\| f \|_{p^*}^{(r_1, \ldots, r_n)} \leqslant K. \tag{2.2}$$

Наилучшее приближение $f \in \mathfrak{M}$ при помощи тригонометрических полиномов порядков $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по переменным $x_1, \ldots, x_n$ в метрике L_p^* удовлетворяет неравенству:

$$E_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f)_{L_p^*} \leqslant K d \sum_1^n \frac{1}{\nu_i^{r_i}}, \tag{2.3}$$

где $\nu_i \geqslant 1$ и d — константа, не зависящая от K и ν_i [см. (7), стр. 259].

Отметим, что если положительные числа ρ_i удовлетворяют неравенствам $\rho_i \leqslant r_i$, то из (2.3) следует также:

$$E_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f)_{L_p^*} (f)_{L_p^*} \leqslant K d \sum_1^n \frac{1}{\nu_i^{\rho_i}} \quad (\nu_i \geqslant 1),$$

и в силу теоремы 10 работы (7), $f \in H_{p^*}^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}$, причем

$$\| f \|_{p^*}^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)} < c \| f \|_{p^*}^{(r_1, \ldots, r_n)} \quad (\rho_i \leqslant r_i, \ i = 1, \ldots, n), \tag{2.4}$$

где константа c зависит от ρ_i и r_i.

Положим

$$\nu_i = 2^{\sqrt[r_i]{s}} \quad (i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots).$$

Из (2.3) следует, что можно указать тригонометрические полиномы T_s степеней $\nu_i = 2^{\sqrt[r_i]{s}}$, соответственно по переменным x_i, такие, что

$$\| f - T_s \|_{p^*} < \frac{dKn}{2^s} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$f - T_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} (T_s - T_{s-1}),$$

где ряд сходится в смысле L_{p^*} и

$$\| T_s - T_{s-1} \|_{p^*} < \frac{c_1 K}{2^s} \leqslant \frac{1}{2^{\alpha s}} \frac{c_1 K}{2^{(1-\alpha)m}} \quad (s = m+1, \ m+2, \ \ldots).$$

При этом $T_s - T_{s-1}$ есть тригонометрический полином порядка $2^{\frac{s}{r_i}}$ соответственно по x_j. Отсюда, на основании леммы (3.12) работы [8], можно заключить, что

$$f - T_m \in H_p^{(r_1\alpha,\ldots,r_n\alpha)}\left(\frac{c_2K}{2^{(1-\alpha)m}}\right) \subset$$

$$\subset H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}\left(c_3\left(\frac{c_2K}{2^{(1-\alpha)m}} + \|f - T_m\|_{p^*}\right)\right)$$

(см. неравенство (2.4)), и так как

$$\|f - T_m\|_{p^*} < \frac{dK}{2^m} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\|f - T_m\|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant c_3\left(\frac{c_2K}{2^{(1-\alpha)m}} + \|f - T_m\|_{p^*}\right) + \|f - T_m\|_{p^*} \leqslant$$

$$\leqslant \eta_m \to 0 \quad (m \to \infty) \tag{2.5}$$

равномерно для всех функций $f \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь

$$E_m(f)_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} = \inf_T \|f - T_{\frac{m}{2^{r_1}} \ldots \frac{m}{2^{r_n}}}\|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$$

есть наилучшее приближение функции f при помощи тригонометрических полиномов степеней $2^{\frac{m}{r_i}}$ соответственно по переменным x_i в метрике $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$. На основании (2.5), можно считать, что

$$E_m(f)_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} < \eta_m \to 0 \text{ при } m \to \infty \text{ (для всех } f \in \mathfrak{M}). \tag{2.6}$$

Кроме того, в силу (2.4), справедливо неравенство:

$$\|f\|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant c\|f\|_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n')} \leqslant cK \quad (f \in \mathfrak{M}),$$

где c не зависит от K. Таким образом, совокупность $\mathfrak{M}$ ограничена в метрике $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$. Если еще принять во внимание, что оператор, приводящий в соответствие каждой функции f ее наилучший в метрике $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$ тригонометрический полином, вполне непрерывен, то из последних свойств, на основании леммы 1 и принимая во внимание полноту пространства $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$, мы получим следующее утверждение:

Если $0 < r_i' < r_i$, то из всякой последовательности $\{f_m\}$ функций, удовлетворяющих условию а), можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в смысле $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$ к некоторой функции $f \in H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$.

Пусть

$$0 < r_i^{(\nu)} < r_i, \quad \lim_{\nu \to \infty} r_i^{(\nu)} = r_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.7}$$

На основании доказанного мы можем из заданной в теореме последовательности $\{f_m\}$ выделить подпоследовательность, сходящуюся в метрике $H_p^{(r_1^{(1)},\ldots,r_n^{(1)})}$ к некоторой функции. Из этой подпоследовательности можно

выделить, в свою очередь, подпоследовательность, сходящуюся в метрике $H_p^{(r_1^{(2)},\ldots,r_n^{(2)})}$, и т. д. Применяя, наконец, диагональный процесс, мы получим окончательно подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, которая будет сходиться в любой метрике $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$, где $r_i' < r_i\,(i=1,\ \ldots,\ n)$, к некоторой функции f.

Функция f принадлежит ко всем пространствам $H_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')}$, где $r_i' < r_i$. Но нам нужно доказать, что $f \in H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и что для f выполняется неравенство (2.2).

В самом деле, пусть $f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}$ обозначает частную производную от f порядка $\overline{r}_i$ по x_i. Тогда [см. (8), лемма 2.11 *]

$$\| f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)} - f_{x_i}^{(\overline{r}_i)} \|_{p^*} \leqslant c \| f_{m_k} - f \|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} \to 0 \quad (k \to \infty), \tag{2.8}$$

$$\| f_{m_k} - f \|_{p^*} \leqslant c \| f_{m_k} - f \|_{p^*}^{(r_1',\ldots,r_n')} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{2.9}$$

Но в силу того, что функции f_{m_k} подчиняются неравенству (2.2) справедливы неравенства:

$$\| f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} + \overline{h}_i) - f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}) \|_{L_p(\Delta_*)} \leqslant M_i^{(k)} |\overline{h}|^{\alpha_i} \quad (0 < \alpha_i < 1,\ k = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

или

$$\| f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} + \overline{h}_i) - 2 f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}) + f_{m_k x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} - \overline{h}_i) \|_{L_p(\Delta_*)} \leqslant M_i^{(k)} |\overline{h}| \quad (\alpha_i = 1), \tag{2.11}$$

где

$$\| f_{m_k} \|_{p^*} + M_i^{(k)} \leqslant K \quad (i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

Здесь $\overline{h}_i$ — произвольный вектор, направленный по оси x_i.

Переходя в неравенствах (2.10) и (2.11) к пределу при $k \to \infty$, на основании (2.8) будем иметь:

$$\| f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} + \overline{h}_i) - f_{x_i}^{(r_i)}(\overline{Q}) \|_{L_p(\Delta_*)} \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} M_i^{(k)} |\overline{h}_i|^{\alpha_i} \quad (0 < \alpha_i < 1) \tag{2.13}$$

или

$$\| f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} + \overline{h}_i) - 2 f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q}) + f_{x_i}^{(\overline{r}_i)}(\overline{Q} + \overline{h}_i) \|_{L_p(\Delta_*)} \leqslant \overline{\lim} M_i^{(k)} |\overline{h}_i| \quad (2.14)$$

и, на основании (2.9),

$$\lim \| f_{m_k} \|_p^* = \| f \|_p^*. \tag{2.15}$$

Отсюда $f \in H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}(M)$, где

$$\| f \|_{p^*} + M \leqslant K, \tag{2.16}$$

т. е. выполняется неравенство (2.2).

Утверждение теоремы для случая а) доказано.

Доказательство утверждения теоремы для случая б). Убедимся сначала в справедливости этого утверждения в случае, когда область G совпадает с R_n.

---

* Применяя эту лемму, можно считать $G_\eta = G = \Delta_*$, так как в данном случае речь идет о периодических функциях.

Итак, пусть $\mathfrak{M}$ есть множество функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\|f\|_p^{(r_1,\ldots,r_n)} \leqslant K.$$

Будем рассуждать по отношению к $\mathfrak{M}$ в точности так же, как в периодическом случае, но теперь уже в качестве приближающих функций будем рассматривать вместо тригонометрических полиномов T_s целые функции g_s соответственно степеней $2^{\frac{s}{r_i}}$ по x_i, а вместо $E_m(f)_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$ — величину $A_m(f)_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$, представляющую собою наилучшее приближение функции f в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$, при помощи целых функций степени $2^{\frac{m}{r_i}}$ соответственно по x_i. В остальном в точности те же выкладки приведут нас к следующим неравенствам, аналогичным (2.5) и (2.6):

$$A_m(f)_p^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant \tau_{|m} \to 0 \quad (f \in \mathfrak{M}), \tag{2.5'}$$

$$\|f\|_{L_p}^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant cK \qquad (f \in \mathfrak{M}). \tag{2.6'}$$

Однако теперь оператор $g_m(f)$ наилучшего приближения f при помощи целых функций степеней $2^{\frac{m}{r_i}}$ по x_i уже не является вполне непрерывным в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}$. Но он будет вполне непрерывным, если его образы рассматривать в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(G)$, где G — произвольное ограниченное множество. Именно, всякая ограниченная в метрике $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ последовательность $\{f_m\}$ переходит при помощи оператора наилучшего (в той же метрике $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$) приближения в компактную в метрике $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ последовательность $\{g_n(f_k)\}$. Это обстоятельство вытекает из того, что из ограниченной в метрике $H_1^{(r_1,\ldots,r_n)}$ последовательности функций $g_m (m = 1, 2, \ldots)$ заданных степеней можно выделить подпоследовательность, которая равномерно сходится вместе со своими частными производными до любого наперед заданного порядка на ограниченной области G [см. (7), стр. 265—266 и лемма 1].

Высказанные соображения позволяют рассуждать следующим образом. Функции f пространства

$$E = H_p^{(r_1',\ldots,r_n')} = H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(R_n)$$

мы будем рассматривать как элементы пространства $E_* = H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(G)$, причем, очевидно,

$$\|f\|_{E_*} = \|f\|_{L_p(G)}^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant \|f\|_p^{(r_1',\ldots,r_n')} = \|f\|_E.$$

Оператор $\varphi = g_m(f)$ наилучшего в метрике E приближения отображает E в E_* как вполне непрерывный оператор и при этом, в силу (2.5'),

$$\|A_m^{(r_1',\ldots,r_n')}(f)\|_p = \|f - g_m(f)\|_p^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant \tau_{|m} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

$f \in \mathfrak{M}$

Кроме того, в силу (2.6′), множество $\mathfrak{M}$ ограничено в E. Поэтому, вследствие леммы 1, множество $\mathfrak{M}$ компактно в смысле $E_* = H_p^{(r_1', \ldots, r_n')}(G)$. Таким образом, из последовательности функций $f_m \in \mathfrak{M}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, обладающую свойством:

$$\| f_{m_k} - f_{m_{k'}} \|_{L_p(G)}^{(r_1', \ldots, r_n')} \to 0. \tag{2.17}$$

Введем теперь числа $r_i^{(\nu)}$ и области G_* и G_ν, обладающие свойствами:

$$0 < r_i^{(\nu)} < r_i, \quad \lim_{\nu \to \infty} r_i^{(\nu)} = r_i, \quad G_1 \supset \bar{G}_2 \supset G_2 \supset \bar{G}_3 \supset \ldots \supset \bar{G}_* \supset G_* \supset \bar{G}',$$

где G' — заданная ограниченная область ($\nu = 1, 2, \ldots$), и на основе полученного результата, применяемого для $G = G_\nu$, $r_i' = r_i^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), при помощи выбора подпоследовательностей и диагонального процесса получаем такую подпоследовательность исходной, принадлежащей к $\mathfrak{M}$ последовательности, для которой имеет место:

$$\| f_{m_k} - f_{m_{k'}} \|_{L_p(G_*)}^{(r_1', \ldots, r_n')} \to 0 \quad (k, k' \to \infty)$$

при любых положительных $r_i' < r_i$.

Так как $G_* \supset \bar{G}'$, то функции f_{m_k} можно продолжить за пределы G' так, что для продолженных функций $\bar{f}_{m_k}$ справедливо [см. (8), теорема 2.2)]:

$$\| f_{m_k} - f_{m_{k'}} \|_{L_p(G')}^{(r_1', \ldots, r_n')} \leqslant \| \bar{f}_{m_k} - \bar{f}_{m_{k'}} \|_p^{(r_1', \ldots, r_n')} < c \| f_{m_k} - f_{m_{k'}} \|_{L_p(G_*)}^{(r_1', \ldots, r_n')} \to 0,$$

где $c = c(r_1', \ldots, r_n')$, каковы бы ни были $r_i' < r_i$.

Вследствие полноты $H_p^{(r_1', \ldots, r_n')}$ существует функция f, для которой

$$\| f_{m_k} - f \|_{L_p(G')}^{(r_1', \ldots, r_n')} \leqslant \| \bar{f}_{m_k} - f \|_p^{(r_1', \ldots, r_n')} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Она — единственная для всех рассматриваемых r_i', так как

$$\| \bar{f}_{m_k} - f \|_p \leqslant \| \bar{f}_{m_k} - f \|_p^{(r_1', \ldots, r_n')}.$$

Доказательство того, что $f \in \mathfrak{M}$, проводится точно так же, как и в периодическом случае [см. неравенства (2.8) — (2.16)].

Пусть на произвольной области G, все равно какой — ограниченной или неограниченной, задана последовательность функций $\{f_m\}$, удовлетворяющих условию б). Обозначим через G_ν область, состоящую из всех точек G, отстоящих от границы G на расстоянии, большем $\frac{1}{\nu}$, и в то же время отстоящих от нулевой точки R_n на расстоянии, меньшем $\nu = 1, 2, \ldots$.

Мы можем каждую из функций f_m продолжить на все пространство R_n за пределы G_1* так, что для продолженной функции $f_m^{(1)}$ при $j = 1$

---

* Если G_1 не имеет смысла, то начинаем процесс с G_N, где N достаточно велико.

будет иметь место неравенство:

$$\|f_m^{(j)}\|_p^{(r_1',\ldots,r_n')} \leqslant c_j K, \tag{2.18}$$

где c_j — константа, не зависящая от K, и $m = 1, 2, \ldots$ [см. (8), теорема 2.2]. На основании уже доказанного утверждения, из последовательности $\{f_m^{(j)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_k}^{(j)}\}$, сходящуюся в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(G_1)$ для всех $r_i' < r_i$.

Теперь мы продолжаем на R_n функции f_{m_k}, соответствующие полученной подпоследовательности $\{m_k\}$, за пределы области G_2 так, чтобы для продолженных функций $f_{m_k}^{(2)}$ выполнялось неравенство (2.18) при $j = 2$, и из нее выделяем подпоследовательность, сходящуюся в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(G_2)$ для всех $r_i' < r_i$, и т. д.

Воспользовавшись диагональным процессом, можно окончательно определить такую подпоследовательность нашей исходной последовательности $\{f_m\}$, которая сходится в метрике $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(G')$ для всех $r_i' < r_i$ и ограниченных областей G' с $\bar{G}' \subset G$. Мы ее снова обозначим через $\{f_m\}$. Продолжая функции f_m за пределы областей G_N, мы обнаружим, как это делалось выше, что существует функция f, для которой имеет место:

$$\|f_m - f\|_{L_p(G')}^{(r_1',\ldots,r_n')} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

для всех $r_i' < r_i$ и ограниченных областей G' с $\bar{G}' \subset G$.

Остается еще доказать, что функция f удовлетворяет условию б). Из соотношений $\|f\|_{L_p(G')} = \lim_{m\to\infty} \|f_m\|_{L_p(G')} \leqslant K$, верных для всех G', следует:

$$\|f\|_{L_p(G')} \leqslant K.$$

Пусть теперь $\bar{h}_i$ есть допустимый сдвиг в направлении x_i области G, в пределах G. В силу условий б), наложенных на функции f_m, имеют место неравенства:

$$\|f_{mx_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} + \bar{h}_i) - f_{mx_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q})\|_{L_p(G')} \leqslant M_{f_m} |\bar{h}_i|^{\alpha_i} \quad (0 < \alpha_i < 1) \tag{2.19}$$

и

$$\|f_{mx_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} + \bar{h}_i) - 2f_{mx_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q}) + f_{mx_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} - \bar{h}_i)\|_{L_p(G')} \leqslant M_{f_m} |\bar{h}_i| \quad (\alpha_i = 1). \tag{2.20}$$

При этом

$$\|f_m\|_{L_p(G)} + M_{f_m} \leqslant K \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2.21}$$

Зафиксировав $\bar{h}_i$, перейдем в неравенствах (2.19) и (2.20) к пределу при $m \to \infty$ и в результате получим:

$$\|f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} + \bar{h}_i) - f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q})\|_{L_p(G')} \leqslant M |\bar{h}_i|^{\alpha} \quad (0 < \alpha_i < 1),$$

$$\|f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} + \bar{h}_i) - 2f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q}) + f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}(\bar{Q} - \bar{h}_i)\|_{L_p(G')} \leqslant M |h_i| \quad (\alpha_i = 1)$$

для любой области G' с $\bar{G}' \subset G$ и любых допустимых векторов $\bar{h}_i$, где

$$M = \overline{\lim_{m\to\infty}} M_{f_m}.$$

Пусть $\{m_k\}$ — подпоследовательность натуральных чисел, для которой

$$M_{f_{m_k}} \to M.$$

Из (2.21) следует:

$$\|f_{m_k}\|_{L_p(G)} + M_{f_{m_k}} \leqslant K \quad (K = 1, 2, \ldots; \bar{G} \subset G),$$

откуда, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\|f\|_{L_p(G)} + M \leqslant K$$

и, наконец,

$$\|f\|^{(r_1,\ldots,r_n)}_{L_p(G)} \leqslant \|f\|_{L_p(G)} + M \leqslant K.$$

Мы доказали, таким образом, основную часть утверждения теоремы для случая б). Что касается последнего замечания, входящего в это утверждение и касающегося области $G = \Delta$, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, то оно есть следствие утверждения (б), если принять во внимание, что функции $f \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(\Delta)$ можно продолжить за пределы Δ на R_n так, что продолженная функция $\bar{f} \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$, и так, что

$$\|\bar{f}\|^{(r_1,\ldots,r_n)}_p < c\,\|f\|^{(r_1,\ldots,r_n)}_{L_p(\Delta)},$$

причем соответствие $f \to \bar{f}$ есть линейный оператор [см. (9), § 2].

Утверждение (1.9) следует из (1.8) и теоремы 5 нашей работы (9). Согласно этой теореме, функции последовательности $\{f_m\}$, удовлетворяющей условию в), можно продолжить на R_n за пределы $\rho + 1$ раз непрерывно дифференцируемой границы S области G так, что продолженные функции $\bar{f}_m \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}$ и будут выполняться неравенства:

$$\|\bar{f}_m\|^{(\rho+\alpha)}_p < c\,\|f_m\|^{(\rho+\alpha)}_{L_p(G)} \leqslant cK.$$

Но пространства $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}$ и $H_p^{(\rho+\alpha)}$ существенно друг от друга не отличаются [см. (9)] и можно считать, что норма $\|\bar{f}_m\|^{(\rho+\alpha)}_p$ есть норма f в $H_p^{(\rho+\alpha)}$. Но тогда из уже доказанного утверждения б) теоремы следует существование подпоследовательности $\{m_k\}$ и функции f таких, что

$$\|f - f_{m_k}\|^{(\rho+\alpha')}_{L_p(G)} \leqslant \|f - \bar{f}_{m_k}\|^{(\rho+\alpha')}_p \to 0 \quad (k \to \infty)$$

для всех положительных $\alpha' < \alpha$. Теорема доказана.

Поступило
13. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arzela C., Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali, Acc. delle Science di Bologna, VI, 3, 1906.

[2] Ascoli G., Le curve limiti di una varietà data di curve, Memoria, Acc. dei Lincei, III, 18 (1884), 521—586.

[3] Banach S., a) Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, или б) Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, 1946.

[4] Колмогоров А. Н., Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Gött. Nachr. (1931), 60—63.

[5] Кондрашев В. И., О некоторых свойствах функций из пространств, Доклады Ак. наук СССР, 48 (1948), 563—566.

[6] Кудрявцев Л. Д., Об одном обобщении теоремы С. М. Никольского о компактности классов дифференцируемых функций, Успехи мат. наук, 9, № 2(59) (1954), 111—120.
[7] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Математ. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII(1951), 244—278.
[8] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сб., 33(75): 2 (1953), 261—326.
[9] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сб., 40(82): 2 (1956), 243- 268.
[10] Никольский С. М., Теория приближения функций, ч. 1. Функциональный анализ, Днепропетровск, 1947.
[11] Петровский И. Г. и Смирнов К. Н., Об условиях равностепенной непрерывности семейств функций, Бюллетень МГУ, секция А, вып. 10(1938), 1—15.
[12] Picone M., Sulla derivazione parziale per serie, Bol. Un. Mat. It., III, 5 (1950) 24—33.
[13] Pucci C., Compatezza da successione di funzioni e derivabilità delle funzioni limitè, Annali di Matematica, 36 (1954), 1—25.
[14] Rellich, Ein Satz über mittlere Konvergenz, Gött. Nachr. (1930), 30—35.
[15] Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
[16] Тулайков А. Н., Zur Kompaktheit in Raum L_p für $p = 1$, Gött. Nachr. (1933) 167—170.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 623—642

В. К. ДЗЯДЫК

О КОНСТРУКТИВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ*

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе дается обращение теоремы А. Ф. Тимана (см. теорему 1) для функций, имеющих r-ю производную ($r\geqslant 0$), принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$.

§ 1. Введение

В этой работе рассматриваются следующие классы функций, заданных для определенности в промежутке $[-1, 1]$:

1) класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица степени $\alpha\ (0<\alpha<1)$, т. е. функций f, первая разность Δf которых при всех $x\in[-1,1)$ и $h>0$ удовлетворяет условию:

$$|f(x+h)-f(x)|\,Ah^{\alpha}, \tag{1}$$

где A — постоянная. Этот класс будем обозначать через $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

2) Класс квази-гладких функций, т. е. функций f, вторая разность $\Delta^2 f$ которых при всех $x\in(-1,1)$ и $h>0$ удовлетворяет условию:

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Ah, \tag{2}$$

где A — постоянная. Этот класс будем обозначать через Z.

В периодическом случае вопрос о конструктивной характеристике функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$ был поставлен и решен в известных работах Д. Джексона ([1]) и ([2]) и С. Н. Бернштейна ([3]), а вопрос о конструктивной характеристике квази-гладких функций — в работе А. Зигмунда ([4]). В работах ([1]), ([2]) и ([3]) результаты, относящиеся к функциям класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, были перенесены также на непериодические функции, заданные на конечном сегменте $[a, b]$. Для функций класса Z аналогичные результаты были получены Н. Монтелем, А. Ф. Тиманом и автором [см. ([5]) и ([6])]. Однако в непериодическом случае все эти результаты формулировались в каждом отдельном случае не для всего сегмента $[a, b]$, на котором задана функция, а для любого сегмента $[a', b']$, целиком содержащегося в интервале (a, b), или же, как выяснилось позже [см. ([7]) и ([8])], допускали усиление.

---

* Задача, решаемая в этой работе, предложена мне С. М. Никольским. Ему же принадлежит гипотеза, что имеет место утверждение, содержащееся в теоремах 3 и 4 этой работы.

Что касается необходимых условий для принадлежности функции f классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, то здесь, после работ Д. Джексона, первый существенный результат был получен в 1946 г. С. М. Никольским, который в одном важном случае (для функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,1$) показал, что теорема Д. Джексона для сегмента $[a, b]$ допускает усиление [см. (7), стр. 306] в том смысле, что для всякой функции $f(x)$ из класса $\mathrm{Lip}\,1$, заданной на сегменте $[-1,1]$ и ограниченной по модулю числом 1, можно построить для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right). \qquad (*)$$

В этом результате, в отличие от теоремы Джексона, учитывается положение точки x на сегменте $[-1,1]$ и видно, что для построенных многочленов $P_n(x)$ при $|x| \to 1$ отклонение $|f(x) - P_n(x)|$ становится величиной порядка $\frac{\ln n}{n^2}$.

В этой же работе показано, что для данного метода при $|x| \to 1$ во втором слагаемом неравенства $(*)$ нельзя заменить O на o. Однако С. М. Никольский высказал предположение о существовании процессов приближения, дающих в этом случае отклонение $\delta_n(x)$ такое, что

$$|\delta_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + O\left(\frac{|x|}{n}\right)\right). \qquad (**)$$

В 1951 г. А. Ф. Тиман показал возможность дальнейшего усиления теоремы Джексона [см. (14)] в том смысле, что для всякой функции $f(x)$ из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, заданной на сегменте $[-1,1]$ и ограниченной по модулю числом 1, можно построить для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}\left((\sqrt{1-x^2})^\alpha + \left(\frac{|x|}{n}\right)^\alpha\right), \qquad (***)$$

где C — постоянная, не зависящая ни от x, ни от n.

Наконец, в том же году А. Ф. Тиман, обобщая этот свой результат, доказал следующую теорему [см. (8) и (9)].

ТЕОРЕМА 1 (А. Ф. Тиман). *Если функция $f(x)$, заданная на $[-1,1]$, имеет там r-ю $(r \geqslant 0)$ непрерывную производную, то существует константа C, не зависящая от x и n, такая, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1,1]$ неравенству:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right]. \qquad (3)$$

где

$$\omega_r(h) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant h} |f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [-1,1].$$

Как следствие, из этой теоремы вытекает, что если функция $f(x)$ имеет r-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица степени $\alpha\,(0<\alpha<1)$, то для нее неравенство (3) примет вид:

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\frac{C}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{|x|}{n}\right)^r\left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{|x|}{n^2}\right)^\alpha\right]. \tag{3'}$$

Неравенство (3′) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\frac{C}{n^{r+\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha}+\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right], \tag{3''}$$

где C — некоторая новая постоянная.

Чтобы в этом убедиться, достаточно принять во внимание следующие неравенства:

$$\text{а)}\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{|x|}{n}\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\,,$$
$$x\in[-1,1],\quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

б) при произвольных $a>0$, $b>0$ и $s>0$ будет

$$\frac{1}{2}(a^s+b^s)<(a+b)^s<2^s(a^s+b^s). \tag{5}$$

Неравенство (4) очевидно. Для доказательства же неравенства (5) достаточно учесть, что, с одной стороны,

$$(a+b)^s>\max\{a^s;\ b^s\}\geqslant\frac{a^s+b^s}{2}\,,$$

а с другой стороны,

$$(a+b)^s\leqslant\max\{(2a)^s;\ (2b)^s\}<2^s(a^s+b^s).$$

В настоящей работе доказывается, что для функций, имеющих r-ю производную $(r\geqslant 0)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$, имеет место теорема, обратная теореме А. Ф. Тимана.

В § 2 доказываются неравенства, являющиеся аналогом для рассматриваемого нами случая известных неравенств А. А. Маркова [см. ([10]), стр. 51—75 или ([11]), стр. 245] и С. Н. Бернштейна [см. ([12]), стр. 15 и 18 или ([11]), стр. 242]. Эти неравенства служат для оценки в каждой точке $x\in(-1,1)$ модуля производной от многочлена $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, удовлетворяющего в интервале $(-1,1)$ неравенству

$$|P_n(x)|\leqslant(\sqrt{1-x^2}\,)^\rho+\frac{1}{n^\rho}\,,$$

когда $\rho\geqslant 0$, или неравенству

$$|P_n(x)|\leqslant(\sqrt{1-x^2}\,)^\rho,$$

когда $\rho\leqslant 0$.

В § 3 доказываются теоремы 3 и 4, показывающие, что условие, выражаемое неравенством (3″), является при $0<\alpha<1$ не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы заданная функция $f(x)$ имела r-ю производную, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Указываются также следствия из этих теорем.

Наконец, в § 4 приводится одно достаточное условие для того, чтобы данная функция имела r-ю производную, принадлежащую классу Z.

§ 2. Об одном неравенстве для модуля производной от многочлена

ТЕОРЕМА 2. *Если многочлен $P_n(x)$ порядка не выше n удовлетворяет в интервале $(-1,1)$ неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant L(\sqrt{1-x^2})^\rho, \quad \text{когда} \quad \rho \leqslant 0, \tag{6}$$

или неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant L\left[(\sqrt{1-x^2})^\rho + \frac{1}{n^\rho}\right], \quad \text{когда } \rho \geqslant 0, \tag{6'}$$

где L и ρ — постоянные, то его производная $P_n'(x)$ удовлетворяет при каждом $x \in (-1,1)$ неравенству

$$|P_n'(x)| \leqslant CnL \min\left\{(\sqrt{1-x^2})^{\rho-1}; \frac{1}{n^{\rho-1}}\right\}, \text{ если } \rho \leqslant 1, \tag{7}$$

и неравенству

$$|P_n'(x)| \leqslant CnL\left[(\sqrt{1-x^2})^{\rho-1} + \frac{1}{n^{\rho-1}}\right], \text{ если } \rho \geqslant 1, \tag{7'}$$

где C — постоянная, зависящая только от ρ.

Доказательство. Положим $\rho = r + \alpha$, где r — целое число, $0 \leqslant \alpha < 1$, и проведем специальные доказательства для случаев: 1) $r=0$, 2) $r=-1$ и $r=-2$, 3) $r \leqslant -3$, 4) $r=1$. После этого, в случае 5) покажем, что при $r \geqslant 2$ доказательство можно получить по индукции.

1) Проведем доказательство для случая $r=0$, т. е. покажем, что если

$$|P_n(x)| \leqslant L\left[(\sqrt{1-x^2})^\alpha + \frac{1}{n^\alpha}\right],$$

то

$$|P_n'(x)| \leqslant CnL \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}}; n^{1-\alpha}\right\} \quad (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{8}$$

При $\alpha = 0$ это утверждение является следствием упомянутых выше неравенств А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна (см. введение).

Если же $\alpha > 0\ (0 < \alpha < 1)$, то, полагая $x = \cos t$, для всех $t \in [0, 2\pi]$ имеем:

$$|P_n(\cos t)| \leqslant L\left(|\sin t|^\alpha + \frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{9}$$

Применяя к производной от тригонометрического полинома n-го порядка $P_n(\cos t)$ тождество М. Рисса [см. ([11]), стр. 243], получим:

$$[P_n(\cos t)]' = -P_n'(\cos t)\sin t = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} P_n[\cos(t+t_k)] \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2\frac{t_k}{2}}, \tag{10}$$

где $t_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$. Отсюда, если учесть, что

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}} = n \tag{11}$$

[см. ([11]), стр. 243], вследствие (9) и (5) вытекает:

$$|P_n'(\cos t)\sin t| \leqslant \frac{L}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\left(|\sin(t+t_k)|^\alpha + \frac{1}{n^\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}} =$$

$$= \frac{L}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{|\sin t\cos t_k+\cos t\sin t_k|^\alpha}{\sin^2\frac{t_k}{2}}+\frac{L}{4n^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^\alpha L|\sin t|^\alpha}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}}+\frac{2^\alpha L|\cos t|^\alpha}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2^\alpha\left|\sin\frac{t_k}{2}\cos\frac{t_k}{2}\right|^\alpha}{\sin^2\frac{t_k}{2}}+Ln^{1-\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant 2^\alpha nL|\sin t|^\alpha+\frac{L|\cos t|^\alpha}{4^{1-\alpha}n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\frac{t_k}{2}\right|^{2-\alpha}}+\sum_{k=n+1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\frac{t_k}{2}\right|^{2-\alpha}}\right)+Ln^{1-\alpha}.$$

Заменяя во второй сумме индекс суммирования k на $2n-(i-1)$ и учитывая, что

$$t_{2n-(i-1)}=\frac{4n-2i+2-1}{2n}\pi=2\pi-\frac{2i-1}{2n}\pi=2\pi-t_i,$$

получим:

$$|P_n'(\cos t)\sin t|\leqslant 2^\alpha nL|\sin t|^\alpha+$$

$$+\frac{L|\cos t|^\alpha}{4^{1-\alpha}n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\frac{t_k}{2}\right|^{2-\alpha}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\left(\pi-\frac{t_i}{2}\right)\right|^{2-\alpha}}\right)+Ln^{1-\alpha}=$$

$$=2^\alpha nL|\sin t|^\alpha+\frac{2L|\cos t|^\alpha}{4^{1-\alpha}n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\frac{t_k}{2}\right|^{2-\alpha}}+Ln^{1-\alpha}. \tag{12}$$

Принимая во внимание, что $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$ при $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|\sin\frac{t_k}{2}\right|^{2-\alpha}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2k-1}{4n}\pi\right|^{2-\alpha}}=(2n)^{2-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^{2-\alpha}}<$$

$$<(2n)^{2-\alpha}\left(1+\frac{1}{2}\int_1^{2n}\frac{dx}{x^{2-\alpha}}\right)<(2n)^{2-\alpha}\left[1+\frac{1}{2(1-\alpha)}\right]<\frac{3.2^{1-\alpha}}{1-\alpha}n^{2-\alpha}.$$

Подставляя эту оценку в (12), находим:

$$|P_n'(\cos t)\sin t|\leqslant 2^\alpha nL|\sin t|^\alpha+\frac{3.2^\alpha L|\cos t|^\alpha}{1-\alpha}n^{1-\alpha}+Ln^{1-\alpha}\leqslant 2^\alpha nL|\sin t|^\alpha+$$

$$+\left(1+\frac{6}{1-\alpha}\right)Ln^{1-\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$|P_n'(\cos t)|\leqslant\frac{2nL}{|\sin t|^{1-\alpha}}+\frac{7L}{1-\alpha}\cdot\frac{n^{1-\alpha}}{|\sin t|}, \tag{13}$$

или, возвращаясь к переменной x:

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{2nL}{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}}+\frac{7L}{1-\alpha}\frac{n^{1-\alpha}}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot nL\left[(\sqrt{1-x^2})^\alpha+\frac{1}{n^\alpha}\right]\quad\left(C_1=\frac{7}{1-\alpha}\right). \tag{14}$$

Полученное неравенство является хорошим в промежутке D:

$$D=\left[-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right),\ 1-\frac{1}{2n^2}\right]. \tag{15}$$

На всем этом промежутке, в силу (14), будем иметь:

$$\max_{x\in D}|P_n'(x)|\leqslant\frac{7}{1-\alpha}Ln\left[\frac{1}{\left(\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^2}\right)^{1-\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{n^{1-\alpha}}{n\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^2}}\right]<CLn^{2-\alpha}, \tag{16}$$

где C — постоянная.

Для оценки модуля многочлена $P_n'(x)$ в точках множества $CD=[-1,1]-D$ воспользуемся следующим предложением, доказанным С. Н. Бернштейном [см. ([13]), стр. 27, формула (17 bis)]:

Если многочлен степени n $|F_n(x)|\leqslant L$ на отрезке $[a,b]$, то во всякой точке вещественной оси вне отрезка $[a,b]$ имеем:

$$|F_n(x)|\leqslant\frac{L}{2}\left(R^n+\frac{1}{R^n}\right)<LR^n, \tag{17}$$

где

$$R=\frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Из этого предложения, как следствие, вытекает следующая

ЛЕММА 1. *Если на некотором сегменте $[a,b]$ многочлен $F_n(x)$ степени не выше n ограничен по модулю числом L, то во всех точках сегмента $\left[a-\frac{1}{n^2},\ b+\frac{1}{n^2}\right]$ он не превзойдет по модулю CL, где C — некоторая постоянная, не зависящая от n, т. е.*

$$\text{если } \max_{x\in[a,b]}|F_n(x)|\leqslant L, \text{ то } \max_{a-n^{-2}\leqslant x\leqslant b+n^{-2}}|F_n(x)|\leqslant CL. \tag{18}$$

Действительно, предположим, для определенности, что $x\in\left[b,\ b+\frac{1}{n^2}\right]$. Тогда, в силу (17), в этой точке x будем иметь: $|F_n(x)|<LR^n$, где

$$R<\frac{2\left(b+\frac{1}{n^2}-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}+\sqrt{1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2(b-a)}\right)^2-1}=$$

$$=1+\frac{2}{n^2(b-a)}+\frac{2}{n}\sqrt{\frac{1}{b-a}+\frac{1}{n^2(b-a)^2}}<$$

$$<1+\frac{2}{n(b-a)}+\frac{2}{n}\sqrt{1+\frac{2}{b-a}+\frac{1}{(b-a)^2}}=1+\frac{4}{b-a}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}$$

$$(n=1,2,\ldots).$$

Отсюда следует [см. (5)], что

$$R^n<\left[1+\frac{2}{n}\left(1+\frac{2}{b-a}\right)\right]^n<A\quad(A=\text{const}),$$

т. е. $R^n<A$, где A не зависит от n. Для точек $x\in\left[a-\frac{1}{n^2},\ a\right]$ доказательство аналогично. Этим лемма 1 доказана.

В силу леммы 1, мы, вследствие (16), заключаем, что во всех точках

$x \in [-1,1]$ имеет место неравенство:

$$\max_{x\in[1,1]} |P_n'(x)| \leqslant C_1 L n^{2-\alpha}, \tag{19}$$

где C_1 — постоянная. Из этого неравенства и неравенства (14) следует справедливость утверждения, содержащегося в (8), и теорема для случая $r = 0$ доказана.

2) Случай $r = -1$ или $r = -2$. Пусть для некоторого многочлена $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ при всех $x \in (-1,1)$ выполняется неравенство:

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{L}{(\sqrt{1-x^2})^{q-\alpha}} \qquad (q = -r = 1 \text{ или } = 2;\ 0 \leqslant \alpha < 1),$$

а, значит, в силу леммы 1 $\left[\text{при } x \in D \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{L}{\left(\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^2}\right)^{q-\alpha}} \leqslant \right.$ $\left. \leqslant \frac{4}{3} L n^{q-\alpha}\right]$, также неравенство:

$$|P_n(x)| \leqslant C' L \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q-\alpha}};\ n^{q-\alpha}\right\} \qquad \left(q = 1 \text{ или } 2,\ 0 \leqslant \alpha < 1,\ C' = \text{const}\right). \tag{20}$$

Тогда, производя замену $x = \cos t$, получаем:

$$|P_n(\cos t)| \leqslant L_1 \min\left\{\frac{1}{|\sin t|^{q-\alpha}};\ n^{q-\alpha}\right\} \qquad (L_1 = C'L).$$

Отсюда после применения тождества М. Рисса [см. 10)] вытекает:

$$|[P_n(\cos t)]'| \leqslant \frac{L_1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \min\left\{\frac{1}{|\sin(t+t_k)|^{q-\alpha} \sin^2 \frac{t_k}{2}};\ \frac{n^{q-\alpha}}{\sin^2 \frac{t_k}{2}}\right\}. \tag{21}$$

Мы произведем оценку величины $|[P_n(\cos t)]'|$ только для случая $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$, ибо остальные случаи легко к нему сводятся.

Разобьем сумму $\sum_{k=1}^{2n}$ на две, отнеся в первую $\sum'$ члены, в которых

$$|\sin(t+t_k)| \geqslant \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2},$$

а во вторую $\sum''$ — члены, в которых

$$|\sin(t+t_k)| < \sin\frac{t}{2}.$$

Оценим сначала снизу в сумме $\sum''$ величину модуля $\sin\frac{t_k}{2}$. Заменяя в $\sin(t+t_k)$ аргумент t_k на $t_k' = t_k + j\pi$ (j — одно из чисел 0, —1, —2) так, чтобы выполнялось неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t + t_k' \leqslant \frac{\pi}{2},$$

найдем, что для выполнения неравенства

$$|\sin(t+t_k)| = |\sin(t+t_k')| < \sin\frac{t}{2}$$

необходимо, чтобы

$$|t + t_k'| < \frac{t}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{t}{2} < -t_k' < \frac{3t}{2} \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

и, значит, что во всех членах второй суммы $\sum''$ имеет место неравенство:

$$|\sin t_k| = |\sin(-t_k')| > \sin\frac{t}{2}$$

и, следовательно, также неравенство

$$\left|\sin\frac{t_k}{2}\right| > \sin\frac{t}{4} \tag{22}$$

(ибо если $t_k = n\pi \pm \alpha$, где $\frac{t}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то тогда $\frac{t_k}{2} = \frac{n}{2}\pi \pm \frac{\alpha}{2}$, где $\frac{t}{4} < \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$). Поэтому из (21) следует:

$$|P_n'(\cos t)\sin t| \leqslant \frac{L_1}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{q-\alpha}} \cdot \frac{1}{4n}\sum{}' \frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}} +$$

$$+ \frac{L_1}{4n}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{4}}\sum{}'' \min\left\{\frac{1}{|\sin(t+t_k)|^{q-\alpha}};\ n^{q-\alpha}\right\}. \tag{23}$$

Считая для определенности, что $t \in (t_j - t_1,\ t_{j+1} - t_1]$, где $1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, и учитывая то обстоятельство, что при изменении k от 1 до $2n$ сумма $t + t_k$ будет в таком случае принимать значения, образующие арифметическую прогрессию с разностью, равной $t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{n}$, и находящиеся по одному в полуинтервалах

$$(t_j,\ t_{j+1}],\ (t_{j+1},\ t_{j+2}],\ (t_{j+2},\ t_{j+3}],\ \ldots\ (t_{j+2n-1},\ t_{j+2n}], \tag{24}$$

мы легко обнаружим, что в сумме $\sum''$ содержится не больше, чем $4j + 2$ слагаемых, соответствующих только тем значениям k (быть может не всем), при которых $t + t_k$ попадает в полуинтервал из системы (24), лежащий либо в отрезке $(\pi - t_{j+1},\ \pi + t_{j+1})$, либо в отрезке $(2\pi - t_{j+1},\ 2\pi + t_{j+1})$. Если мы выделим из суммы $\sum''$ еще два слагаемых, аргументы которых попали соответственно в полуинтервалы

$$(t_n,\ t_{n+1}] = \left(\pi - \frac{\pi}{2n},\ \pi + \frac{\pi}{2n}\right] \text{ и } (t_{2n},\ t_{2n+1}] = \left(2\pi - \frac{\pi}{2n},\ 2\pi + \frac{\pi}{2n}\right],$$

и промажорируем каждое из них через $n^{q-\alpha}$, то оставшуюся часть $\sum''$ мы сможем разбить на четыре суммы $\sum_1''$, $\sum_2''$, $\sum_3''$ и $\sum_4''$, распространенные на слагаемые, аргументы $t + t_k$ которых находятся в полуинтервалах системы (24), содержащихся соответственно в промежутках:

$$\left(\pi - t_{j+1},\ \pi - \frac{\pi}{2n}\right],\ \left(\pi + \frac{\pi}{2n},\ \pi + t_{j+1}\right),\ \left(2\pi - t_{j+1},\ 2\pi - \frac{\pi}{2n}\right],$$

$$\left(2\pi + \frac{\pi}{2n},\ 2\pi + t_{j+1}\right).$$

Промажорируем после этого каждую из сумм $\sum_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ через

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{|\sin t_k|^{q-\alpha}}.$$

Тогда, вследствие соотношения (23), получим:

$$|P_n'(\cos t)\sin t| \leqslant \frac{L_1\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{q-\alpha}}{(\sin t)^{q-\alpha}} \cdot \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{t_k}{2}} +$$

$$+\frac{L_1}{4n}\left(\frac{4\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}}{\sin t}\right)^2\left[2n^{q-\alpha} + 4\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{|\sin t_k|^{q-\alpha}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^q L_1 n}{(\sin t)^{q-\alpha}} + \frac{L_1}{n(\sin t)^{q-\alpha}} \cdot \frac{4}{(\sin t_j)^{2-q+\alpha}}\left[2n^{q-\alpha} + 4\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{q-\alpha}\right]^* \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4L_1 n}{(\sin t)^{q-\alpha}} + \frac{32L_1 n^{q-\alpha}}{n(\sin t)^{q-\alpha}} \cdot \frac{n^{2-q+\alpha}}{(2j-1)^{2-q+\alpha}}\left[3 + \frac{(2j)^\alpha}{\alpha}\right] \leqslant \frac{CL_1 n}{(\sin t)^{q-\alpha}}, \qquad (25)$$

где C зависит только от α.

Из (25) следует, что при $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$|P_n'(\cos t)| \leqslant \frac{CL_1 n}{(\sin t)^{q+1-\alpha}}$$

и, значит, в силу замены $x = \cos t$, при $x \in [0, 1)$ имеем:

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{CL_1 n}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-\alpha}}. \qquad (26)$$

Так как это неравенство, очевидно, выполняется и при $x \in (-1, 0]$, то мы легко найдем, что на сегменте D [см. (15)] имеет место оценка:

$$|P_n'(x)| \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3 CL_1 n^{q+2-\alpha}.$$

Поэтому, в силу леммы 1, это неравенство (но с некоторой иной константой C') будет выполняться и на всем сегменте $[-1, 1]$:

$$|P_n'(x)| \leqslant C'L_1 n^{q+2-\alpha}. \qquad (27)$$

Таким образом, многочлен $P_n'(x)$ удовлетворяет в интервале $(-1, 1)$ одновременно неравенствам (26) и (27). Отсюда, в силу (20′), следует, что при всех $x \in (-1, 1)$

$$|P_n'(x)| \leqslant \bar{C}Ln \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-\alpha}};\ n^{q+1-\alpha}\right\},$$

где $\bar{C}$ — постоянная, зависящая только от α. Теорема для случая $r = -1$ и $r = -2$ полностью доказана.

---

* При $t \leqslant t_1$ мы во втором слагаемом (23) вместо $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{4}}$ могли вынести $\frac{1}{\sin^2\frac{t_1}{2}}$ за знак Σ^*.

3) Случай $r \leqslant -3$ легко сводится к случаям 1) и 2), ибо если

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{L}{(\sqrt{1-x^2})^{q-\alpha}}, \text{ где } q = -r \geqslant 3, \tag{28}$$

то $\overline{P}_{n_1}(x) = P_n(x)(1-x^2)^{\left[\frac{q-1}{2}\right]}$ есть многочлен степени $n + 2\left[\frac{q-1}{2}\right] = n_1$, удовлетворяющий условию:

$$|\overline{P}_{n_1}(x)| \leqslant L \cdot \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q-2\left[\frac{q-1}{2}\right]-\alpha}}.$$

Поэтому, в силу случая 2),

$$|\overline{P}'_{n_1}(x)| = \left|P'_n(x)(1-x^2)^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} - 2x\left[\frac{q-1}{2}\right]P_n(x)(1-x^2)^{\left[\frac{q-1}{2}\right]-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant CLn_1 \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-2\left[\frac{q-1}{2}\right]-\alpha}};\ n_1^{q+1-2\left[\frac{q-1}{2}\right]-\alpha}\right\}.$$

Отсюда следует:

$$|\overline{P}'_n(x)| \leqslant \frac{2\left[\frac{q-1}{2}\right]\cdot|P_n(x)|}{1-x^2} + \overline{C}_1 Ln \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-\alpha}};\ \frac{n^{q+1-\alpha}}{(n\sqrt{1-x^2})^{2\left[\frac{q-1}{2}\right]}}\right\}$$

($\overline{C}_1$ — постоянная).

Эта оценка показывает, что при $x \in D$

$$|P'_n(x)| \leqslant C_1 Ln \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-\alpha}};\ n^{q+1-\alpha}\right\} < \left(\frac{4}{3}\right)^{q+1} C_1 Ln^{q+2-\alpha},$$

где C_1 — постоянная. Поэтому, применяя лемму 1, убеждаемся, что и на всем интервале $(-1,1)$

$$|P'_n(x)| < C'_1 Ln \min\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{q+1-\alpha}};\ n^{q+1-\alpha}\right\} =$$

$$= C'_1 Ln \min\left\{(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha-1};\ \frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right\},$$

где C'_1 — новая постоянная.

4) Для доказательства теоремы в случае $r = 1$, в равной мере, как и для $r > 1$ [см. случай 5)], нам потребуются следующие леммы:

ЛЕММА 2. *Если для некоторого многочлена $P_n(x) = P_n^{(0)}(x)$ степени не выше n и его производных $P_n^{(i)}(x)$ порядка $i = 1, 2, \ldots, r$ на сегменте $[-1,1]$ имеют место неравенства:*

$$|P_n^{(i)}(x)| \leqslant \frac{L}{n^{r-i+\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r-i+\alpha} + \frac{1}{n^{r-i+\alpha}}\right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r, \tag{29}$$

где L — постоянная, то при всех $x \in \left[-\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\ 1+\frac{1}{n^2}\right]$

$$|P_n^{(i)}(x)| \leqslant \frac{CL}{n^{r-i+\alpha}}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-x^2}\right)^{r-i+\alpha} + \frac{1}{n^{r-i+\alpha}}\right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r, \tag{30}$$

где C — постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Так как при $x \in [-1,1]$, в силу (29),

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant L \cdot \frac{1}{n^\alpha}\left[(\sqrt{1-x^2})^\alpha + \frac{1}{n^\alpha}\right],$$

то вследствие (8) мы получаем, что при всех $x \in [-1,1]$

$$|P_n^{(r+1)}(x)| \leqslant C_1 L n^{2-2\alpha} \quad (C_1 \text{ — постоянная}).$$

Поэтому, в силу леммы 1, при всех $x \in \left[-\left(1+\frac{1}{n^2}\right), 1+\frac{1}{n^2}\right]$ будем иметь:

$$|P_n^{(r+1)}(x)| \leqslant C_2 L n^{2-2\alpha},$$

где C_2 — постоянная. Отсюда, вследствие формулы Лагранжа, следует, что, например, при каждом $x \in \left(1,1+\frac{1}{n^2}\right]$:

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant |P_n^{(r)}(1)| + (x-1)|P^{(r+1)}(\xi_1)| \leqslant \frac{L}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{n^2} C_2 L n^{2-2\alpha} = C' L \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

$$|P_n^{(r-1)}(x)| \leqslant |P^{(r-1)}(1)| + (x-1)|P_n^{(r)}(\xi_2)| \leqslant \frac{L}{n^{2+2\alpha}} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{C' L}{n^{2\alpha}} = C'' L \cdot \frac{1}{n^{2+\alpha}},$$

. . . . . .

$$|P(x)| \leqslant |P_n(1)| + (x-1)|P_n'(\xi_{r+1})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{n^{2r+2\alpha}} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{C^{(r)} L}{n^{2r-2+2\alpha}} = C^{(r+1)} \cdot L \frac{1}{n^{2r+2\alpha}},$$

где $1 < \xi_i < x$ и $C^{(i)}$ — постоянные. Этим лемма 2 доказана.

ЛЕММА 2′. *Пусть многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет на сегменте $D = \left[-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right), 1-\frac{1}{2n^2}\right]$ условию:*

$$|P_n(x)| \leqslant L\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{k+\alpha} \quad (k \text{ — целое} \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1). \tag{31}$$

Тогда, в предположении, что теорема 2 уже доказана для значений $r = 0, 1, 2, \ldots, k$, на всем сегменте $[-1,1]$ будем иметь:

$$|P_n(x)| \leqslant CL\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{k+\alpha} + \frac{1}{n^{k+\alpha}}\right],$$

где C — постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Производя замену $x = \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)y$ и учитывая неравенство (5), представим неравенство (31) в виде:

$$\left|P_n\left[\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)y\right]\right| \leqslant L\left(\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^2 y^2}\right)^{k+\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{k+\alpha}{2}} L\left[\left(\sqrt{1-y^2}\right)^{k+\alpha} + \frac{1}{n^{k+\alpha}}\right] \tag{31′}$$

при всех $y \in [-1,1]$. Поэтому, в силу предполагаемой справедливости теоремы 2 при $r = 1, 2, \ldots, k$, мы, применяя лемму 2, видим, что неравенство (31′) после замены в нем множителя $2^{\frac{k+\alpha}{2}}$ некоторой постоянной C и радикала $\left(\sqrt{1-y^2}\right)^{k+\alpha}$ радикалом $\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-y^2}\right)^{k+\alpha}$ также имеет место при условии, что $y \in \left[-\left(1+\frac{1}{n^2}\right), 1+\frac{1}{n^2}\right]$.

Вследствие этого, возвращаясь к переменной $x = \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)y$, мы находим, что при всех $x \in \left[-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]$, а следовательно, тем более при всех $x \in [-1,1]$ будет справедливо соотношение:

$$|P_n(x)| \leqslant CL\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\left(\frac{x}{1-\frac{1}{2n^2}}\right)^2}\right)^{k+\alpha}+\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant C'L\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{k+\alpha}+\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right],$$

где C' — постоянная. Лемма 2′ доказана.

ЛЕММА 3. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет при всех $x \in [-1,1]$ условию*

$$|P_n(x)| \leqslant L\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{k+\alpha}+\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right] \quad (k \text{ — целое} \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1), \tag{32}$$

то его можно представить в виде:

$$P_n(x) = (1-x^2)\,P_{n-2}(x) + ax + b, \tag{33}$$

где $P_{n-2}(x)$ — некоторый многочлен степени $\leqslant n-2$, а числа a и b удовлетворяют условию

$$|a| \leqslant \frac{L}{n^{k+\alpha}}, \quad |b| \leqslant \frac{L}{n^{k+\alpha}}. \tag{34}$$

Доказательство. Из (32) и (33) следует:

$$|P_n(-1)| = |a-b| \leqslant \frac{L}{n^{k+\alpha}}, \quad |P_n(1)| = |a+b| \leqslant \frac{L}{n^{k+\alpha}}.$$

После этого неравенства (34) становятся очевидными.

В качестве следствия из этой леммы вытекает, что если некоторый многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет условию (32) и нас интересует вопрос оценки модуля $|P_n(x)|$, то мы, представив этот многочлен в форме (33), можем положить после этого $a = b = 0$, т. е. без ущерба для общности можем считать, что числа -1 и $+1$ являются корнями интересующего нас многочлена $P_n(x)$.

Переходим к доказательству теоремы 2 в случае $r = 1$. Предположим, что некоторый многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет условию

$$|P_n(x)| \leqslant L\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1+\alpha}+\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right].$$

Полагая, в силу следствия из леммы 3,

$$P_n(x) = (1-x^2)\,P_{n-2}(x),$$

имеем:

$$|P_{n-2}(x)(1-x^2)| \leqslant L\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1+\alpha}+\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right].$$

Отсюда следует, что многочлен $P_{n-2}(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$|P_{n-2}(x)| \leqslant L\left[\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1-\alpha}\left(n\sqrt{1-x^2}\right)^{1+\alpha}}\right]. \tag{35}$$

В частности, на множестве D, где

$$n\sqrt{1-x^2} \geqslant n\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^2} \geqslant \frac{3}{4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

получим:

$$|P_{n-2}(x)| \leqslant \frac{3L}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1-\alpha}}, \tag{36}$$

и так как для $r = -1$ теорема 2 уже доказана [см. случай 2)], то

$$| P'_{n-2}(x) | \leqslant C' Ln \min \left\{ \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{2-\alpha}},\ n^{2-\alpha} \right\} \quad (C' - \text{постоянная})$$

и, значит,

$$| P'_{n-2}(x)(1-x^2) | \leqslant C' Ln \min \left\{ (\sqrt{1-x^2})^{\alpha};\ \frac{(n\sqrt{1-x^2})^2}{n^{\alpha}} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C' Ln (\sqrt{1-x^2})^{\alpha}.$$

Поэтому, принимая во внимание (36) и лемму 1, находим:

$$| P'_n(x) | = | [P_{n-2}(x)(1-x^2)]' | \leqslant | P'_{n-2}(x)(1-x^2) | + | 2xP_{n-2}(x) | \leqslant$$
$$\leqslant C' Ln (\sqrt{1-x^2})^{\alpha} + 4CLn \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \overline{C} Ln \left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha} + \frac{1}{n^{\alpha}} \right],$$

где $\overline{C}$ — новая постоянная. Теорема для случая $r = 1$ полностью доказана.

5) Пусть теорема 2 верна для значений $r \leqslant k$ $(k \geqslant 1)$ и пусть $P_n(x)$ — некоторый многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий неравенству

$$| P_n(x) | \leqslant L \left[(\sqrt{1-x^2})^{k+1+\alpha} + \frac{1}{n^{k+1+\alpha}} \right].$$

Полагая (в силу следствия из леммы 3)

$$P_n(x) = (1-x^2) P_{n-2}(x),$$

имеем:

$$| P_{n-2}(x)(1-x^2) | \leqslant L \left[(\sqrt{1-x^2})^{k+1+\alpha} + \frac{1}{n^{k+1+\alpha}} \right]. \tag{37}$$

Отсюда следует, что на сегменте D, где $n\sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{3}{4}$, многочлен $P_{n-2}(x)$ удовлетворяет неравенству:

$$| P_{n-2}(x) | \leqslant L \left[(\sqrt{1-x^2})^{k-1+\alpha} + \frac{1}{n^{k-1+\alpha} (n\sqrt{1-x^2})^2} \right] \leqslant$$
$$\leqslant \left[1 + \left(\frac{4}{3} \right)^{k+1+\alpha} \right] L (\sqrt{1-x^2})^{k-1+\alpha}. \tag{38}$$

Поэтому, в силу леммы 2′, на всем сегменте $[-1,1]$ будем иметь:

$$| P_{n-2}(x) | \leqslant CL \left[(\sqrt{1-x^2})^{k-1+\alpha} + \frac{1}{n^{k-1+\alpha}} \right],$$

где C — постоянная, и, значит, вследствие справедливости теоремы при $r \leqslant k$:

$$\begin{aligned} &| P'_{n-2}(x) | \leqslant C' Ln \left[(\sqrt{1-x^2})^{k-2+\alpha} + \frac{1}{n^{k-2+\alpha}} \right], \text{ если } k > 1 \\ &| P'_{n-2}(x) | \leqslant C' Ln \min \left\{ \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}},\ n^{1-\alpha} \right\}, \quad \text{если } k = 1 \end{aligned} \qquad (C' = \text{const}).$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} &| P'_{n-2}(x)(1-x^2) | \leqslant C' Ln \left[(\sqrt{1-x^2})^{k+\alpha} + \frac{(n\sqrt{1-x^2})^2}{n^{k+\alpha}} \right] < \\ &< C'' Ln \left[(\sqrt{1-x^2})^{k+\alpha} + \frac{1}{n^{k+\alpha}} \right], \text{ если } k > 1, \\ &| P'_{n-2}(x)(1-x^2) | \leqslant C' Ln (\sqrt{1-x^2})^{1+\alpha} < \\ &< C'' Ln \left[(\sqrt{1-x^2})^{1+\alpha} + \frac{1}{n^{1+\alpha}} \right], \text{ если } k = 1, \end{aligned} \tag{39}$$

где C'' — новая постоянная.

Учитывая, что, вследствие неравенства (38), при всех $x \in D$

$$| P_{n-2}(x) | \leqslant KLn(\sqrt{1-x^2})^{k+\alpha},$$

где K – постоянная, мы, в силу леммы 2′, выводим, что при всех $x \in [-1,1]$

$$| P_{n-2}(x) | \leqslant K'Ln\left[(\sqrt{1-x^2})^{k+\alpha} + \frac{1}{n^{k+\alpha}}\right] \quad (K' \text{ — постоянная}). \quad (40)$$

Таким образом, при всех $x \in [-1,1]$ имеем:

$$| P_n'(x) | \leqslant | P_{n-2}'(x)(1-x^2) | +$$
$$+ | 2xP_{n-2}(x) | \leqslant (C'' + 2K')Ln\left[(\sqrt{1-x^2})^{k+\alpha} + \frac{1}{n^{k+\alpha}}\right],$$

т. е. теорема 2 верна и при $r = k+1$. Этим теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Пользуясь леммой 1 и неравенством (5), легко обнаружим, что теорему 2 можно сформулировать также в следующей эквивалентной форме:

ТЕОРЕМА 2′. *Если многочлен $P_n(x)$ степени не выше n удовлетворяет в интервале $(-1,1)$ при произвольном действительном ρ неравенству*

$$| P_n(x) | \leqslant L\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\rho},$$

где L — постоянная, то тогда его производная $P_n'(x)$ будет удовлетворять неравенству

$$| P_n'(x) | \leqslant CLn\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\rho-1},$$

где C — постоянная, зависящая только от ρ.

§ 3. Конструктивная характеристика функций класса Lip α ($0 < \alpha < 1$)

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на сегменте $[-1,1]$. Если при всяком натуральном n найдется многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что для всех $x \in [-1,1]$ выполняется неравенство*

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{C_1}{n^{r+\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha} + \frac{1}{n^{r+\alpha}}\right], \quad (41)$$

где $r \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$ и C_1 — постоянная, одна и та же для всех n, то функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-1,1]$ r-ю производную $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу Lip α.

Доказательство. 1°. Рассмотрим сначала случай $r = 0$ и покажем, что если при $n = 1,2,3,\ldots$ для всех $x \in [-1,1]$

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{C_1}{n^{\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha} + \frac{1}{n^{\alpha}}\right], \quad (41')$$

то $f(x) \in$ Lip α, т. е., каковы бы ни были числа x и $x+h$ из сегмента $[-1,1]$, всегда

$$| f(x+h) - f(x) | \leqslant K | h |^{\alpha},$$

где $K = K(\alpha)$ — постоянная.

Мы будем считать, что $h>0$, $x\in[0,1)$ и $x+h\in(0,1]$, ибо остальные случаи легко сводятся к рассмотренному.

Из (41′) следует:

$$f(x)=P_1(x)+[P_{2^1}(x)-P_{2^0}(x)]+\ldots+[P_{2^{i+1}}(x)-P_{2^i}(x)]+\ldots=$$
$$=P_1(x)+U_{2^1}(x)+\ldots+U_{2^{i+1}}(x)+\ldots\,, \tag{42}$$

где

$$U_{2^{i+1}}(x)=P_{2^{i+1}}(x)-P_{2^i}(x),\quad i=0,1,2,\ldots\,.$$

Оценивая многочлен 2^{i+1}-го порядка $U_{2^{i+1}}(x)$, вследствие (41′) видим, что

$$|U_{2^{i+1}}(x)|\leqslant|P_{2^{i+1}}(x)-f(x)|+|f(x)-P_{2^i}(x)|<$$
$$<\frac{2^{1+\alpha}C_1}{2^{i\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^\alpha+\frac{1}{2^{(i+1)\alpha}}\right] \tag{43}$$

и, следовательно, при каждом натуральном k

$$\sum_{i=k}^{\infty}|U_{2^{i+1}}(x)|\leqslant 2C_1(\sqrt{1-x^2})^\alpha\cdot\frac{2^{2\alpha}}{2^\alpha-1}\cdot\frac{1}{2^{k\alpha}}+2C_1\cdot\frac{4^\alpha}{4^\alpha-1}\cdot\frac{1}{2^{2k\alpha}}=$$
$$=\frac{2^{1+3\alpha}C_1(\sqrt{1-x^2})^\alpha}{2^\alpha-1}\cdot\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}+\frac{4^{2\alpha+\frac{1}{2}}}{4^\alpha-1}\cdot\frac{C_1}{2^{2(k+1)\alpha}}\,. \tag{44}$$

Кроме того, при всяком фиксированном k ($k=1,2,\ldots$) и произвольном $h>0$ получим:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\left|P_1(x+h)-P_1(x)\right|+\sum_{i=0}^{k}\left|U_{2^{i+1}}(x+h)-U_{2^{i+1}}(x)\right|+$$
$$+\sum_{i=k}^{\infty}\left|U_{2^{i+1}}(x+h)\right|+\sum_{i=k}^{\infty}\left|U_{2^{i+1}}(x)\right|. \tag{45}$$

Считая h заданным, рассмотрим следующие две возможности:

Первая возможность. Пусть $x\in[1-2h,\ 1-h]$, $x\geqslant 0$. Выбирая k так, чтобы

$$2^k\leqslant\frac{1}{\sqrt{h}}<2^{k+1}, \tag{46}$$

имеем для всех $\alpha\in(0,1)$:

А) вследствие (44), при всяком $\xi\in[1-2h,1]$

$$\sum_{i=k}^{\infty}|U_{2^{i+1}}(\xi)|\leqslant\frac{2^{1+3\alpha}C_1}{2^\alpha-1}\cdot\frac{(\sqrt{1-(1-2h)^2})^\alpha}{2^{(k+1)\alpha}}+\frac{4^{2\alpha+\frac{1}{2}}C_1}{4^\alpha-1}\cdot\frac{1}{2^{(k+1)2\alpha}},$$

откуда, в силу (46), вытекает:

$$\sum_{i=k}^{\infty}|U_{2^{i+1}}(\xi)|\leqslant\frac{2^{1+4\alpha}C_1}{2^\alpha-1}h^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}+$$
$$+\frac{4^{2\alpha+\frac{1}{2}}C_1}{4^\alpha-1}h^\alpha=2C_1\left(\frac{2^{4\alpha}}{2^\alpha-1}+\frac{4^{2\alpha}}{4^\alpha-1}\right)h^\alpha<\frac{64}{2^\alpha-1}C_1h^\alpha. \tag{47}$$

В) Вследствие неравенств (6′) и (7), принимая во внимание (43), получаем:

$$| U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) | =$$

$$= h \, | U'_{2^{i+1}}(x+\theta h) | \leqslant hC \cdot \frac{2^{1+\alpha} C_1}{2^{i\alpha}} 2^{(i+1)(2-\alpha)} = hC_2 \cdot 2^{2i(1-\alpha)} \qquad (48)$$

(через C_2 мы обозначили произведение $C_2 = 8CC_1$) и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k-1} | U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) | \leqslant C_2 h \, \frac{2^{2k(1-\alpha)}}{2^{2(1-\alpha)} - 1},$$

откуда, в силу (46), вытекает:

$$\sum_{i=0}^{k-1} | U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) | \leqslant \frac{C_2}{4^{1-\alpha} - 1} h \cdot h^{-(1-\alpha)} = \frac{C_2}{4^{1-\alpha} - 1} h^{\alpha}. \qquad (49)$$

Подставляя оценки (47) и (49) в неравенство (45), мы видим, что при $x \in [1-2h,\ 1-h]$, $x \geqslant 0$,

$$| f(x+h) - f(x) | \leqslant K h^{\alpha},$$

где $K = K(\alpha)$ — постоянная.

Вторая возможность. Пусть $x \in [0,\ 1-2h]$ (этот случай при $h \geqslant \frac{1}{2}$ отпадает). Выбирая k так, чтобы выполнялось условие

$$2^k \leqslant \frac{\sqrt{1-x^2}}{h} < 2^{k+1} \qquad (50)$$

$\left(\text{при этом, очевидно, } \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{h}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{h}{\sqrt{1-(1-2h)^2}} = \frac{h}{\sqrt{4h(1-h)}} \leqslant \sqrt{\frac{h}{2}}\right)$,

имеем:

А) при каждом $\alpha \in (0,1)$ мы, принимая во внимание (50), вследствие (44) видим, что при всяком $\xi \in [0,1-h]$, $\xi \geqslant x$,

$$\sum_{i=k}^{\infty} | U_{2^{i+1}}(\xi) | \leqslant \frac{2^{1+3\alpha} C_1}{2^{\alpha} - 1} (\sqrt{1-\xi^2})^{\alpha} \frac{h^{\alpha}}{(\sqrt{1-\xi^2})^{\alpha}} + \frac{4^{2\alpha + \frac{1}{2}} C_1}{4^{\alpha} - 1} \left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)^{2\alpha} =$$

$$= 2C_1 \left(\frac{2^{3\alpha}}{2^{\alpha} - 1} + \frac{2^{3\alpha}}{4^{\alpha} - 1}\right) h^{\alpha} < \frac{32C_1}{2^{\alpha} - 1} h^{\alpha}; \qquad (51)$$

В) для оценки суммы $\sum_{i=0}^{k-1} | U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) |$ мы, учитывая оценки (43), (6′) и (7) и принимая во внимание, что при $x \in [0,1-2h]$ и $0 < \theta < 1$ будет

$$1 - (x+\theta h)^2 \geqslant 1 - (x+h)^2 \geqslant \frac{1-x^2}{2}$$

(ибо $2[1-(x+h)^2] - (1-x^2) = 1 - x^2 - 4xh - 2h^2 \geqslant 1 - (1-2h)^2 - 4h(1-2h) - 2h^2 = 2h^2 > 0$), найдем:

$$| U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) | = h \, | U_{2^{i+1}}(x+\theta h) | \leqslant$$

$$\leqslant h \frac{C}{(\sqrt{1-(x+\theta h)^2})^{1-\alpha}} 2^{i+1} \cdot \frac{2^{1+\alpha} C_1}{2^{i\alpha}} \leqslant 4 \cdot 2^{\alpha} CC_1 h \frac{2^{i(1-\alpha)}}{\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)^{1-\alpha}}. \qquad (52)$$

Отсюда, ввиду того, что при $x \in [0,1-2h]$ имеем

$$1 - x^2 \geqslant 1 - (1-2h)^2 = 4h(1-h) \geqslant 2h,$$

следует, если учесть еще (50), что

$$\sum_{i=0}^{k-1} | U_{2^{i+1}}(x+h) - U_{2^{i+1}}(x) | \leqslant 4CC_1 \frac{2^{\frac{1+\alpha}{2}} h}{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}} \cdot \frac{2^{(1-\alpha)k}}{2^{1-\alpha}-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8CC_1 h}{2^{1-\alpha}-1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}} \cdot \frac{(\sqrt{1-x^2})^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}} = \frac{8CC_1}{2^{1-\alpha}-1} h^{\alpha}. \qquad (53)$$

Подставляя оценки (51) и (53) в правую часть неравенства (45), найдем, что для всех $x \in [0,1-2h]$ будет:

$$| f(x+h) - f(x) | \leqslant Kh^{\alpha},$$

где $K = K(\alpha)$ — постоянная.

Этим теорема 3 для случая $r = 0$ полностью доказана.

2°. Для доказательства теоремы 3 в случае $r > 0$ мы снова представим функцию $f(x)$ в виде [см. (42)]:

$$f(x) = P_1(x) + U_{2^1}(x) + \ldots + U_{2^{i+1}}(x) + \ldots . \qquad (42')$$

Каждый многочлен $U_{2^{i+1}}(x) = P_{2^{i+1}}(x) - P_{2^i}(x)$ в правой части этого равенства, вследствие условия (41), удовлетворяет неравенству:

$$| U_{2^{i+1}}(x) | \leqslant | P_{2^{i+1}}(x) - f(x) | + | f(x) - P_{2^i}(x) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C_1 2^{2(r+\alpha)}}{2^{(i+1)(r+\alpha)}} \left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha} + \frac{1}{2^{(i+1)(r+\alpha)}} \right]. \qquad (54)$$

Поэтому если мы ряд (42′) r раз почленно продифференцируем, то получим ряд

$$f^{(r)}(x) = P_1^{(r)}(x) + U_{2^1}^{(r)}(x) + \ldots + U_{2^{i+1}}^{(r)}(x) + \ldots ,$$

в котором каждый член, вследствие теоремы 2, удовлетворяет неравенству

$$| U_{2^{i+1}}^{(r)}(x) | \leqslant \frac{2^{1+\alpha} C}{2^{i\alpha}} \left[(\sqrt{1-x^2})^{\alpha} + \frac{1}{2^{(i+1)\alpha}} \right] \quad (C = \text{const}),$$

т. е. мы видим, что функция $f^{(r)}(x)$ представляется в виде равномерно сходящегося ряда, в котором общий член $U_{2^{i+1}}^{(r)}(x)$ удовлетворяет тому же неравенству (43), что и общий член ряда (42).

Отсюда, в силу рассуждений, проведенных для случая 1°, вытекает, что $f^{(r)}(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$. Этим теорема 3 полностью доказана.

Из доказанной теоремы 3 и теоремы 1 А. Ф. Тимана вытекает следующая теорема 4, дающая конструктивную характеристику функций, имеющих r-ю производную, принадлежащую классу $\operatorname{Lip} \alpha$:

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $[-1,1]$, имела при некотором целом неотрицательном r производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу $\operatorname{Lip} \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального n нашелся обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы при всех $x \in [-1,1]$ выполнялось неравенство:*

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{C}{n^{r+\alpha}} \left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha} + \frac{1}{n^{r+\alpha}} \right],$$

где C — постоянная, не зависящая ни от x, ни от n.

Покажем, что из теоремы 3 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5 (С. Н. Бернштейн). *Если для некоторой функции $f(x)$, заданной в промежутке $[-1,1]$, для каждого n найдется некоторый многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, что при всех $x \in [-1,1]$*

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^{r+\alpha}},$$

где r — целое $\geqslant 0$ и $0 < \alpha < 1$, то на всяком сегменте $[a', b']$, целиком содержащемся в интервале $(-1,1)$, функция $f(x)$ входит в класс $\operatorname{Lip}\alpha$.

Доказательство. Пусть, по определению,

$$\varphi(x) = f(x)(1-x^2)^{r+1}, \quad \overline{P}_{n+2r+2}(x) = P_n(x)(1-x^2)^{r+1}.$$

Тогда, очевидно,

$$|\varphi(x) - \overline{P}_{n+2r+2}(x)| < \frac{1}{n^{r+\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha} + \frac{1}{(n+2r+2)^{r+\alpha}}\right] <$$
$$< \frac{C}{(n+2r+2)^{r+\alpha}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\alpha} + \frac{1}{(n-2r+2)^{r+\alpha}}\right].$$

Поэтому $\varphi^{(i)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. Вследствие этого, принимая во внимание, что

а) при всех $x \in (a', b') \subset (-1,1)$ функция $\frac{d^i}{dx^i}\left[\frac{1}{(1-x)^{r-1}}\right] \in \operatorname{Lip} 1$ $(i = 0,1,2,\ldots,r)$ и

б) $f(x) = \varphi(x)\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{r+1}}$,

легко найдем, что при всех $x \in [a', b']$ $f^{(r)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. Теорема доказана.

§ 4. Об одном достаточном условии принадлежности функции классу Z

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-1,1]$, имела при некотором целом неотрицательном r производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу Z (т. е. являющуюся квази-гладкой), достаточно, чтобы для каждого $n = 1,2,3,\ldots$ нашелся многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы для всех $x \in [-1,1]$ выполнялось неравенство:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+1}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+1} + \frac{1}{n^{r+1}}\right], \tag{55}$$

где C — постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $r = 0$. В этом случае неравенство (55) запишется так:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right). \tag{55'}$$

Поэтому мы сможем функцию $f(x)$ представить в виде [см. (42)]:

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{i=0}^{\infty} U_{2^i+1}(x), \tag{42''}$$

где

$$|U_{2^i+1}(x)| = |P_{2^i+1}(x) - P_{2^i}(x)| \leqslant \frac{2C}{2^i}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2^i}\right). \tag{56}$$

Отсюда при всяком фиксированном k находим:

$$\sum_{i=k}^{\infty} |U_{2^{i+1}}(x)| \leqslant \frac{4C\sqrt{1-x^2}}{2^k} + \frac{4C}{2^{2k}}. \tag{57}$$

Кроме того, при каждом фиксированном k ($k = 1, 2, \ldots$) и произвольном $h > 0$ будем иметь:

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |U_{2^{i+1}}(x+h) - 2U_{2^{i+1}}(x) + U_{2^{i+1}}(x-h)| +$$
$$+ \sum_{i=k}^{\infty} \{|U_{2^{i+1}}(x+h)| + 2|U_{2^{i+1}}(x)| + |U_{2^{i+1}}(x-h)|\}. \tag{58}$$

Считая h заданным, рассмотрим опять две возможности.

Первая возможность. Пусть $x \in [1-2h, 1-h]$, $x \geqslant 0$. Выбирая в этом случае k так, чтобы

$$2^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{h}} < 2^{k+1},$$

имеем:

А) при всяком $\xi \in [1-3h, 1]$, в силу (57), следует:

$$\sum_{i=k}^{\infty} |U_{2^{i+1}}(\xi)| \leqslant \frac{4C\sqrt{1-\xi^2}}{2^k} + \frac{4C}{2^{2k}} \leqslant 8\sqrt{6}\,C\sqrt{h}\sqrt{h} + 16\,Ch < 36\,Ch. \tag{59}$$

В) Принимая во внимание неравенства (56) и (7), находим:

$$|U_{2^{i+1}}(x+h) - 2U_{2^{i+1}}(x) + U_{2^{i+1}}(x-h)| \leqslant$$
$$\leqslant 2h^2 \max_{\xi \in [x-h,\, x+h]} |U''_{2^{i+1}}(\xi)| \leqslant 2Ch^2 \cdot 2^{2(i+1)},$$

где C — постоянная. Отсюда следует:

$$\sum_{i=0}^{k-1} |U_{2^{i+1}}(x+h) - 2U_{2^{i+1}}(x) + U_{2^{i+1}}(x-h)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^3 Ch^2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i} < 2^3 Ch^2 2^{2k} \leqslant 2^3 Ch. \tag{60}$$

Из неравенств (58), (60) и (59) усматриваем, что при $x \in [1-2h, 1-h]$

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant Kh, \tag{61}$$

где K — постоянная.

Вторая возможность. Пусть $x \in [0, 1-2h]$. Выбирая k так, чтобы выполнялось условие

$$2^k \leqslant \frac{\sqrt{1-x^2}}{h} < 2^{k+1},$$

и учитывая (57), находим:

А) $$\sum_{i=k}^{\infty} |U_{2^{i+1}}(\xi)| \leqslant \frac{4C\sqrt{1-\xi^2}}{2^k} + \frac{4C}{2^{2k}} \leqslant 16\,Ch + 16\,C\frac{h \cdot h}{(\sqrt{1-\xi^2})^2} \leqslant C_1 h,$$

где $\xi \in [x-h,\ x+h]$, $C_1 = \text{const}$.

$$\text{в)}\quad \sum_{i=0}^{k-1} |U_{2^{i+1}}(x+h) - 2U_{2^{i+1}}(x) + U_{2^{i+1}}(x-h)| \leqslant$$

$$\leqslant 2h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \max_{\xi \in [x-h, x+h]} |U''_{2^{i+1}}(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\bar{C}h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2^{i+1}}{\sqrt{1-(x+h)^2}} \leqslant 2\bar{C}\sqrt{2}h^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} 2^{k+1} \leqslant 4\sqrt{2}\,\bar{C}h,$$

где $\bar{C} = \text{const}$.

Таким образом, и при $x \in [0, 1-2h]$ неравенство (61) остается (при некотором K) в силе. Так как случай $x \in [-(1-h), 0]$ ничем не отличается от разобранного, то при $r = 0$ теорема доказана.

Случай $r > 0$ сводится к случаю $r = 0$ совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 3. Этим теорема 6 полностью доказана.

Поступило
21.XI.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durc ganze rationale Funktionen, Dissertation, Göttingen, 1911.

[2] Jackson D., On approximation by trigonometric sums and polynomials, Tran Amer. Math. Soc., 14 (1912), 491—515.

[3] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посред ством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковского матем. об-ва, 2-я серия XIII, № 2—3 (1913), 49—144.

[4] Zygmund A., Smooth functions, Duke mathem. J., 12, № 1 (1945), 47—76.

[5] Montel P., Sur les polynomes d'approximation, Bull. Soc. Math. France, 46 (1918) 151—192.

[6] Тиман А. Ф. и Дзядык В. К., О наилучшем приближении квази-гладких функций обыкновенными полиномами, Доклады Ак. наук СССР, 75 (1950), 499—501.

[7] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами функций удовлетворяющих условию Липшица, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 295—317.

[8] Тиман А. Ф., Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 78 (1951), 17—20.

[9] Тиман А. Ф., Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 1951.

[10] Марков А. А., Избранные труды, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[11] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М.—Л., ГИТТЛ, 1954.

[12] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. 1, Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР, 1952.

[13] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.—М., 1937.

[14] Тиман А. Ф., Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 77 (1951), 969—972.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 643—648

С. Б. СТЕЧКИН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

Эта заметка содержит некоторые дополнения к работе В. К. Дзядыка ([3]). В частности, здесь определяется точная верхняя грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ периодических функций класса $\widetilde{W}^{(r)}$ при $0<r\leqslant\frac{1}{2}$.

1. Пусть H есть фиксированный класс непрерывных функций с периодом 2π и $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)\in H$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n-1$, т. е.

$$E_n(f)=\min_{t_{n-1}}\max_x|f(x)-t_{n-1}(x)| \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где минимум берется по всевозможным тригонометрическим полиномам $t_{n-1}(x)$ порядка $n-1$. Числа

$$E_n[H]=\sup_{f\in H}E_n(f) \quad (n=1,\ 2,\ldots)$$

будем называть наилучшими приближениями класса H.

Задача о наилучшем приближении класса H периодических функций тригонометрическими полиномами состоит в том, что требуется вычислить значения $E_n[H]$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ или, по крайней мере, определить асимптотическое поведение последовательности $\{E_n[H]\}$ при $n\to\infty$.

Аналогично ставится задача о наилучшем приближении заданного класса H_1 периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем. Требуется вычислить значения или определить асимптотическое поведение наилучших приближений класса H_1 в среднем:

$$E_n[H_1]_L=\sup_{f\in H_1}E_n(f)_L \quad (n=1,\ 2\ldots),$$

где

$$E_n(f)_L=\min_{t_{n-1}}\int_0^{2\pi}|f(x)-t_{n-1}(x)|\,dx \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Постановка первой из этих задач восходит к А. Лебегу ([4]) (1910 г.), а точные значения чисел $E_n[H]$ впервые были определены Ж. Фавaром ([8]) (1936 г.) для того случая, когда H есть класс периодических функций, имеющих ограниченную производную целого порядка r:

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant M.$$

Исследования Фавара ([8]), ([9]) были продолжены Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном ([1]), Б. Надем ([5]), В К. Дзядыком ([3]) и др. Задача

о наилучшем приближении классов функций в среднем изучалась С. М. Никольским ([6]). См. также книгу Н. И. Ахиезера ([2]) и обзоры С. М. Никольского ([7]) и Ж. Фавара ([10]).

Пусть $r>0$ и α — действительное число. Положим

$$\Psi_r(x,\ \alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kx-\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

и обозначим через $W^{(r)}(\alpha)$ класс непрерывных периодических функций $f(x)$, допускающих представление

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_r(x-t,\ \alpha)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0 \quad\text{и}\quad \|\varphi\|_M=\sup_t \operatorname{ess}\,|\varphi(t)|\leqslant 1. \tag{2}$$

Аналогично, обозначим через $W_1^{(r)}(\alpha)$ класс суммируемых периодических функций $f(x)$, допускающих представление (1), где

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0 \quad\text{и}\quad \|\varphi\|_L=\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|\,dt\leqslant 1. \tag{3}$$

Классы $W^{(r)}(\alpha)$ и $W_1^{(r)}(\alpha)$ при надлежащем выборе параметров r и α обращаются во многие хорошо изученные классы периодических функций. Так, например, $W^{(r)}=W^{(r)}(r)$ есть класс непрерывных периодических функций, имеющих r-ю производную в смысле Вейля $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию

$$\|f^{(r)}(x)\|_M\leqslant 1,$$

а $\widetilde{W}^{(r)}=W^{(r)}(r+1)$ есть класс функций, для которых

$$\|\widetilde{f}^{(r)}(x)\|_M\leqslant 1,$$

где, как обычно, $\widetilde{f}(x)$ обозначает функцию, тригонометрически сопряженную с $f(x)$. Аналогично, класс $W_1^{(r)}=W_1^{(r)}(r)$ характеризуется условием

$$\|f^{(r)}(x)\|_L\leqslant 1,$$

а класс $\widetilde{W}_1^{(r)}=W_1^{(r)}(r+1)$ — условием

$$\|\widetilde{f}^{(r)}(x)\|_L\leqslant 1.$$

Наилучшие приближения классов $W^{(r)}(0)$ и $W^{(r)}(1)$ изучались Б. Надем ([5]), а классов $W_1^{(r)}(0)$ и $W_1^{(r)}(1)$ — С. М. Никольским ([6]). В 1953 г. появилась работа В. К. Дзядыка ([3]), в которой он установил, что при $0<r<1$

$$E_n[W^{(r)}]=E_n[W_1^{(r)}]_L=\frac{4}{\pi}K_r\sin\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ldots),$$

где

$$K_r=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^{r+1}}. \tag{4}$$

В настоящей работе я показываю, что при $0<r<1$, $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$

$$E_n[W^{(r)}(\alpha)]=E_n[W_1^{(r)}(\alpha)]_L=\frac{4}{\pi}K_r\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ldots), \tag{5}$$

где K_r имеет значение (4). В частности, отсюда вытекает, что при $0<r\leqslant\frac{1}{2}$

$$E_n[\tilde{W}^{(r)}]=E_n[\tilde{W}_1^{(r)}]_L=\frac{4}{\pi}K_r\cos\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ldots). \tag{6}$$

Оказывается, что для получения этих результатов достаточно сделать очень небольшие дополнения к исследованиям Б. Надя, С. М. Никольского и В. К. Дзядыка.

2. Наилучшие приближения классов функций $E_n[W^{(r)}(\alpha)]$ и $E_n[W_1^{(r)}(\alpha)]_L$ тесно связаны с наилучшими приближениями в среднем соответствующего ядра $\Psi_r(x;\ \alpha)$. С изучения этих последних мы и начнем.

Известно, что если $r>0,\ \alpha=1$ [см. (5)] или $0<r<1,\ \alpha=r$ [см. (3)], то наименее уклоняется от функции $\Psi_r(x,\ \alpha)$ в метрике L тот тригонометрический полином $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$, который интерполирует эту функцию в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1)$. При этом

$$\operatorname{sign}\{\Psi_r(x,\ \alpha)-T_{n-1}(x)\}=\operatorname{sign}\sin nx\quad(0<x<2\pi), \tag{7}$$

$$E_n(\Psi_r(x,\ 1))_L=4K_r n^{-r}\quad(r>0,\ n=1,\ 2,\ldots) \tag{8}$$

и

$$E_n(\Psi_r(x,\ r))_L=4K_r\sin\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(0<r<1,\ n=1,\ 2,\ \ldots); \tag{9}$$

где константа K_r определяется формулой (4).

Покажем, что если $0<r<1,\ r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$, то наименее уклоняющимся от функции $\Psi_r(x,\ \alpha)$ в метрике L снова является тот тригонометрический полином $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$, который интерполирует эту функцию в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1)$, что полином $T_{n-1}(x)$ удовлетворяет условию (7) и что

$$E_n(\Psi_r(x,\ \alpha))_L=4K_r\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ldots). \tag{10}$$

Положим, ради сокращения письма,

$$\Psi(x,\ r)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kx-\frac{r\pi}{2}\right)=\varphi_r(x),\quad \Psi_r(x,\ 1)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\sin kx=\psi(x).$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, будем иметь:

$$\Psi_r(x,\ \alpha)=\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}\varphi_r(x)+\frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}\psi_r(x).$$

Отсюда видно, что если обозначить через $T_{n-1}(x,\ \Psi)$, $T_{n-1}(x,\ \varphi)$ и $T_{n-1}(x,\ \psi)$ тригонометрические полиномы, интерполирующие в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1)$ соответственно функции $\Psi_r(x,\ \alpha)$, $\varphi_r(x)$ и $\psi_r(x)$, то

$$T_{n-1}(x,\ \Psi)=\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}T_{n-1}(x,\varphi)+\frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}T_{n-1}(x,\psi)$$

и

$$\{\Psi_r(x,\ \alpha) - T_{n-1}(x,\ \Psi)\} = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}\{\varphi_r(x) - T_{n-1}(x,\ \varphi)\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}}\{\psi_r(x) - T_{n-1}(x,\ \psi)\}. \tag{11}$$

Пусть сперва $0 < r \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда коэффициенты при фигурных скобках в формуле (11) неотрицательны. Поэтому, используя соотношения (7) для $\varphi_r(x)$ и $\psi_r(x)$, получаем, что

$$\operatorname{sign}\{\Psi_r(x,\ \alpha) - T_{n-1}(x,\ \Psi)\} = \operatorname{sign}\sin nx$$
$$(0 < r \leqslant \alpha \leqslant 1,\ 0 < x < 2\pi). \tag{12}$$

Из этого соотношения немедленно вытекает, что полином $T_{n-1}(x,\ \Psi)$ наименее уклоняется от функции $\Psi_r(x,\ \alpha)$ в метрике L. В самом деле, так как функция $\operatorname{sign}\sin nx$, как имеющая период $\frac{2\pi}{n}$, ортогональна к любому тригонометрическому полиному $t_{n-1}(x)$, то имеем:

$$\int_0^{2\pi} |\Psi_r(x,\ \alpha) - t_{n-1}(x)|\,dx \geqslant \int_0^{2\pi} \{\Psi_r(x,\ \alpha) - t_{n-1}(x)\}\operatorname{sign}\sin nx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\Psi_r(x,\ \alpha) - T_{n-1}(x,\ \Psi)\}\operatorname{sign}\sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} |\Psi_r(x,\ \alpha) - T_{n-1}(x,\ \Psi)|\,dx.*$$

Далее получаем:

$$E_n(\Psi_r(x,\ \alpha))_L = \int_0^{2\pi} \{\Psi_r(x,\ \alpha) - T_{n-1}(x,\ \Psi)\}\operatorname{sign}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \{\varphi_r(x) - T_{n-1}(x,\ \varphi)\}\operatorname{sign}\sin nx\,dx +$$

$$+ \frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \{\psi_r(x) - T_{n-1}(x,\psi)\}\operatorname{sign}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |\varphi_r(x) - T_{n-1}(x,\ \varphi)|\,dx + \frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |\psi_r(x) - T_{n-1}(x,\ \psi)|\,dx =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} E_n(\varphi_r)_L + \frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} E_n(\psi_r)_L,$$

откуда, в силу (8) и (9),

$$E_n(\Psi_r(x,\ \alpha))_L = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} 4K_r \sin\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r} + \frac{\sin\frac{(\alpha-r)\pi}{2}}{\cos\frac{r\pi}{2}} 4K_r n^{-r} =$$

$$= 4K_r \sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r} \quad (0 < r \leqslant \alpha \leqslant 1,\ \ n = 1,\ 2, \ldots).$$

* Это рассуждение восходит к А. А. Маркову.

Переходим к рассмотрению случая $0<r<1$, $1\leqslant\alpha\leqslant 2-r$. Положим $\beta=2-\alpha$, так что $r\leqslant\beta\leqslant 1$. Тогда будем иметь:

$$\Psi_r(x,\ \alpha)=\Psi_r(x,\ 2-\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kx-\pi+\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left\{k(-x)-\frac{\beta\pi}{2}\right\}=-\Psi_r(-x,\ \beta),$$

откуда

$$T_{n-1}(x,\ \Psi_r(x,\alpha))=-T_{n-1}(x,\Psi_r(-x,\ \beta))=-T_{n-1}(-x,\Psi_r(x,\beta)).$$

Отсюда, в силу (7) и (10), следует:

$$\operatorname{sign}\{\Psi_r(x,\ \alpha)-T_{n-1}(x,\ \Psi)\}=-\operatorname{sign}\sin(-nx)=\operatorname{sign}\sin nx$$

и

$$E_n(\Psi_r(x,\ \alpha))_L=4K_r\sin\frac{\beta\pi}{2}\cdot n^{-r}=4K_r\sin\frac{\alpha\pi}{2}n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ldots).$$

Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

Случаи $0<\alpha<r<1$ и $r\geqslant 1$, $0<\alpha<1$ остаются нерассмотренными. Отметим лишь, что если $0<\alpha<r<1$, то $\Psi_r(x,\ \alpha)$ обращается при $x=0$ в $+\infty$ и, следовательно, тригонометрический полином $T_{n-1}(x,\ \Psi)$, интерполирующий эту функцию в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1)$, уже не будет обладать свойством (7).

3. Согласно результатам Б. Надя [5] и С. М. Никольского [6], если $H(H_1)$ есть класс периодических функций, допускающих представление

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)\,dt,\tag{13}$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (2) ((3)), и ядро $K(x)$ обладает тем свойством, что существует тригонометрический полином $T_{n-1}(x)$, для которого

$$\operatorname{sign}\{K(x)-T_{n-1}(x)\}=\operatorname{sign}\sin nx,\tag{14}$$

то

$$E_n[H]=\sup_{\substack{f\in H\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_M=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L\tag{15}$$

и

$$E_n[H_1]_L=\sup_{\substack{f\in H_1\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_L=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L.\tag{16}$$

В формулах (15) и (16) верхние грани берутся по всем функциям класса $H(H_1)$, ортогональным к любому тригонометрическому полиному $t_{n-1}(x)$ порядка $n-1$.

Как выяснено в п. 2, если $0<r<1$, $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$, то ядро

$$K(x)=\Psi_r(x,\ \alpha)$$

обладает требуемым свойством (14) для любого $n=1,\ 2,\ldots$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость следующего предложения:

ТЕОРЕМА. *Пусть* $0<r<1$, $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$. *Тогда*

$$E_n[W^{(r)}(\alpha)]=E_n[W_1^{(r)}(\alpha)]_L=\frac{4}{\pi}K_r\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)\tag{17}$$

и

$$\sup_{\substack{f\in W^{(r)}(\alpha)\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_M=\sup_{\substack{f\in W_1^{(r)}(\alpha)\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_L=\frac{4}{\pi}K_r\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{18}$$

Нетрудно было бы также указать наилучший линейный метод суммирования рядов Фурье для функции классов $W^{(r)}(\alpha)$ и $W_1^{(r)}(\alpha)$ при $0<r<1$, $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$ [относительно этого понятия см. (6)]; мы не будем выписывать соответствующие формулы, которые имеют достаточно сложный вид.

Наконец, замечая, что класс $\tilde{W}^{(r)}$ совпадает с классом $W^{(r)}(1+r)$, а класс $\tilde{W}_1^{(r)}$ — с классом $W_1^{(r)}(1+r)$, получаем такое

Следствие. *Пусть* $0<r\leqslant\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$E_n[\tilde{W}^{(r)}]=E_n[\tilde{W}_1^{(r)}]_L=\frac{4}{\pi}K_r\cos\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)\tag{19}$$

и

$$\sup_{\substack{f\in\tilde{W}^{(r)}\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_M=\sup_{\substack{f\in\tilde{W}_1^{(r)}\\ f\perp t_{n-1}}}\|f\|_L=\frac{4}{\pi}K_r\cos\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{20}$$

Математический институт
имени В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21. VII. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. и Крейн М., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15 (1937), 107—112.

[2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

[3] Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0<s<1$), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 135—162.

[4] Lebesgue H., Sur la representation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipchitz, Bull. Soc. Math. de France, 38 (1910), 184—210.

[5] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938), 103—134.

[6] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.

[7] Никольский С. М., Приближение многочленами функций действительного переменного, Математика в СССР за тридцать лет, Москва, 1947.

[8] Favard J., Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques, Comptes Rendus Acad. Sci., 203 (1936), 1122—1124.

[9] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., 61, p. 1 (1937), 209—224, 243—256.

[10] Favard J., Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Analyse harmonique, Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, XV, Paris, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 649—660

Н. М. КОРОБОВ

О ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ И СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается новый метод построения функций, дробные доли которых распределены вполне равномерно, выводятся оценки соответствующих тригонометрических сумм и строятся системы совместно нормальных чисел.

Функция $\varphi(x)$ называется вполне равномерно распределенной, если дробные доли функции $F_s(x)$, определенной равенством

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s),$$

распределены равномерно при любом $s \geqslant 1$ и любом выборе целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю. В работе [1] мною был указан класс функций, дробные доли которых распределены вполне равномерно. Приведенные там функции были построены при помощи метода, основанного на использовании оценок тригонометрических сумм для полиномов возрастающей степени. Легко показать, что для полученных в работе [1] вполне равномерно распределенных функций $\varphi(x)$ справедливы оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)} = O(P^{1-\rho}), \qquad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi iF_s(x)} = O(P^{1-\rho}), \tag{1}$$

где величина ρ зависит от P, положительна и стремится к нулю при неограниченном возрастании P.

В первом параграфе настоящей работы (теорема 1) дается новый, сравнительно простой метод построения вполне равномерно распределенных функций. Этот метод основан на возможности получения хороших оценок тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i\frac{f(x)q^x}{p^2}},$$

где p — простое, q — целое, $(q,\ p) = 1$ и $f(x)$ — целочисленный многочлен (лемма 1). Далее (теорема 2) показано, что при соответствующем выборе параметров можно получить вполне равномерно распределенные функции $\varphi(x)$, для которых выполняются оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)} = O(P^{\frac{3}{4}}\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi iF_s(x)} = O(P^{\frac{3}{4}}\ln P).$$

Эти оценки, очевидно, существенно лучше оценок (1).

В работе ([1]) было показано, что при произвольном выборе вполне равномерно распределенной функции $\varphi(x)$ для всякого α, определенного рядом

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(k)\}\, q]}{q^k}, \tag{2}$$

дробные доли функции αq^x будут равномерно распределены *. Иначе говоря, всякое число α вида (2) является нормальным числом в q-ичной системе счисления.

Во втором параграфе настоящей работы доказывается, что для любых целых $q_\nu > 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ система функций

$$\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x \tag{3}$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве, если числа α_ν определены рядами:

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\}\, q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s), \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция **

Введем обозначения:

$$\delta_k^{(\nu)} = [\{\varphi(sk+\nu)\}\, q_\nu] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s, \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\delta_k^{(\nu)}$ — целые числа из интервала $0 \leqslant \delta_k^{(\nu)} \leqslant q_\nu - 1$, поэтому равенства (4) можно рассматривать как запись чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ в системах счисления соответственно с основаниями $q_1, \ldots, q_s$:

$$\alpha_1 = 0,\ \delta_1^{(1)} \delta_2^{(1)} \ldots \delta_k^{(1)} \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_s = 0,\ \delta_1^{(s)} \delta_2^{(s)} \ldots \delta_k^{(s)} \ldots .$$

Из равномерности распределения системы функций (3) следует, что при любых заданных целых $n_1, \ldots, n_s$ среди групп знаков

$$\left.\begin{matrix} \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)} \end{matrix}\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

каждая из возможных различных $q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_s^{n_s}$ групп встречается с асимптотически равной частотой. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, q_ν-ичные разложения которых обладают указанным свойством [см. также ([3])], называются совместно нормальными. Таким образом, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ вида (4) являются совместно нормальными числами.

---

* Здесь знаки $[a]$ и $\{a\}$ означают соответственно целую часть и дробную долю числа a, так что $a = [a] + \{a\}$.

** Формулировка этой теоремы была дана мною в работе ([2]).

§ 1. Вполне равномерно распределенные функции

ЛЕММА 1. *Пусть p — простое число, q — произвольное целое, большее единицы и взаимно простое с p, $f(x)$ — целочисленный многочлен степени n, производная которого не обращается тождественно в ноль по модулю p. Тогда для всякого целого a справедлива оценка:*

$$\left| \sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x)\,q^x}{p^2}} \right| < np^2.$$

Доказательство. Обозначим через S сумму

$$S = \sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x)\,q^x}{p^2}}$$

Очевидно,

$$S = \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} \sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f[a+x_1+p(p-1)x_2]\,q^{x_1+p(p-1)x_2}}{p^2}}$$

Пользуясь сравнениями

$$q^{p(p-1)x_2} \equiv 1 \pmod{p^2},$$

$$f[a+x_1+p(p-1)x_2] \equiv f(a+x_1)+f'(a+x_1)\,p(p-1)x_2 \pmod{p^2},$$

получим:

$$S = \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x_1)q^{x_1}}{p^2}} \sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f'(a+x_1)(p-1)x_2 q^{x_1}}{p}},$$

$$|S| \leqslant \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} \left| \sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f'(a+x_1)q^{x_1}x_2}{p}} \right| \leqslant (n-1)(p-1)p < np^2.$$

Замечание. Лемму 1 можно также получить как частный случай более общего результата, доказанного в работе (4) (§ 2, лемма 3).

ЛЕММА 2. *Дробные доли функции $\varphi(x)$ распределены вполне равномерно тогда и только тогда, когда система функций*

$$\varphi(x+1),\ \varphi(x+2),\ \ldots,\ \varphi(x+s) \tag{5}$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве при любом $s \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi(x)$ распределена вполне равномерно. Тогда, согласно определению, дробные доли функции

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s)$$

распределены равномерно при любом $s \geqslant 1$ и любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю. Применяя критерий Вейля [см. (5)], получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F_s(x)} = o(P), \tag{6}$$

где m — любое целое, отличное от нуля. В частности, при $m=1$ равенство (6) примет вид:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i [m_1\varphi(x+1)+\cdots+m_s\varphi(x+s)]} = o(P).$$

Отсюда, в силу многомерного критерия Вейля, следует, что система функций (5) равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Достаточность условий леммы также непосредственно следует из критерия равномерного распределения. Действительно, пусть система функций (5) при любом $s \geqslant 1$ равномерно распределена в s-мерном пространстве. Для всякого целого $m \neq 0$, так как целые $mm_1, \ldots, mm_s$ не обращаются одновременно в ноль, когда среди чисел $m_1, \ldots, m_s$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F_s(x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i [mm_1\varphi(x+1)+\ldots+mm_s\varphi(x+s)]} = o(P).$$

В силу этого равенства, функция $F_s(x)$ равномерно распределена и, следовательно, дробные доли функции $\varphi(x)$ распределены вполне равномерно.

Введем обозначения: $p_1 < p_2 < \ldots$ — произвольные простые числа, рост которых ограничен условием:

$$p_{\nu+1} < e^{\frac{1}{3}p_\nu^2};$$

q — целое, большее единицы; $\psi(\nu)$ — произвольная положительная целочисленная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\nu \left(\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\right)^3 < \psi(\nu) < e^{p_\nu^2}.$$

Пусть, далее, для $\nu = 1, 2, \ldots$ величины τ_ν и n_ν заданы при помощи равенств:

$$\tau_\nu = p_\nu^2 (p_\nu - 1), \quad n_{\nu+1} = n_\nu + \psi(\nu)\tau_\nu, \quad n_1 = 0.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой функции $\alpha(x)$, определенной степенным рядом*

$$\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_{\nu+1}}}\right) \frac{x^\nu}{p_\nu^2},$$

дробные доли функции $\varphi(x) = \alpha(x) q^x$ распределены вполне равномерно.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s),$$

где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю. Определим целочисленные многочлены $f_\nu(x)$ при помощи равенств

$$f_\nu(x) = m_1 q(x+1)^\nu + \ldots + m_s q^s (x+s)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Обозначим через γ_ν степень многочлена $f_\nu(x)$. Легко проверить, что для $\nu \geqslant s$ выполняется неравенство $\gamma_\nu > \nu - s$ и что для всех $\nu > \nu_0$, где ν_0 зависит только от выбора чисел $q, s, m_1, \ldots, m_s$, функции $f_\nu(x)$ не обращаются тождественно в ноль по модулю p_ν.

Действительно, располагая $f_\nu(x)$ по степеням x, получим:

$$f_\nu(x) = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,$$

где коэффициенты a_k для $k = 0, 1, \ldots, \nu$ определяются равенствами

$$a_k = \sum_{i=1}^{s} m_i q^i C_\nu^k i^k = C_\nu^k \sum_{i=1}^{s} M_i i^k, \quad M_i = m_i q^i. \tag{8}$$

Допустим, что $\gamma_\nu \leqslant \nu - s$. Тогда по меньшей мере s первых коэффициентов должны быть равны нулю и, в силу (8), мы получим систему однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{s} M_i i^k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Очевидно, эта система имеет только нулевое решение

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_s = 0.$$

Но тогда и

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 0,$$

что противоречит выбору величин $m_1, \ldots, m_s$.

Обозначим через k_0 индекс первого из коэффициентов a_k, отличного от нуля. Тогда

$$f_\nu(x) = a_{k_0} x^{\gamma_\nu} + \ldots + a_\nu \quad (k_0 = \nu - \gamma_\nu < s),$$

$$f'_\nu(x) = \gamma_\nu a_{k_0} x^{\gamma_\nu - 1} + \ldots + a_{\nu-1}.$$

Выберем $\nu_0 \geqslant s$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{s} m_i q^i i^{k_0} \right| < p_{\nu_0 + 1} \tag{9}$$

(здесь, в силу того, что $k_0 < s$, будет $\nu_0 = \nu_0(q, s, m_1, \ldots, m_s)$). Так как $\gamma_\nu \leqslant \nu$ и $\nu < p_\nu$, то

$$\gamma_\nu C_\nu^{k_0} \not\equiv 0 \pmod{p_\nu}. \tag{10}$$

Выбирая $\nu > \nu_0$, получим, в силу (9) и (10), что

$$\gamma_\nu a_{k_0} = \gamma_\nu C_\nu^{k_0} \sum_{i=1}^{s} m_i q^i i^{k_0} \not\equiv 0 \pmod{p_\nu}$$

и, следовательно, при $\nu > \nu_0$ многочлен $f'_\nu(x)$ не обращается тождественно в ноль по модулю p_ν.

Оценим сумму

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)}.$$

Пользуясь обозначениями (7), получим:

$$F_s(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_\nu + 1}} \right) \frac{m_1 q (x+1)^\nu + \ldots + m_s q^s (x+s)^\nu}{p_\nu^2} q^x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_\nu + 1}} \right) \frac{f_\nu(x)\, q^x}{p_\nu^2}. \tag{11}$$

Определим k из условия $n_k \leqslant P < n_{k+1}$ и представим P в виде

$$P = n_k + r\tau_k + r', \quad 0 \leqslant r < \psi(k), \quad 0 \leqslant r' < \tau_k. \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$r_\nu = \begin{cases} \psi(\nu) & \text{для } \nu < k, \\ r & \text{для } \nu = k, \end{cases} \qquad S_\nu = \sum_{x=1}^{r_\nu \tau_\nu} e^{2\pi i F_s(n_\nu + x)} \tag{13}$$

и разобьем на части интервал суммирования суммы S:

$$S = \sum_{x=1}^{n_{\nu_0}} e^{2\pi i F_s(x)} + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{k-1} \sum_{x=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} e^{2\pi i F_s(x)} + \\ + \sum_{x=n_k+1}^{n_k+r\tau_k} e^{2\pi i F_s(x)} + \sum_{x>n_k+r\tau_k} e^{2\pi i F_s(x)}.$$

Пользуясь обозначениями (13), получим отсюда:

$$S = O\left(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} |S_\nu| + \tau_k\right). \tag{14}$$

Оценим суммы S_ν для $\nu > \nu_0$. В силу (11),

$$F_s(n_\nu + x) = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i+1}}\right) \frac{f_i(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_i^2} + \frac{f_\nu(n_\nu + x)\, q^x}{p_\nu^2} - \\ - \frac{f_\nu(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_\nu^2 q^{n_\nu+1}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i+1}}\right) \frac{f_i(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_i^2}$$

Введем обозначения:

$$N_\nu(x) = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i+1}}\right) \frac{f_i(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_i^2}, \tag{15}$$

$$R_\nu(x) = -\frac{f_\nu(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_\nu^2 q^{n_\nu+1}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i+1}}\right) \frac{f_i(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_i^2}. \tag{16}$$

Очевидно,

$$F_s(n_\nu + x) = N_\nu(x) + \frac{f_\nu(n_\nu + x)\, q^x}{p_\nu^2} + R_\nu(x). \tag{17}$$

Покажем прежде всего, что $N_\nu(x)$ при любом $x \geqslant 1$ принимает целые значения. Действительно, так как в (15) $\nu \geqslant i+1$, то в равенстве

$$\left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i-1}}\right) q^{n_\nu} = q^{n_\nu - n_i + 1}\left(q^{\psi(i)\tau_i} - 1\right)$$

первый сомножитель правой части будет целым числом; второй сомножитель, в силу выбора τ_i, делится на p_i^2. Следовательно, каждое слагаемое суммы (15)

$$\left(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_i+1}}\right) \frac{f_i(n_\nu + x)\, q^{n_\nu+x}}{p_i^2} = q^{n_\nu - n_i + 1} f_i(n_\nu + x)\, q^x \frac{q^{\psi(i)\tau_i} - 1}{p_i^2}$$

будет целым числом.

Теперь, пользуясь равенством (17), получим:

$$S_\nu = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i F_s(n_\nu+x)} = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i\left[\frac{f_\nu(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2} + R_\nu(x)\right]} = \\ = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i \frac{f_\nu(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2}} + O\left(\sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} |\sin \pi R_\nu(x)|\right). \tag{18}$$

Так как $\tau_\nu = p_\nu^2(p_\nu - 1)$ является периодом функции $f_\nu(x)\,q^x$ по модулю p_ν^2, то

$$\sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i\frac{f(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2}} = r_\nu \sum_{x=1}^{p_\nu^2(p_\nu-1)} e^{2\pi i\frac{f(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2}}$$

Но для $\nu > \nu_0$ производная функция $f_\nu(x)$ не обращается тождественно в ноль по модулю p_ν; следовательно, в силу леммы 1,

$$\left|\sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i\frac{f(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2}}\right| < \nu r_\nu p_\nu^2$$

и из (18) получим:

$$|S_\nu| = O\left(\nu r_\nu p_\nu^2 + \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} |\sin \pi R_\nu(x)|\right). \tag{19}$$

Для оценки $|\sin \pi R_\nu(x)|$ воспользуемся равенствами (7) и (16):

$$|f_i(n_\nu + x)| = |m_1 q(n_\nu + x + 1)^i + \ldots + m_s q^s (n_\nu + x + s)^i| \leqslant$$
$$\leqslant C(n_\nu + x + s)^i,$$

где C зависит только от q, s и чисел $m_1, \ldots, m_s$;

$$|R_\nu(x)| \leqslant C\left(\frac{(n_\nu + x + s)^\nu}{p_\nu^2 q^{n_\nu+1}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \frac{(n_\nu + x + s)^i}{p_i^2 q^{n_i}}\right) q^{n_\nu+x}.$$

Так как для $x < r_\nu\tau_\nu$ отношение соседних членов ряда, стоящего в правой части этого неравенства, стремится к нулю, то получим:

$$|R_\nu(x)| = O\left(\frac{(n_\nu + x + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2 q^{n_\nu+1}} q^{n_\nu+x}\right).$$

Воспользуемся оценкой

$$|\sin \pi R_\nu(x)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{для } r_\nu\tau_\nu - \tau_\nu < x \leqslant r_\nu\tau_\nu, \\ \pi\,|R_\nu(x)| & \text{для } 1 \leqslant x \leqslant r_\nu\tau_\nu - \tau_\nu. \end{cases}$$

Тогда оценка (19) примет вид:

$$|S| = O\left(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu + \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu-\tau_\nu} \frac{(n_\nu + x + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2\, q^{n_\nu+1}} q^{n_\nu+x}\right) =$$
$$= O\left(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu + \frac{(n_{\nu+1} + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2 q^{\tau_\nu}}\right).$$

Отсюда, в силу неравенства $\ln \psi(\nu) < p_\nu^2$, без труда получим:

$$|S_\nu| = O(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu).$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что

$$\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} (\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu) + \tau_k = O\left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu\tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\right),$$

перепишем соотношение (14) в виде

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O\left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu\tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\right). \tag{20}$$

Но, в силу определения величин r_ν, τ_ν и $\psi(\nu)$, будет:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\nu}{p_\nu} \psi(\nu)\tau_\nu + \frac{k}{p_k} r\tau_k = o(n_k + r\tau_k), \tag{21}$$

$$\nu \frac{\tau_{\nu+1}}{\tau_\nu} < 2\nu \left(\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\right)^3 < 2\psi(\nu), \quad \tau_{\nu+1} < \frac{2}{\nu}\psi(\nu)\tau_\nu,$$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1} < 2\sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{1}{\nu}\psi(\nu)\tau_\nu = o(n_k). \tag{22}$$

Наконец, поскольку $n_k + r\tau_k \leqslant P$, из (20), (21) и (22) получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = o(P).$$

Так как

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s),$$

то, по многомерному критерию Вейля, система функций $\varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+s)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве для любого $s \geqslant 1$. Отсюда, в силу леммы 2, следует, что дробные доли функции $\varphi(x)$ распределены вполне равномерно.

Перейдем к вопросу о нахождении возможно лучшей оценки тригонометрических сумм с вполне равномерно распределенными функциями. Пусть числа p_ν и n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) определены как в теореме 1, причем выполняются дополнительные условия:

а) существуют две константы $C_1 > 1$ и $C_2 \geqslant 2C_1$ такие, что

$$C_1 M^\nu < p_\nu < C_2 M^\nu,$$

где M — некоторое целое, большее единицы;

b) выполняется равенство $\psi(\nu) = \psi_1(\nu) M^\nu$, где $\psi_1(\nu)$ — произвольная ограниченная положительная целочисленная функция.

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой вполне равномерно распределенной функции* $\varphi(x)$, *определенной равенством*

$$\varphi(x) = q^x \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_{\nu+1}}}\right) \frac{x^\nu}{p_\nu^2},$$

выполняются оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \varphi(x)} = O(P^{\frac{3}{4}} \ln P), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O(P^{\frac{3}{4}} \ln P). \tag{23}$$

(Здесь, как и раньше, $F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s)$, $m_1, \ldots m_s$ — произвольные целые, не обращающиеся одновременно в ноль.)

Доказательство. Так как при $m_1 = 1$, $m_2 = \ldots = m_s = 0$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \varphi(x+1)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \varphi(x)} + O(1),$$

то утверждение теоремы достаточно доказать для второй из сумм (23). Воспользуемся возможностью применять все соотношения, полученные

при доказательстве теоремы 1. В частности, в силу (20), будет:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O\Big(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\Big).$$

Согласно определению величин p_ν, τ_ν и n_ν, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu < \sum_{\nu=1}^{k} \nu \psi(\nu) p_\nu^2 < C_2^2 \sum_{\nu=1}^{k} \nu \psi_1(\nu) M^{3\nu} = O(kM^{3k}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1} < C_2^3 \sum_{\nu=1}^{k-1} M^{3(\nu+1)} = O(M^{3k})$$

и, следовательно,

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O(kM^{3k}). \tag{24}$$

Но, в силу (12),

$$P \geqslant n_k = \sum_{\nu=1}^{k-1} \psi(\nu) \tau_\nu > \sum_{\nu=1}^{k-1} M^{3k}(M^k - 1) > C_3 M^{4k},$$

где C_3 — некоторая положительная константа. Отсюда получаем:

$$M^{4k} = O(P), \quad M^k = O(P^{\frac{1}{4}}), \quad k = O(\ln P),$$

и оценка (24) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O(P^{\frac{3}{4}} \ln P),$$

чем теорема 2 доказана.

§ 2. Совместно нормальные числа

Доказательство совместной нормальности чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, заданных разложениями в системах счисления соответственно с основаниями $q_1, \ldots, q_s$, как уже было сказано выше, равносильно доказательству равномерности распределения в s-мерном пространстве системы функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция, $s \geqslant 1$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — произвольные целые, бо́льшие единицы, и величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы равенствами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{1}$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Доказательству предпошлем одну несложную лемму о вполне равномерно распределенных функциях.

ЛЕММА 3. *Если функция $\varphi(x)$ вполне равномерно распределена, то при любом выборе положительных целых s и r система функций $\varphi(rx+1), \ldots, \varphi(rx+s)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.*

Доказательство. При $r=1$ утверждение леммы следует в силу многомерного критерия Вейля из определения вполне равномерного распределения. Пусть $r>1$ и $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю. Согласно критерию Вейля, достаточно показать, что сумма

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(rx)},$$

где

$$F_s(rx)=m_1\varphi(rx+1)+\ldots+m_s\varphi(rx+s),$$

имеет нетривиальную оценку $S=o(P)$.

Пользуясь свойствами рациональной суммы первой степени, представим S в виде

$$S=\frac{1}{r}\sum_{y=1}^{r}\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}, \qquad |S|\leqslant \max_{1\leqslant y\leqslant r}\left|\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}\right|. \tag{2}$$

Если для любого целого $h\geqslant 1$ функция $\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$ равномерно распределена, то, как известно [см. ([6])], функция $f(x)$ также равномерно распределена. Выберем

$$f(x)=F_s(x)+\frac{xy}{r};$$

тогда

$$\Delta_h f(x)=F_s(x+h)-F_s(x)+\frac{yh}{r}.$$

Очевидно, разность $F_s(x+h)-F_s(x)$ является линейной комбинацией соседних значений функции $\varphi(x)$ и, по определению вполне равномерного распределения, представляет собой равномерно распределенную функцию; $\Delta_h f(x)$ отличается от этой равномерно распределенной функции на константу и, следовательно, также равномерно распределена. Но тогда и функция

$$f(x)=F_s(x)+\frac{xy}{r}$$

равномерно распределена, так что для любого y из интервала $1\leqslant y\leqslant r$ будет:

$$\left|\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}\right|=o(P),$$

чем, в силу (2), лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть

$$\delta_k^{(\nu)}=[\{\varphi(sk+\nu)\}q_\nu].$$

Очевидно, $0\leqslant\delta_k^{(\nu)}\leqslant q_\nu-1$, так что ряд (1) можно рассматривать как запись α_ν в системе счисления с основанием q_ν и вместо (1) писать:

$$\alpha_\nu=0,\ \delta_1^{(\nu)}\delta_2^{(\nu)}\ldots \quad (\nu=1,2,\ldots,s). \tag{3}$$

Обозначим через $m_1,\ldots,m_s$ произвольные целые, не равные одновременно нулю, и выберем целое n настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $q_\nu^n>|m_\nu|$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Из (3) следует, что

$$\alpha_\nu q_\nu^x = [\alpha_\nu q_\nu^x] + 0,\ \delta_{x+1}^{(\nu)} \dots \delta_{x+n}^{(\nu)} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^n} \quad (0 < \theta_\nu < 1). \tag{4}$$

Определим целые $x_1, \dots, x_s$ равенствами

$$x_\nu = \delta_{x+1}^{(\nu)} \dots \delta_{x+n}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \dots s), \tag{5}$$

где выражение, стоящее в правой части, понимается как n-значное число, записанное в системе счисления с основанием q_ν. Из (4) получим:

$$\alpha_\nu q_\nu^x = [\alpha_\nu q_\nu^x] + \frac{x_\nu}{q_\nu^n} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^n},$$

$$m_1\alpha_1 q_1^x + \dots + m_s\alpha_s q_s^x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu [\alpha_\nu q_\nu^x] + \frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \dots + \frac{m_s x_s}{q_s^n} + \frac{\theta(x)}{q_1^n} \quad (|\theta(x)| \leqslant s).$$

Отсюда с помощью тех же соображений, которые привели к формуле (18) (§ 1), следует, что

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(m_1\alpha_1 q_1^x + \dots + m_s\alpha_s q_s^x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \dots + \frac{m_s x_s}{q_s^n}\right)} + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right).$$

Согласно определению, величины x_ν зависят от x и могут принимать значения из интервалов $0 \leqslant x_\nu \leqslant q_\nu^n - 1$. Обозначим через $N(x_1, \dots, x_s)$ число тех x из интервала $1 \leqslant x \leqslant P$, для которых переменные $x_1, \dots, x_s$ принимают фиксированную систему значений. Тогда получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(m_1\alpha_1 q_1^x + \dots + m_s\alpha_s q_s^x)} =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{q_1^n-1} \dots \sum_{x_s=0}^{q_s^n-1} N(x_1, \dots, x_s)\, e^{2\pi i\left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \dots + \frac{m_s x_s}{q_s^n}\right)} + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right). \tag{6}$$

В силу (5), фиксированным значениям $x_1, \dots, x_s$ соответствуют фиксированные значения величин $\delta_{x+1}^{(\nu)}, \dots, \delta_{x+n}^{(\nu)}$ (обозначим эти значения через $\delta_{\nu 1}, \dots, \delta_{\nu n}$, $\nu = 1, 2, \dots, s$). Согласно определению величин $\delta_k^{(\nu)}$, отсюда следует, что $N(x_1, \dots, x_s)$ равно числу решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[\{\varphi(sx + s + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu 1}, \\ &[\{\varphi(sx + 2s + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu 2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[\{\varphi(sx + ns + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu n} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s) \tag{7}$$

при x, изменяющемся на интервале $1 \leqslant x \leqslant P$.

Система уравнений (7), очевидно, эквивалентна системе неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta_{\nu 1}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(sx + s + \nu)\} < \frac{\delta_{\nu 1} + 1}{q_\nu} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\delta_{\nu n}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(sx + ns + \nu)\} < \frac{\delta_{\nu n} + 1}{q_\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s). \tag{8}$$

Таким образом, $N(x_1, \dots, x_s)$ равно числу попаданий дробных долей системы функций

$$\varphi(sx + s + 1),\ \varphi(sx + s + 2), \dots, \varphi(sx + ns + s) \tag{9}$$

в ns-мерный параллелепипед, определяемый неравенствами (8). Указанный параллелепипед лежит внутри единичного ns-мерного куба; его объем не зависит от выбора величин $\delta_{\nu 1}, \ldots, \delta_{\nu n}$ и равен $(q_1 q_2 \ldots q_s)^{-n}$

В силу леммы 3, система функций (9) равномерно распределена в ns-мерном пространстве; следовательно,

$$N(x_1, \ldots, x_s) = (q_1 q_2 \ldots q_s)^{-n} P + o(P).$$

Пользуясь этим соотношением, получим из (6):

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s \alpha_s q_s^x)} =$$

$$= (q_1 \ldots q_s)^{-n} P \sum_{x_1=0}^{q_1^n - 1} \ldots \sum_{x_s=0}^{q_s^n - 1} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \ldots + \frac{m_s x_s}{q_s^n} \right)} + o(P) + O\left(\frac{P}{q_1^n} \right).$$

Согласно определению n, выполняются неравенства $q_\nu^n > |m_\nu|$; следовательно, кратная сумма в правой части последнего равенства обращается в ноль. Таким образом,

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s \alpha_s q_s^x)} = o(P) + O\left(\frac{P}{q_1^n} \right),$$

$$\lim_{P \to \infty} \frac{1}{P} \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s \alpha_s q_s^x)} \right| = O\left(\frac{1}{q_1^n} \right).$$

Отсюда, благодаря тому, что n можно выбрать произвольно большим, получим:

$$\lim_{P \to \infty} \frac{1}{P} \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s \alpha_s q_s^x)} \right| = 0,$$

чем, в силу критерия Вейля, теорема доказана.

Поступило
15.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215—238.

[2] Коробов Н. М., Некоторые многомерные задачи теории диофантовых приближений, Доклады Ак. наук СССР, 84, № 1 (1952), 13—17.

[3] Коробов Н. М., Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 361—380.

[4] Коробов Н. М., Дробные доли показательных функций, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. 38 (1951), 87—96.

[5] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.

[6] Van der Corput J. G., Diophantische Ungleichungen, Acta math., 56 (1931), 373—456.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 661—666

А. Г. ПОСТНИКОВ

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Тригонометрическая сумма $S=\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i\alpha g^x}$, где $0\leqslant\alpha<1$, g — целое $\geqslant 2$, исследуется по аналогии с суммой $\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x^n}$. Интервал $[0,1)$ эффективно разбивается на два подмножества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, причем если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то $|S|\leqslant C(\varepsilon)\dfrac{P}{\log^{\frac{1}{2}-\varepsilon}P}$, $\varepsilon>0$, и $\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1=O(e^{-C(\log P)^2})$ ($C>0$ — константа).

В работе (1) автор, используя метод, посредством которого И. М. Виноградов оценил тригонометрическую сумму с многочленом, дал оценку тригонометрической суммы с показательной функцией αg^x, g — целое $\geqslant 2$ [формула (13) работы (1)]. Оценку тригонометрической суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x^n}$$

зачастую конкретизируют нижеследующим образом: интервал $[0,1)$ (для α) рассекают на непересекающиеся частичные интервалы или дуги (разбиение Фарея), эти интервалы распределяют на два класса (большие дуги и малые дуги), в силу чего интервал $[0,1)$ оказывается разбитым на два непересекающихся множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$; оказывается, что $\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1\to 0$ при $P\to\infty$ и если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x^n}\Big|=o(P).$$

В настоящей работе мы подобным образом конкретизируем нашу оценку показательной тригонометрической суммы.

Пусть g — целое рациональное число $\geqslant 2$, $0\leqslant\alpha<1$, m — целое. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi im\alpha g^x}. \tag{1}$$

Повторяя рассуждения работы (1) [до формулы (13)], получаем:

$$\Big|\frac{1}{P}\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi im\alpha g^x}\Big|^{2d}\leqslant K\left(\frac{r}{l^d}\,\frac{\max\limits_{0\leqslant j\leqslant r-1} N_P(\Delta_j)}{P}+\frac{g^{2dl}}{l^{2d}\,r^{2d}}+\frac{l^{2d}}{P^{2d}}\right) \tag{2}$$

[в работе (1), начиная с формулы (10), в знаменателе второго члена правой части пропущено l^{2d}, что, впрочем, несущественно]. Здесь d, $l<P$,

r — свободные целочисленные (точнее, натуральные) параметры. Через K мы обозначаем (и в этой работе) константы, зависящие лишь от m, d и g. Интервал $[0,1)$ делится на r равных частей

$$\Delta_j = \left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r}\right), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, r-1,$$

и через $N_P(\Delta_j)$ обозначается число дробных долей, попавших на Δ_j. Введем обозначение:

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant r-1} N_P(\Delta_j) = N_P^{(r)}$$

и положим в оценке (2)

$$l = \left[\frac{\log r}{\log g}\right].$$

Мы получаем:

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m \alpha g^x}\right|^{2d} \leqslant KP^{2d}\left(\frac{rN_P^{(r)}}{(\log r)^d} \cdot \frac{1}{P} + \frac{1}{(\log r)^{2d}} + \frac{(\log r)^{2d}}{P^{2d}}\right). \tag{3}$$

Очевидно, что $rN_P^{(r)} \geqslant P$. Поэтому первый член правой части больше второго. Извлекая корень степени $2d$, получаем нужную нам оценку тригонометрической суммы:

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m \alpha g^x}\right| \leqslant K\left(\frac{P}{\sqrt{\log r}}\sqrt[2d]{\frac{2N_P^{(r)}}{P}} + \log r\right). \tag{4}$$

Пусть $r = g^s$, где s — натуральное число, пока что произвольное. Пусть α в g-ичной системе счисления представляется так:

$$\alpha = \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \cdots.$$

Пусть $\{\alpha g^x\}$ с некоторым x из $x = 0, 1, \ldots, P-1$ попало на Δ_j. Это означает, что

$$\frac{j}{g^s} \leqslant \left(\frac{a_1}{g^1} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \cdots\right) g^x - a_1 g^{x-1} - \cdots - a_x < \frac{j+1}{g^s}$$

или

$$\frac{j}{g^s} \leqslant \frac{a_{x+1}}{g} + \cdots + \frac{a_{x+s}}{g^s} + \cdots < \frac{j+1}{g^s},$$

т. е.

$$j = a_{x+1} g^{s-1} + \cdots + a_{x+s}.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием попадания $\{\alpha g^x\}$ с $0 \leqslant x \leqslant P-1$ на интервал Δ_j, где $j = b_1 g^{s-1} + \cdots + b_s$, является наличие в строчке из первых $P+s-1$ g-ичных знаков α

$$a_1 a_2 \ldots a_{p+s-1}$$

последовательной группы знаков $(b_1 \ldots b_s)$. Распишем строчку из $P+s-1$ первых знаков нижеследующим способом:

$$(a_1 a_2 \ldots a_s), (a_2 a_3 \ldots a_{s+1}), \ldots, (a_P a_{P+1} \ldots a_{P+s-1})$$

и назовем эту последовательность s-членных скобок P-членной гусеницей числа α. Очевидно, $N_P(\Delta_j)$ равно количеству появлений в P-членной гусенице числа α комбинации $(b_1 \ldots b_s)$, а $N_P^{(g^s)}$ равно количеству появлений в P-членной гусенице числа α наиболее часто встречающейся в

ней комбинации (или одной из наиболее часто встречающихся в ней комбинаций). Мы получаем оценку тригонометрической суммы в зависимости от g-ичных знаков α:

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m\alpha g^x}\right| \leqslant K\left(\frac{P}{\sqrt{s}}\sqrt[2d]{\frac{g^s N_P^{(g^s)}}{P}} + s\right). \tag{5}$$

Покажем, что эта оценка нетривиальна на множестве почти полной меры.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $s = \left[\frac{1}{2}\frac{\log\frac{P}{\log^2 P}}{\log g}\right]$, $P = sf + q$, $0 \leqslant a < s$. *Разобьем интервал* $[0,1)$ *на равные части длиной* $\frac{1}{g^{sf+s-1}}$ (*так что* α, *лежащие на одном отрезке, имеют одинаковые первые* $sf + s - 1$ g-*ичных знаков и поэтому одинаковую* sf-*членную гусеницу*). *Разобьем интервалы на два класса: к первому классу отнесем те интервалы, где*

$$N_{sf}^{(g^s)} > \frac{sf}{g^s}s,$$

ко второму классу отнесем те интервалы, где

$$N_{sf}^{(g^s)} \leqslant \frac{sf}{g^s}s.$$

Совокупность интервалов первого класса обозначим через $\mathfrak{M}_1$, *совокупность интервалов второго класса — через* $\mathfrak{M}_2$. *Тогда если* $\alpha \subset \mathfrak{M}_2$, *то*

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m\alpha g^x}\right| \leqslant K(\varepsilon)\frac{P}{\log^{\frac{1}{2}-\varepsilon} P} \tag{6}$$

и

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1 = O\left(e^{-K\log^3 P + O(\log P)}\right) \text{ с } K > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем сначала формулу (6). Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}_2$. Имеем:

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m\alpha g^x}\right| = \left|\sum_{x=0}^{sf-1} e^{2\pi i m\alpha g^x}\right| + O(s) \leqslant$$

$$\leqslant K\left(\frac{sf}{\sqrt{s}}\sqrt[2d]{\frac{g^s N_{sf}^{(g^s)}}{sf}} + s\right) \leqslant K\left(\frac{P}{\sqrt{\log P}}\sqrt[2d]{s} + \log P\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\frac{P}{\log^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}} P} \qquad \left(\varepsilon = \frac{1}{2d}\right).$$

Для оценки меры (7) докажем нижеследующую лемму (она широко известна) в нужной для нас форме:

ЛЕММА. *Рассматриваются все* f-*членные комбинации* $(b_1 \ldots b_f)$ с $0 \leqslant b_i \leqslant r-1$ (*их всех* r^f *штук*). *Рассмотрим те из них, в которых фиксированный знак* b *появляется более* $\eta\frac{f}{r}$ *раз с* $r > \eta > 2$. *Количество таких комбинаций имеет оценку*

$$O\left(\sqrt{f}\, r^f e^{-\frac{f}{2}\frac{\eta^2}{r^2}}\right)$$

(*с абсолютной константой в* O).

Пусть сначала $\eta > 1$. Число комбинаций, где знак b появляется более чем $\eta\frac{f}{r}$ раз, очевидно, будет равно

$$F = \sum_{m \geqslant \left[\frac{\eta f}{r}\right]+1} C_f^m (r-1)^{f-m}.$$

Беря отношение последующего члена к предыдущему, убеждаемся, что в сумме самым большим членом будет первый. Обозначим $l = \left[\eta\frac{f}{r}\right] + 1$. Имеем:

$$F \leqslant \left(f - \eta\frac{f}{r}\right) C_f^l (r-1)^{f-l} = O\left(\sqrt{f}\left(\frac{f}{l}\right)^l \frac{1}{\left(1-\frac{l}{f}\right)^{f-l}} (r-1)^{f-l}\right),$$

$$\left(\frac{f}{l}\right)^l \leqslant \left(\frac{f}{\eta\frac{f}{r}}\right)^l = \left(\frac{r}{\eta}\right)^l, \quad \frac{l}{f} < \frac{\eta\frac{f}{r}+1}{f} = \frac{\eta}{r} + \frac{1}{f},$$

$$1 - \frac{l}{f} \geqslant 1 - \frac{\eta}{r} - \frac{1}{f} = \left(1-\frac{\eta}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{f\left(1-\frac{\eta}{r}\right)}\right) \geqslant \left(1-\frac{\eta}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{f-l}\right).$$

Поэтому $\left(\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^\lambda$ ограничена при $\lambda \geqslant 2\right)$

$$\left(1-\frac{l}{f}\right)^{f-l} \geqslant C_1 \left(1-\frac{\eta}{r}\right)^{f-l} (C_1 \text{ — константа}),$$

$$F = O\left(\sqrt{f}\left(\frac{r}{\eta}\right)^l \frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{r}\right)^{f-l}} (r-1)^{f-l}\right) =$$

$$= O\left(\sqrt{f}\, r^f e^{\log(r-1)\left(f-1-\left[\frac{\eta f}{r}\right]\right) - \log\eta\left(1+\left[\eta\frac{f}{r}\right]\right) - \log(r-\eta)\left(f-1-\left[\eta\frac{f}{r}\right]\right)}\right).$$

Коэффициент при $1 + \left[\frac{\eta f}{r}\right]$,

$$-\log(r-1) - \log\eta + \log(r-\eta),$$

в силу $\eta > 1$, отрицателен. Поэтому

$$F = O\left(\sqrt{f}\, r^f e^{\log(r-1)\left(f-\frac{\eta f}{r}\right) - \log\eta\cdot\eta\frac{f}{r} - \log(r-\eta)\left(f-\frac{\eta f}{r}\right)}\right).$$

Обозначим

$$\varphi(\eta) = \log(r-1)\left(1-\frac{\eta}{r}\right) - \log\eta\cdot\eta\frac{1}{r} - \log(r-\eta)\left(1-\frac{\eta}{r}\right).$$

Тогда

$$F = O\left(\sqrt{f}\, r^f e^{f\varphi(\eta)}\right),$$

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(\eta) = -\log(r-1)\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\log\eta + \log(r-\eta)\frac{1}{r}, \quad \varphi'(1) = 0,$$

$$\varphi''(\eta) = -\frac{1}{r\eta} - \frac{1}{(r-\eta)r} = -\frac{1}{\eta(r-\eta)}.$$

Поэтому, по формуле Тейлора с остаточным членом,

$$\varphi(\eta) = -\frac{(\eta-1)^2}{2\theta(r-\theta)}, \qquad 1 < \theta < \eta.$$

Взяв $\theta = \frac{r}{2}$, мы получим:

$$\varphi(\eta) < -\frac{2(\eta-1)^2}{r^2}.$$

Так как

$$\eta - 1 > \frac{\eta}{2} \quad (\eta > 2), \quad \varphi(\eta) < -\frac{\eta^2}{2r^2},$$

то

$$F = O\left(\sqrt{f}\, r^f e^{-\frac{f}{2}\frac{\eta^2}{r^2}}\right).$$

Лемма доказана.

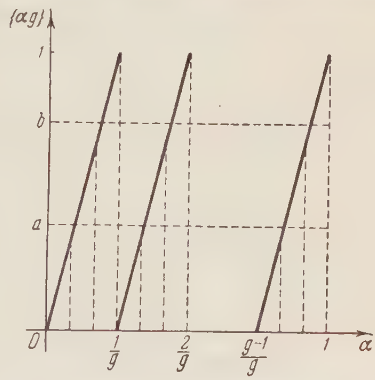
Возьмем какую-либо s-членную комбинацию g-ичных знаков $b = (b_1 \ldots b_s)$ и какое-либо $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_{sf+s-1} \ldots$. Обозначим через $N_{sf}(b, \alpha)$ число появлений b в sf-членной гусенице числа α:

$$(a_1 a_2 \ldots a_s), \quad (a_2 a_3 \ldots a_{s+1}) \ldots (a_{sf} a_{sf+1} \ldots a_{sf+s-1}).$$

Рассмотрим числа α, $\{\alpha g\}, \ldots, \{\alpha g^{s-1}\}$ и в их g-ичном представлении возьмем первые sf знаков, сгруппировав их по s штук:

$$\begin{gathered}
\alpha \approx 0,\ (a_1 \ldots a_s)(a_{s+1} \ldots a_{2s}) \ldots (a_{s(f-1)+1} \ldots a_{sf}),\\
\{\alpha g\} \approx 0, (a_2 \ldots a_{s+1})(a_{s+2} \ldots a_{2s+1}) \ldots (a_{s(f-1)+2} \ldots a_{sf+1}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\{\alpha g^{s-1}\} \approx 0,\ (a_s \ldots a_{2s-1})(a_{2s} \ldots a_{3s-1}) \ldots (a_{sf} \ldots a_{sf+s-1}).
\end{gathered}$$

Это можно рассматривать как первые f знаков g^s-ичного разложения чисел α, $\{\alpha g\}, \ldots, \{\alpha g^{s-1}\}$. Обозначим через $N_f^*(b, \{\alpha g^j\})$ число появлений знака b среди первых f членов g^s-ичного разложения $\{\alpha g^j\}$. Очевидно,



$$N_{sf}(b, \alpha) = N_f^*(b, \alpha) + N_f^*(b, \{\alpha g\}) + \\ + \ldots + N_f^*(b, \{\alpha g^{s-1}\}).$$

Если

$$N_{sf}(b, \alpha) > \frac{sf}{g^s}\, s,$$

то по крайней мере для одного j, $0 \leqslant j \leqslant s-1$,

$$N_f^*(b, \{\alpha g^j\}) > \frac{f}{g^s}\, s.$$

Поэтому ($E_\alpha(\ldots)$ — множество чисел α, обладающих свойством, указанным в скобке)

$$E_\alpha\left(N_{sf}(b, \alpha) > \frac{sf}{g^s}\, s\right) \subset \bigcup_{j=0}^{s-1} E_\alpha\left(N_j^*(b, \{\alpha g^j\}) > \frac{f}{g^s}\, s\right),$$

$$\operatorname{mes} E_\alpha\left(N_{sf}(b, \alpha) > \frac{sf}{g^s}\, s\right) \leqslant \sum_{j=0}^{s-1} \operatorname{mes} E_\alpha\left(N_j^*(b, \{\alpha g^j\}) > \frac{f}{g^s}\, s\right).$$

Преобразование $\alpha \to \{\alpha g\}$ и, следовательно, $\alpha \to \{\alpha g^j\}$ обладает тем свойством, что мера полного прообраза некоторого множества равна мере самого множества (для интервалов это очевидно из рисунка). Поэтому

$$\operatorname{mes} E_\alpha\left(N_j^*(b, \{\alpha g^j\}) > \frac{f}{g^s}\, s\right) = \operatorname{mes} E_\alpha\left(N_j^*(b, \alpha) > \frac{f}{g^s}\, s\right),$$

$$\operatorname{mes} E_\alpha\left(N_{sf}(b, \alpha) > \frac{sf}{g^s}\, s\right) < s \operatorname{mes} E_\alpha\left(N_j^*(b, \alpha) > \frac{f}{g^s}\, s\right).$$

Мера, стоящая в правой части, равна величине $\frac{1}{g^{sf}}$, умноженной на число f-членных комбинаций g^s-ичных знаков таких, что заданный знак b встречается более $\frac{f}{g^s}s$ раз. Это число подсчитано в лемме ($r = g^s$, $\eta = s$):

$$\operatorname{mes} E_\alpha\left(N_f^*(b,\alpha) \geqslant \frac{f}{g^s}s\right) = \frac{1}{g^{sf}} O\left(\sqrt{f}\, g^{sf} e^{-\frac{fs^2}{2g^{2s}}}\right) = O\left(\sqrt{f}\, e^{-\frac{fs^2}{2g^{2s}}}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes} E_\alpha\left(N_{sf}(b,\alpha) > \frac{sf}{g^s}s\right) = O\left(s\sqrt{f}\, e^{-\frac{fs^2}{2g^{2s}}}\right).$$

Если α принадлежит к $\mathfrak{M}_1$, то имеется такая s-членная комбинация b, что

$$N_{sf}(b,\alpha) > \frac{sf}{g^s}\cdot s.$$

Всего различных комбинаций b g^s штук. Поэтому

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1 \leqslant g^s \max_b \operatorname{mes} E_\alpha\left(N_{sf}(b,\alpha) > \frac{sf}{g^s}s\right),$$

т. е.

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1 = O\left(s\sqrt{f}\, g^s e^{-\frac{fs^2}{2g^{2s}}}\right).$$

Так как

$$s = \left[\frac{1}{2}\frac{\log\frac{P}{\log^2 P}}{\log g}\right],$$

то

$$\frac{fs^2}{2g^{2s}} \geqslant \frac{fs^2}{2g^{\frac{\log\frac{P}{\log^2 P}}{\log g}}} = \frac{fs^2}{2P}\log^2 P \geqslant \frac{s}{4}\log^2 P \geqslant k\log^3 P, \quad k > 0$$

(мы использовали неравенство $2sf \geqslant P$). Далее,

$$s\sqrt{f}\, g^s = e^{O(\log P)}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_1 = O\left(e^{-k\log^3 P + O(\log P)}\right), \quad k > 0, \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Автор приносит благодарность И. М. Виноградову за постановку задачи.

Поступило
31. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Постников А. Г., К вопросу о распределении дробных долей показательной функции, Доклады Ак. наук СССР, 86, № 3 (1952), 473—476.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 667—672

К. А. РОДОСССКИЙ

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ НУЛЕ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Доказывается новая теорема о действительных нулях L-функций Дирихле с действительными характерами, из которой следует, в частности, известная теорема Зигеля (1).

§ 1

ТЕОРЕМА. *Пусть* $D > 100$. *При любом* $\varepsilon \in (0;0{,}025]$ *действительный нуль* β L*-функции Дирихле с действительным первообразным характером по основному модулю* D *удовлетворяет неравенству:*

$$1 - \beta \geqslant \min\{\varepsilon;\ 0{,}015 \ln^{-5} D \cdot D^{-26\varepsilon}\},$$

кроме, быть может, одного нуля одной исключительной L*-функции указанного вида.*

Следствие (теорема Зигеля). *При любом* $\varepsilon \in (0;\ 0{,}025]$ *существует постоянная* $C(\varepsilon)$ *такая, что для всех нулей без исключения*

$$1 - \beta \geqslant C(\varepsilon) \cdot D^{-30\varepsilon}.$$

Доказательство. Полагаем $\delta_1 = 1 - \beta_1$, если существует нуль β_1, не удовлетворяющий неравенству теоремы, и $\delta_1 = \varepsilon$, если такого нуля нет.

Очевидно, существует постоянная $C_1(\varepsilon,\ \delta_1)$ такая, что

$$\min\{\delta_1;\ \varepsilon;\ 0{,}015 \ln^{-5} D \cdot D^{-26\varepsilon}\} \geqslant C_1(\varepsilon,\ \delta_1) D^{-30\varepsilon}.$$

Для доказательства следствия достаточно положить $C(\varepsilon) = C_1(\varepsilon,\ \delta_1)$.

Доказательство теоремы проведено в следующих параграфах.

§ 2

Приводимые здесь без доказательства оценки легко получаются при помощи частного суммирования.

В этом и последующих параграфах $\chi(n)$, χ обозначают неглавный характер Дирихле. Под θ понимается величина, вообще говоря, имеющая различные значения в различных членах формул и удовлетворяющая условию $|\theta| \leqslant 1$.

ЛЕММА 1. а) *При* $0 \leqslant s < 1$

$$\sum_{n=1}^{x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} - \varphi(s) + \theta x^{-s},$$

причем $\varphi(s)$ *удовлетворяет неравенству:* $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant (1-s)^{-1}$:

b) *при* $0 \leqslant s \leqslant 1$, $x \geqslant 10^4$

$$\sum_{n=1}^{x} n^{-s} < 1{,}063 \ln x \cdot x^{1-s};$$

c) *при* $x \geqslant 10^8$

$$\sum_{n=1}^{x} \tau(n) n^{-1} < 0{,}57 \ln^2 x,$$

где $\tau(n)$ *— число делителей* n.

В дальнейшем под M будем понимать число, удовлетворяющее неравенству:

$$M \geqslant \max_{u,\, v} \left| \sum_{u \leqslant n \leqslant v} \chi(n) \right|,$$

где $\chi(n)$ — неглавный характер.

ЛЕММА 2. a) *При* $0 \leqslant s \leqslant 1$

$$\max_{u} \left| \sum_{z < n \leqslant u} \chi(n) n^{-s} \right| \leqslant M z^{-s};$$

b) *при* $0 \leqslant s \leqslant 1$, $M \geqslant 10^4$

$$\left| \sum_{n=1}^{x} \chi(n) n^{-s} \right| \leqslant 1{,}18 \ln M \cdot M^{1-s};$$

c) *если* D *— модуль характера* $\chi(n)$ *и* $1 - 0{,}01 \ln^{-1} D \leqslant s \leqslant 1$, *то*

$$| L'(s, \chi) | \leqslant 0{,}717 \ln^2 D.$$

§ 3

ЛЕММА 3. *Пусть* $\Phi = \Phi(n_1, n_2, n_3, n_4)$ *есть функция от натуральных переменных и*

$$S(\Phi) = \sum\sum\sum\sum_{G} \Phi$$

есть сумма, распространенная на все целые точки области G, *определенной условием* $1 \leqslant n_1 n_2 n_3 n_4 \leqslant z^4$. *Тогда имеет место тождество:*

$$\begin{aligned} S(\Phi) = {} & \sum_{n_1, n_2, n_3 \leqslant z} \sum_{n_4 \leqslant z^4 (n_1 n_2 n_3)^{-1}} \Phi + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{n_\beta, n_\gamma, n_\delta \leqslant z} \sum_{z < n_\alpha \leqslant z^4 (n_\beta n_\gamma n_\delta)^{-1}} \Phi + \\ & + \sum_{(\alpha\beta)} \sum_{n_\gamma, n_\delta \leqslant z} \sum_{n_\alpha, n_\beta > z;\ n_\alpha n_\beta \leqslant z^4 (n_\gamma n_\delta)^{-1}} \Phi + \\ & + \sum_{\delta=1}^{4} \sum_{n_\delta \leqslant z} \sum_{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma > z;\ n_\alpha n_\beta n_\gamma \leqslant z^4 n_\delta^{-1}} \Phi, \end{aligned} \tag{1}$$

где символ (α, β) *указывает на пробегание индексами* α *и* β *всех сочетаний по два из чисел* 1, 2, 3, 4. *Все индексы* α, β, γ, δ *различны и те, для которых не указаны принимаемые ими значения, составляют одно любое возможное сочетание по три и по два из чисел* 1, 2, 3, 4.

Доказательство. Суммирование по всем n_i при условии $1 \leqslant n_1 n_2 n_3 n_4 \leqslant z^4$ можно произвести по частям следующим образом:

1) $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4 \leqslant z$,

2) $n_\beta,\ n_\gamma,\ n_\delta \leqslant z, \quad n_\alpha > z, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4$,

3) $n_\gamma,\ n_\delta \leqslant z, \quad n_\alpha,\ n_\beta > z$,

α и β пробегают все сочетания по два из чисел 1, 2, 3, 4,

4) $n_\delta \leqslant z, \quad \delta = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad n_\alpha,\ n_\beta,\ n_\gamma > z$.

Поэтому

$$S(\Phi) = \sum_{n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4 \leqslant z} \sum \sum \sum \Phi + \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{n_\beta,\ n_\gamma,\ n_\delta \leqslant z} \sum \sum \sum_{n_\alpha > z} \sum \Phi +$$

$$+ \sum_{(\alpha,\beta)} \sum_{n_\gamma,\ n_\delta \leqslant z} \sum \sum_{n_\alpha,\ n_\beta > z} \sum \Phi + \sum_{\delta=1}^{4} \sum_{n_\delta \leqslant z} \sum_{n_\alpha,\ n_\beta,\ n_\gamma > z} \sum \sum \sum \Phi.$$

Соединяя в правой части первый член с одним слагаемым при $\alpha = 4$ из второго члена, получаем тождество (1).

ЛЕММА 4. *Имеет место тождество*

$$S(\Phi) = \sum_{n=1}^{z^4} \sum_{d \mid n} \sum_{\Delta \mid d} \sum_{\omega \mid \Delta} \sum \Phi\left(\omega,\ \frac{\Delta}{\omega},\ \frac{d}{\Delta},\ \frac{n}{d}\right),$$

где $S(\Phi)$ определено в лемме 3.

Доказательство. Полагаем $\omega = n_1$, $\frac{\Delta}{\omega} = n_2$, $\frac{d}{\Delta} = n_3$, $\frac{n}{d} = n_4$. Каждая система $(\omega,\ \Delta,\ d,\ n)$ определяет точку $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4) \in G$. Обратно, каждой точке $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4) \in G$ соответствует единственная система $(\omega,\ \Delta,\ d,\ n)$.

§ 4

Начиная с этого момента, мы будем применять следующие обозначения. $\chi_1(n)$—действительный первообразный характер с основным модулем k, $\chi(n)$ — действительный первообразный характер с основным модулем D, $\chi(n) \neq \chi_1(n)$, $\chi_0(n)$ — главный характер по модулю D. В леммах 3 и 4 полагаем

$$\Phi(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4) = \frac{\chi(n_1)\chi\chi_1(n_2)\chi_1\chi_0(n_3)}{(n_1 n_2 n_3 n_4)^s} = \Phi(s,\ \chi,\ \chi_1).$$

ЛЕММА 5. *При $s \leqslant 1$ и $z \geqslant \max\{k,\ D\}$*

$$S(\Phi(s, \chi, \chi_1)) > \frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

Доказательство. Применяя лемму 4 к $\Phi(s, \chi, \chi_1)$, получаем тождество:

$$S(\Phi(s, \chi, \chi_1)) = \sum_{n=1}^{z^4} \frac{1}{n^s} \sum_{d \mid n} \sum_{\Delta \mid d} \sum_{\omega \mid \Delta} \sum \chi(\omega)\chi\chi_1\left(\frac{\Delta}{\omega}\right)\chi_1\chi_0\left(\frac{d}{\Delta}\right) = \sum_{n=1}^{z^4} \frac{g_1(n)}{n^s}.$$

Ввиду того, что

$$\chi(\omega)\chi\chi_1\left(\frac{\Delta}{\omega}\right)\chi_1\chi_0\left(\frac{d}{\Delta}\right) =$$

$$= \chi(\omega)\chi\left(\frac{\Delta}{\omega}\right)\chi_1\chi_0\left(\frac{d}{\Delta}\right)\chi_1\chi_0\left(\frac{\Delta}{\omega}\right) = \chi(\Delta)\chi_1\chi_0(\omega)\chi_1\chi_0(d),$$

$$g_1(n) = \sum_{d \mid n} \chi_1\chi_0(d) \sum_{\Delta \mid d} \chi(\Delta) \sum_{\omega \mid \Delta} \chi_1\chi_0(\omega).$$

Так как функция $g_1(n)$ является мультипликативной, то ее достаточно оценить для степеней простого числа. Но

$$g_1(p^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi_1\chi_0(p^\alpha) \sum_{\gamma=0}^{\beta} \chi(p^\gamma) \sum_{\delta=0}^{\gamma} \chi_1\chi_0(p^\delta).$$

В результате элементарного подсчета оказывается, что

$$g_1(p^\alpha) \geqslant \begin{cases} 1, & \text{если } \chi\chi_1(p) = 0, \\ 2, & \text{если } \alpha \text{ четное}, \\ 0, & \text{если } \alpha \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Ввиду этого

$$\sum_{n=1}^{z^4} \frac{g_1(n)}{n^s} > \frac{1}{z} + \zeta(2) - \sum_{n>z^4} n^{-2} > \frac{\pi^2}{6}.$$

§ 5

Наложим на величины k, D, M, s, z следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &D \geqslant \max\{k,\ 100\}, \\ &M = D^2, \quad z = M^3, \\ &M^{-\frac{1}{4}} \ln^{-2} M \leqslant 1 - s \leqslant 0{,}025. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Обозначим

$$\delta = 1 - s, \quad L_z(s,\ \chi) = \sum_{n=1}^{z} \chi(n) n^{-s}.$$

В лемме 3 полагаем $\Phi(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4) = \Phi(s,\ \chi,\ \chi_1)$ и получаем:

$$S(\Phi(s,\ \chi,\ \chi_1)) = S_1 + S_2, \tag{4}$$

где S_1 является первым слагаемым, а S_2 есть сумма остальных трех слагаемых в правой части тождества (1).

ЛЕММА 6. *При условиях* (3)

$$S_1 = \delta^{-1} z^{4\delta} L(1,\ \chi)\, L_z(1, \chi\chi_1)\, L_z(1,\ \chi_1\chi_0) -$$
$$- \varphi(s)\, L(s,\ \chi_1\chi_0)\, L_z(s,\ \chi)\, L_z(s, \chi\chi_1) + R_1,$$

где

$$|R_1| \leqslant 1{,}4 \ln^4 M \cdot \left(M^{\frac{4}{5}} z^{-\frac{9}{10}} + M^{\frac{13}{10}} z^{-\frac{39}{40}} \right) + z^{-\frac{37}{40}}.$$

Доказательство. При помощи леммы 1, а) получаем:

$$S_1 = \delta^{-1} z^{4\delta} L_z(1,\ \chi)\, L_z(1,\ \chi\chi_1)\, L_z(1,\ \chi_1\chi_0) -$$
$$- \varphi(s)\, L_z(s,\ \chi)\, L_z(s,\ \chi\chi_1)\, L_z(s,\ \chi_1\chi_0) + \theta \cdot z^{4\delta - 1}.$$

В силу леммы 2, а),

$$L_z(1,\ \chi) = L(1,\ \chi) + \theta M^{\frac{1}{2}} z^{-1}, \quad L_z(s,\ \chi_1\chi_0) = L_z(s,\ \chi_1\chi_0) + \theta M z^{-s}.$$

После замены L_z на L выделяется остаточный член, который оценивается при помощи леммы 2, b).

ЛЕММА 7. *При условиях* (3)

$$|S_2| < 27{,}07M \ln^3 z \cdot z^{-\frac{9}{10}}.$$

Доказательство. Применяя леммы 1, b), c) и 2, a),c), получаем оценку:

$$|S_2| \leqslant \Big[2{,}01\Big(\sum_{n\leqslant z} n^{-s}\Big)^3 + 3{,}03\sum_{n_1\leqslant z} n_1^{-s}\sum_{n_2\leqslant z} n_2^{-s}\sum_{n_3\leqslant z^\delta (n_1n_2)^{-1}} n_3^{-s} +$$
$$+ 1{,}03\sum_{n_1\leqslant z} n_1^{-s}\sum_{n_2\leqslant z^\delta n_1^{-1}} \tau(n_2)\, n_2^{-s}\Big] Mz^{-s} < 27{,}07M\ln^3 z \cdot z^{4\delta-1}$$

и полагаем $\delta = 0{,}025$.

ЛЕММА 8. *При условиях* (3)

$$\frac{5}{8}\delta^{-1}z^{4\delta}L(1,\ \chi)\,L_z(1,\chi\chi_1)\,L_z(1,\chi_1\chi_0) -$$
$$-\frac{5}{8}\varphi(s)\,L(s,\chi_1\chi_0)\,L_z(s,\chi)\,L_z(s,\chi\chi_1) > 1. \tag{5}$$

Доказательство. Подсчет показывает, что

$$\frac{\pi^2}{6} - |R_1| - |S_2| > \frac{8}{5}.$$

Из (2), (4) и леммы 6 следует (5).

§ 6

Введем новую сумму

$$T(\chi_1\chi_0) = \sum_{n_1n_2\leqslant z^4}\sum \frac{\chi_1\chi_0(n_1)}{(n_1n_2)^s}.$$

ЛЕММА 9. *При условиях* (3)

$$T(\chi_1\chi_0) = \delta^{-1}z^{4\delta}L_z(1,\ \chi_1\chi_0) - \varphi(s)\,L(s,\ \chi_1\chi_0) + R_2,$$

где $|R_2| < 0{,}001$.

Доказательство. При помощи лемм 1 и 2 получаем:

$$T(\chi_1\chi_0) = \sum_{n_1\leqslant z}\frac{\chi_1\chi_0(n_1)}{n_1^s}\sum_{n_2\leqslant z^4 n_1^{-1}}\frac{1}{n_2^s} + \sum_{n_2\leqslant z^3}\frac{1}{n_2^s}\sum_{z<n_1\leqslant z^4n_2^{-1}}\frac{\chi_1\chi_0(n_1)}{n_1^s} =$$
$$= \delta^{-1}z^{4\delta}L_z(1,\ \chi_1\chi_0) - \varphi(s)\,L_z(s,\ \chi_1\chi_0) + \theta z^{4\delta-1} +$$
$$+ \theta Mz^{-s}\sum_{n_2\leqslant z^3}\frac{1}{n_2^s} = \delta^{-1}z^{4\delta}L_z(1,\ \chi_1\chi_0) - \varphi(s)\,L(s,\ \chi_1\chi_0) +$$
$$+ \theta\Big(M^{\frac{5}{4}}\ln^2 M\cdot z^{-\frac{39}{40}} + z^{-\frac{29}{10}} + 9{,}6M\ln M\cdot z^{-\frac{9}{10}}\Big).$$

Оценивая остаток при условиях (3), получаем требуемую оценку.

ЛЕММА 10. *При условиях* (3)

$$0 < \delta^{-1}z^{4\delta}L_z(1,\ \chi_1\chi_0) - \varphi(s)\,L(s,\ \chi_1\chi_0) < 15{,}07\ln^2 M\cdot M^{13\delta}. \tag{6}$$

Доказательство. С другой стороны,

$$T(\chi_1\chi_0) = \sum_{n\leqslant z^4} g(n)n^{-s},$$

где $g(n^2)\geqslant 1$, $g(n)\geqslant 0$. Поэтому

$$T(\chi_1\chi_0) \geqslant \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Кроме того, при помощи лемм 1 и 2 получим оценку:

$$T(\chi_1\chi_0) \leqslant \sum_{n_2=1}^{z^4} \frac{1}{n_2^s} \left| \sum_{n_1 \leqslant z^4 n_2^{-1}} \frac{\chi_1\chi_0(n_1)}{n_1^s} \right| < 15{,}06 \ln^2 M \cdot M^{13\delta}.$$

Ввиду леммы 6, оценка (6) следует непосредственно из доказанных для $T(\chi_1\chi_0)$ оценок снизу и сверху.

§ 7

Переходим к доказательству теоремы. Пусть β_1 есть нуль функции $L(s, \chi_1)$ и, следовательно, $L(s, \chi_1\chi_0)$. Полагаем $1 - \beta_1 = \delta_1$. Пусть

$$M^{-\frac{1}{4}} \ln^{-2} M \leqslant \delta_1 < 0{,}025,$$

причем левая часть этого неравенства выполняется в силу теоремы Пейджа. Полагая в неравенствах (5) и (6) $s = \beta_1$, получаем:

$$\frac{5}{8} \delta_1^{-1} z^{4\delta_1} L(1, \chi) L_z(1, \chi\chi_1) L_z(1, \chi_1\chi_0) > 1, \tag{7}$$

$$0 < \delta_1^{-1} z^{4\delta_1} L_z(1, \chi_1\chi_0) < 15{,}07 \ln^2 M \cdot M^{13\delta_1}. \tag{8}$$

Умножая неравенство (7) на $15{,}07 \ln^2 M \cdot M^{13\delta_1}$ и сравнивая с неравенством (8), после упрощений приходим к неравенству

$$\frac{5}{8} \cdot 15{,}07 \ln^2 M \cdot M^{13\delta_1} L(1, \chi) L_z(1, \chi\chi_1) > 1.$$

Пусть $L(s, \chi)$ имеет нуль β такой, что $1 - \beta \leqslant 0{,}01 \ln^{-1} D$. Тогда, применяя лемму 2, b), c), получаем:

$$1 - \beta > 0{,}015 \ln^{-5} D \cdot D^{26\delta_1}. \tag{9}$$

Задаем $\varepsilon \in (0; 0{,}025]$. Если нет ни одной L-функции с нулем $\beta_1 \leqslant 1 - \varepsilon$, то теорема доказана. Если же есть такие нули, то, беря один из них, β_1, принадлежащий L-функции с наименьшим основным модулем, получаем неравенство (9) для остальных нулей, что доказывает теорему.

Поступило
31.X.1955

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 673–678

Ю. И. МАНИН

О СРАВНЕНИЯХ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит элементарное доказательство теоремы Хассе о числе решений сравнения третьей степени по простому модулю.

1. Пусть $p>3$ — простое число; k_p — поле вычетов $\bmod p$; $4a^3-27b^2\not\equiv 0$; N_p — число решений в k_p уравнения

$$y^2=x^3+ax+b, \tag{1}$$

т. е. число решений сравнения $y^2\equiv x^3+ax+b\,(\bmod p)$. Известно, что

$$|N_p-p|<2\sqrt{p}. \tag{2}$$

Эта оценка была доказана Хассе [1] при помощи созданного им аналога теории комплексного умножения эллиптических функций над конечным полем констант.

Настоящая работа излагает другое доказательство оценки (2), которое, будучи основано по существу на идеях Хассе, является, однако, совершенно элементарным.

Предварительно изложим некоторые сведения относительно решений уравнения (1), причем сказанное будет относиться к уравнениям такого вида в любом поле.

Пусть $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ — два решения (1). Им можно сопоставить некоторое третье решение (1) $(x_3,\ y_3)$, которое называется суммой первых двух: $(x_3,\ y_3)=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)$ и получается по формулам

$$\begin{cases} x_3=-x_1-x_2+\left(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2, \\ y_3=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\,(x_1-x_3)-y_1, \end{cases} \tag{3}$$

если $x_1\not\equiv x_2$, или

$$\begin{cases} x_3=-2x_1+\left(\dfrac{3x_1^2+a}{2y_1}\right)^2, \\ y_3=\dfrac{3x_1^2+a}{2y_1}\,(x_1-x_3)-y_1, \end{cases} \tag{3'}$$

если $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Непосредственными выкладками можно проверить, что $(x_3,\ y_3)$ действительно будет решением (1) вместе с $(x_1,\ y_1)$ и (x_2, y_2), а также, что справедливо утверждение:

если $(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_3,\ y_3)$, то $(x_1,\ y_1)=(x_3,\ y_3)+(x_2,\ -y_2)$, знание которого понадобится нам впоследствии.

Формулы (3) и (3′) допускают простую геометрическую интерпретацию: проведем через точки $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ секущую (а в случае их совпадения — касательную) к кривой (1); третья точка пересечения этой прямой с кривой (1) с измененным знаком второй координаты и будет

(x_3, y_3). Так определенное сложение является на самом деле групповой операцией на совокупности всех решений (1), пополненной несобственным решением, играющим роль нуля; мы, однако, пользоваться этим не будем, рассматривая лишь конечные решения.

2. Главным объектом изучения в нашей работе будет бесконечная в обе стороны последовательность пар рациональных функций от x $\{X_n, Y_n\}$ с коэффициентами из k_p. Она строится индуктивно следующим образом.

Полагаем

$$X_0 = x^p, \quad Y_0 = (x^3 + ax + b)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Если X_n, Y_n уже найдены, то строим X_{n+1}, Y_{n+1} по формулам

$$\begin{cases} X_{n+1} = -x - X_n + \dfrac{(1 - Y_n)^2}{(x - X_n)^2}(x^3 + ax + b), \\ Y_{n+1} = \dfrac{1 - Y_n}{x - X_n}(x - X_{n+1}) - 1 \end{cases}$$

при $n > 0$ и $(X_n, Y_n) \neq (x, \pm 1)$,

$$\begin{cases} X_{n+1} = -2x + \dfrac{(3x^2 + a)^2}{4(x^3 + ax + b)}, \\ Y_{n+1} = \dfrac{3x^2 + a}{2(x^3 + ax + b)}(x - X_{n+1}) - 1 \end{cases}$$

при $n > 0$ и $(X_n, Y_n) = (x, 1)$.

Аналогично,

$$\begin{cases} X_{n-1} = -x - X_n + \dfrac{(1 + Y_n)^2}{(x - X_n)^2}(x^3 + ax + b), \\ Y_{n-1} = \dfrac{1 + Y_n}{x - X_n}(x - X_{n-1}) + 1 \end{cases}$$

при $n < 0$ и $(X_n, Y_n) \neq (x, \pm 1)$

$$\begin{cases} X_{n-1} = -2x + \dfrac{(3x^2 + a)^2}{4(x^3 + ax + b)}, \\ Y_{n-1} = -\dfrac{3x^2 + a}{2(x^3 + ax + b)}(x - X_{n-1}) + 1 \end{cases}$$

при $n < 0$ и $(X_n, Y_n) = (x, -1)$.

Если же в процессе построения мы придем к паре $X_n = x$, $Y_n = -1$ для $n > 0$ или $X_n = x$, $Y_n = 1$ для $n < 0$, то выписанные формулы неприменимы; тогда очередное место в последовательности оставляем пустым, а на следующее ставим пару $(x, 1)$ для $n > 0$ или $(x, -1)$ для $n < 0$, после чего продолжаем построение последовательности по одной из выписанных формул до очередного пробела.

Смысл и внутреннее единство построенной так последовательности выясняют формулы (3) и (3′). Именно, для любого n функции X_n, Y_n удовлетворяют равенству

$$\frac{X_n^3 + aX_n + b}{x^3 + ax + b} = Y_n^2; \tag{4}$$

при этом для всех n, для которых (X_n, Y_n) и (X_{n+1}, Y_{n+1}) определены, пара (X_{n+1}, Y_{n+1}) получается из (X_n, Y_n) операцией, соответствую-

щей прибавлению $(x, 1)$ к (X_n, Y_n), и, обратно, (X_n, Y_n) получается из (X_{n+1}, Y_{n+1}) прибавлением $(x, -1)$. Пробелы в последовательности стоят на тех местах, где должна была бы находиться несобственная пара.

Относительно X_n заметим следующее: *для всех n, для которых функция X_n определена, степень числителя X_n как многочлена от x больше степени ее знаменателя.*

Покажем это, формально найдя значение X_n в точке $x = \infty$. Пусть m есть нуль или первый номер после очередного пробела, $m \geqslant 0$. По построению, $X_m|_\infty = \infty$, $Y_m|_\infty \neq 0$. Предполагая, что эти соотношения справедливы для некоторого индекса n, вслед за которым идет не пробел, докажем, что они выполнены для индекса $n+1$; этого достаточно для справедливости утверждения о степенях числителя и знаменателя X_{n+1}. Как показывает (4), достаточно доказать лишь, что $Y_{n+1}|_\infty \neq 0$. Допустим обратное; применяя первую из выписанных четырех пар формул, задающих последовательность, получим:

$$\frac{1-Y_n}{x-X_n}(x-X_{n+1})|_\infty = 1, \quad \text{или} \quad \left.\frac{1-Y_n}{\frac{x}{x-X_{n+1}}-\frac{X_n}{x-X_{n+1}}}\right|_\infty = 1.$$

Далее, ввиду того, что дробь $\dfrac{X_{n+1}^3 + aX_{n+1} + b}{x^3 + ax + b}$ должна быть квадратом, разность степеней числителя и знаменателя X_{n+1} должна быть числом нечетным, что вместе с $Y_{n+1}|_\infty = 0$ дает $X_{n+1}|_\infty = 0$. Поэтому

$$\left.\frac{1-Y_n}{1-\frac{X_n}{x}}\right|_\infty = 1,$$

т. е.

$$\left.\frac{Y_n x}{X_n}\right|_\infty = 1, \quad \left.\frac{Y_n^2 x^2}{X_n^2}\right|_\infty = \left.\frac{(X_n^3 + aX_n + b)x^2}{X_n^2}\right|_\infty = 1,$$

а это противоречит тому, что $X_n|_\infty = \infty$.

Совершенно аналогично проходит доказательство при других комбинациях знака n и положения ближайшего пробела, когда приходится применять остальные из определяющих формул.

Рассмотрим бесконечную в обе стороны последовательность неотрицательных целых чисел $\{d_n\}$:

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{если } X_n \text{ не определена,} \\ \text{степени числителя } X_n & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Центральным моментом доказательства оценки (2) является

ОСНОВНАЯ ЛЕММА.

$$d_{n-1} + d_{n+1} = 2d_n + 2.$$

Прежде чем доказывать эту лемму, покажем, как из нее выводится оценка (2).

ЛЕММА 1.

$$d_n = n^2 - (d_{-1} - d_0 - 1)n + d_0.$$

Доказательство. По основной лемме, $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n + 2$.

Очевидно, для $n=-1$ и $n=0$ лемма верна; пусть она верна для n и $n+1$, $n\geqslant 0$, тогда

$$d_{n+2}=2d_{n+1}-d_n+2=$$
$$=2[(n+1)^2-(d_{-1}-d_0-1)(n+1)+d_0]-n^2+(d_{-1}-d_0-1)n-$$
$$-d_0+2=(n+2)^2-(d_{-1}-d_0-1)(n+2)+d_0.$$

Аналогично проходит индукция для $n<0$.

ЛЕММА 2.

$$d_{-1}-d_0-1=N_p-p.$$

Доказательство. По построению, $d_0=p$. Имеем:

$$X_{-1}=-x-x^p+\frac{\left[1+(x^3+ax+b)^{\frac{p-1}{2}}\right]^2(x^3+ax+b)}{(x-x^p)^2}.$$

Заметим, что степень числителя X_{-1} на единицу больше степени знаменателя; в самом деле, как легко видеть,

$$X_{-1}=\frac{x^{2p+1}+R(x)}{(x-x^p)^2},$$

где $R(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $2p$.

Вычислим степень знаменателя X_{-1} по проведении необходимых сокращений. С одной стороны, $(x-x^p)^2=[x(x-1)\ldots(x-p+1)]^2$, с другой стороны, как известно, в k_p

$$(x^3+ax+b)^{\frac{p-1}{2}}=\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right).$$

Поэтому при сокращении из знаменателя выпадут лишь множители вида $(x-k)^2$ с $\left(\frac{k^3+ak+b}{p}\right)=-1$ и множители вида $(x-l)$ с $l^3+al+b=0$. Пусть m — число множителей первого, а n — второго вида. Тогда $d_{-1}=2p-2m-n+1$, $d_{-1}-d_0-1=p-2m-n$.

Число же $N_p=2(p-m)-n$, потому что каждому k с $\left(\frac{k^3+ak+b}{p}\right)=1$ соответствуют два решения (1), а каждому k с $\left(\frac{k^3+ak+b}{p}\right)=0$ соответствует лишь одно решение $(k, 0)$. Это доказывает требуемое.

ТЕОРЕМА.

$$|N_p-p|<2\sqrt{p}.$$

Доказательство. По леммам 1 и 2, $d_n=n^2-(N_p-p)n+p$. Написанный квадратный трехчлен принимает для всех целых n неотрицательные значения, причем, по построению d_n, он не может иметь двух последовательных целых нулей. Покажем, что дискриминант трехчлена не положителен. В самом деле, иначе трехчлен имел бы два корня α и β в промежутке между двумя последовательными целыми числами: $n\leqslant\alpha<\beta\leqslant n+1$, причем оба знака равенства одновременно невозможны; а тогда, α,β и $\alpha+\beta$ не могли бы быть одновременно целыми. Следовательно,

$$(N_p-p)^2-4p\leqslant 0,\quad |N_p-p|<2\sqrt{p}.$$

3. Приступим к доказательству основной леммы.

Будем различать два случая:

а) Не все функции X_{n-1}, X_n, X_{n+1} определены. Ясно, что из последовательной тройки функций может не быть определена лишь одна. Если это — средняя функция X_n, то

$$X_{n-1}=x,\quad X_{n+1}=x,\quad d_{n-1}=1,\quad d_n=0,\quad d_{n+1}=1,$$

что удовлетворяет доказываемому равенству. Если же не определена

одна из крайних функций, скажем X_{n-1}, то

$$X_n = x, \quad X_{n+1} = \frac{(x^2-a)^2 - 8bx}{4(x^3+ax+b)},$$

т. е. $d_n = 1$, $d_{n+1} = 4$, что вместе с $d_{n-1} = 0$ снова дает утверждение леммы.

б) Все функции X_{n-1}, X_n, X_{n+1} определены. Обозначим

$$X_{n-1} = \frac{A}{B}, \quad X_n = \frac{P}{Q}, \quad X_{n+1} = \frac{C}{D},$$

где A, B, C, D, P, Q — многочлены от x, задающие X_i как несократимые дроби. Вместо слова «степень» будем писать сокращенно ст; тогда, по определению, $d_{n-1} = \text{ст } A$, $d_n = \text{ст } P$, $d_{n+1} = \text{ст } C$.

Выразим X_{n-1} и X_{n+1} через X_n по задающим формулам:

$$X_{n-1} = \frac{-(Qx+P)(Qx-P)^2 + (1+Y_n)^2(x^3+ax+b)Q^3}{Q(Qx-P)^2} = \frac{A'}{Q(Qx-P)^2}, \quad (5)$$

$$X_{n+1} = \frac{-(Qx+P)(Qx-P)^2 + (1-Y_n)^2(x^3+ax+b)Q^3}{Q(Qx-P)^2} = \frac{C'}{Q(Qx-P)^2}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что A' и C' — многочлены.

Перемножив почленно (5) и (6), после легких, но несколько громоздких преобразований получим:

$$X_{n-1}X_{n+1} = \frac{(Px-aQ)^2 - 4bQ(Qx+P)}{(Qx-P)^2}. \quad (7)$$

Идея последующих рассуждений — показать, что произведение знаменателей X_{n-1} и X_{n+1}

$$BD = (Qx-P)^2; \quad (8)$$

тогда (7) даст:

$$AC = (Px-aQ)^2 - 4bQ(Qx+P).$$

Но степень многочлена, стоящего справа, равна $2\,\text{ст } P + 2$, так как ст $P >$ ст Q; поэтому $d_{n-1} + d_{n+1} = \text{ст } A + \text{ст } C = \text{ст } AC = 2\text{ст } P + 2 = 2d_n + 2$.

Остается доказать (8). Из (5) и (6) следует, что корни BD суть корни $(Qx-P)^2$. В самом деле, согласно (4),

$$(1+2Y_n)(x^3+ax+b)Q^3 \equiv 0 \pmod{Q},$$

и, заменяя Y_n^2 в выражении для A' и C' его значением по формуле (4), мы получим, что

$$A' \equiv C' \equiv 0 \pmod{Q}.$$

Формула (7) показывает, что

$$A'C' \equiv 0 \pmod{(Qx-P)^2}. \quad (9)$$

Разобьем все корни многочлена $(Qx-P)^2$ на три группы:

1) группа корней, в которых $A' \neq 0$, $C' = 0$. По (5) и (9), эти корни войдут со своими кратностями в совокупность корней B, но вовсе не будут корнями D.

2) Группа корней, в которых $A' = 0$, $C' \neq 0$. По (6) и (9), эти корни войдут со своими кратностями в совокупность корней D, но вовсе не будут корнями B.

3) Группа корней, в которых $A' = 0$ и $C' = 0$. Формулы (5) и (6) показывают, что если x_0 — такой корень, то $x_0^3 + ax_0 + b = 0$.

Если $Y_n(x_0) \neq \pm 1$, то x_0 является однократным корнем A' и C' (так как дискриминант $4a^3 - 27b^2 \neq 0$), т. е., по (9), точно двукратным корнем $(Qx - P)^2$. Из (5) и (6) следует тогда, что x_0 есть однократный корень B и однократный корень D, т. е. двукратный корень BD.

Если $Y_n(x_0) = -1$, то кратность x_0 в C' равна единице, а в A' — наименьшей из кратностей x_0 в $(Qx - P)^2$ и $(1 + Y_n)^2(x^3 + ax + b)$; пусть первая из них будет $2l$, вторая $2k + 1$. Очевидно, $2k$ есть также кратность x_0 в $(1 + Y_n)^2(1 - Y_n)^2 = (1 - Y_n^2)^2$, но

$$(1 - Y_n^2)^2 = \frac{(x^3 + ax - X_n^3 - aX_n)^2}{(x^3 + ax + b)^2} = \frac{(x - X_n)^2(x^2 + xX_n + X_n^2 + a)}{(x^3 + ax + b)^2}.$$

Кроме того, $(Qx - P)|_{x_0} = Q(x - X_n)|_{x_0} = 0$, поэтому

$$x_0 = X_n(x_0), \quad x_0^2 + x_0 X_n(x_0) + X_n^2(x_0) + a \neq 0,$$

значит, $2k = 2l - 2$ и кратность x_0 в A' равна $2l - 1$. Следовательно, кратность x_0 в B равна 1, а в D равна $2l - 1$, т. е. в BD кратность x_0 равна $2l$.

Аналогично разбирается случай, когда $Y_n(x_0) = 1$. 1), 2) и 3) доказывают (7), чем завершается доказательство основной леммы и неравенство (2).

4. Известно, что при естественных условиях невырожденности к уравнению (1) бирационально приводятся уравнения вида

$$y^2 = f_4(x), \quad F_3(x, y) = 0,$$

где $f_4(x)$ — многочлен четвертой степени, $F_3(x, y)$ — многочлен третьей степени относительно каждого из неизвестных. Поэтому доказанное неравенство справедливо и для них.

Легко видеть [см., например, Хассе (2), стр. 159], что

$$N_p = p + \sum_{x \in k_p} \left(\frac{x^3 + ax + b}{p} \right),$$

поэтому наше неравенство равносильно такому:

$$\left| \sum_{x \in k_p} \left(\frac{f_4(x)}{p} \right) \right| < 2\sqrt{p}.$$

Частный случай его

$$\left| \sum_{x \in k_p} \left(\frac{(x - a)(x - b)}{(x - c)(x - d)} \right) \right| < 2\sqrt{p}$$

— оценка, нужная для некоторых теоретико-числовых рассмотрений и получаемая, таким образом, элементарно.

Заметим, что, дословно повторяя приведенные рассуждения, можно получить неравенство для числа N_q решений (1) в любом конечном поле с числом элементов q: $|N_q - q| \leqslant 2\sqrt{q}$.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу за многие ценные советы и замечания, использованные мною при написании этой работы.

Поступило
1. XI. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hasse H., Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper, Journ. für die reine und angew. Mathem., Bd. 175 (1936), 55—62, 69—88, 193—208.

[2] Хассе Г., Лекции по теории чисел. Москва. 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 679—684

Ю. М. СМИРНОВ

О МЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ В СМЫСЛЕ П. С. АЛЕКСАНДРОВА

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

Для метрической размерности выводится неравенство П. С. Урысона (1) $\delta m(A \cup B) \leqslant \delta mA + \delta mB + 1$ и доказывается аналог теоремы Л. А. Тумаркина (2) о существовании для каждого множества $A \subset E^n$ объемлющего множества типа G_δ (в E^n) той же метрической размерности.

Метрической размерностью в смысле П. С. Александрова данного точечного * множества M назовем такое наименьшее целое число $r \geqslant 0$, для которого существует сколь угодно малый ε-сдвиг множества M в локально-конечный полиэдр ** размерности r. Таким образом определенный метрический инвариант множества M обозначим через δmM.

Еще в 1926 г. П. С. Александровым была доказана так называемая теорема об ε-сдвигах (3), составившая основу развития теории размерности за последние три десятилетия. Эта теорема утверждает, что *размерность любого компакта совпадает с его метрической размерностью*. В общем случае имеет место лишь неравенство $\dim M \geqslant \delta mM$. Отвечая на вопрос, поставленный П. С. Александровым еще в 1935 г., К. Ситников (4) недавно построил в E^3 такое двумерное множество, для которого метрическая размерность равна единице. С другой стороны, весьма сложным косвенным способом им же было показано, что для r-мерных множеств, имеющих r-мерное замыкание (в том же E^n), так же как и для компактов, справедливо равенство $\dim M = \delta mM$. Отсюда и из известной теоремы Гуревича (5), утверждающей, что всякое точечное множество можно гомеоморфно вложить в компакт той же размерности, вытекает, что метрическая размерность, вообще говоря, не представляет собой топологического инварианта. В то же время можно доказать, что она является инвариантом относительно взаимно равномерно непрерывных отображений.

---

* Под точечным множеством здесь всюду понимается любое множество, лежащее в эвклидовом пространстве E^n произвольного числа измерений n.

** Под полиэдром здесь понимается любое множество M, лежащее в каком-нибудь эвклидовом или же гильбертовом пространстве, могущее быть представленным в виде суммы (вообще говоря, бесконечной) локально-конечной в M системы симплексов; при этом система множеств A_λ какого-либо топологического пространства R называется локально-конечной в R, если у каждой точки пространства R имеется окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств A_λ данной системы. Любое открытое множество каждого эвклидова пространства является полиэдром в только что указанном смысле.

Особенно легко это получить с помощью следующего эквивалентного * определения, основанного на покрытиях и в силу этого пригодного для любых метрических пространств:

Метрической размерностью метрического пространства M называется наименьшее из таких целых чисел $r \geqslant 0$, что для любого положительного числа ε существует открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$, каждый элемент которого имеет диаметр $< \varepsilon$.

В силу теоремы Стона ([6]) о паракомпактности метрических пространств, в данном определении вместо любых открытых покрытий можно брать лишь локально-конечные открытые покрытия **. Заметим еще, что для метрических пространств со счетной базой справедливо и более сильное утверждение, а именно: в каждое открытое покрытие такого пространства можно вписать звездно-конечное *** открытое покрытие [см. ([7]), ([9])] (сильная паракомпактность). Поэтому для метрических пространств со счетной базой в последнем определении можно любые открытые покрытия заменить звездно-конечными открытыми покрытиями (следствие 1 из теоремы 1).

В настоящей работе делаются первые шаги по изучению метрической размерности: выводится неравенство П. С. Урысона и доказывается аналог одной теоремы Л. А. Тумаркина.

ТЕОРЕМА 1. *В любое открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$ всякого метрического пространства M со счетной базой **** можно вписать счетное звездно-конечное открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$.*

Доказательство. Прежде всего, в силу замечания ко второму определению метрической размерности, будем с самого начала считать, что данное открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$ — локально-конечное. В силу наличия в пространстве M счетной базы, из данного покрытия можно выбрать счетное или конечное подпокрытие

$$\gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots\}.$$

---

* Среди топологов, занимающихся теорией размерности, эквивалентность данных двух определений метрической размерности считается известной, однако доказательства я нигде не нашел и поэтому позволил себе привести в этой работе свое доказательство.

** В самом деле, пусть γ — открытое покрытие метрического пространства M кратности $\leqslant r+1$, каждый элемент которого имеет диаметр $< \varepsilon$. Впишем в него локально-конечное открытое покрытие ω. Занумеруем элементы покрытия γ порядковыми числами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha, \ldots$. Теперь «укрупним» покрытие ω следующим известным способом. Пусть U_1 есть сумма всех элементов покрытия ω, содержащихся в Γ_1, U_2 — сумма всех остальных элементов покрытия ω, содержащихся в Γ_2, U_3 — сумма всех оставшихся элементов покрытия ω, содержащихся в Γ_3, и т. д. В результате получим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ той же кратности и «мелкости», что и γ. Нетрудно проверить, что оно локально-конечно.

*** Система подмножеств A_λ множества A называется звездно-конечной, если каждый ее элемент пересекается лишь с конечным числом других элементов той же системы.

**** Вместо наличия счетной базы можно потребовать, чтобы само данное покрытие было счетным.

Нерв этого покрытия можно реализовать в гильбертовом пространстве E^∞ следующим образом: каждому элементу Γ_n поставим в соответствие точку $e_n \in E^\infty$, у которой все координаты — нули, кроме n-й координаты, равной единице. Натянув на эти вершины симплексы, соответствующие непустым пересечениям элементов Γ_n, мы получим n-мерный комплекс K, тело $\tilde{K}$ которого также имеет размерность n *. Отобразим барицентрически пространство M в полиэдр $\tilde{K}$: рассмотрим непрерывные функции

$$\rho_n(x) = \rho(x, M \setminus \Gamma_n);$$

в силу локальной конечности покрытия γ, нормирующая функция

$$\rho(x) = \sum_n \rho_n(x)$$

также будет непрерывной и притом положительной функцией. Стало быть, и функции

$$\xi_n(x) = \frac{\rho_n(x)}{\rho(x)}$$

непрерывны. Следовательно, отображение ξ, относящее каждой точке $x \in M$ точку $\xi(x) = \{\xi_n(x)\}$ гильбертова пространства (в силу локальной конечности покрытия γ, отличных от нуля координат у каждой точки $\xi(x)$ — конечное число), также будет непрерывным отображением пространства M в тело комплекса K (вложение $\xi(M) \subset \tilde{K}$ следует из того что, в силу нормировки, точка $\xi(x)$ будет лежать как раз в том симплексе, вершины которого соответствуют положительным значениям функций ρ_n в точке x).

Так как $\tilde{K}$ — пространство со счетной базой, то, как мы уже указывали, в покрытие, состоящее из открытых звезд вершин комплекса K, можно вписать звездно-конечное открытое покрытие β. Так как $\dim \tilde{K} \leqslant r$, то в β можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$. «Укрупнив» его по отношению β тем же самым способом, какой был приведен в сноске ** на стр. 680, мы получим звездно-конечное (так как звездно-конечно и β) открытое покрытие ω полиедра $\tilde{K}$ кратности $\leqslant r+1$, вместе с покрытием β вписанное в покрытие, состоящее из открытых звезд вершин полиэдра $\tilde{K}$. Теперь остается заметить, что полный прообраз звезды $\tilde{O}e_n$ вершины e_n при отображении ξ, в силу специального выбора функций $\rho_n(x)$, равен соответствующему элементу $\Gamma_n \in \gamma$. Значит, полные прообразы элементов покрытия ω при том же отображении ξ составляют открытое звездно-конечное покрытие пространства M кратности $\leqslant r+1$, вписанное в γ. Так как M имеет счетную базу, то из полученного покрытия можно выбрать счетное подпокрытие; оно и будет искомым. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для метрических пространств со счетной базой во втором определении метрической размерности вместо любых открытых покрытий можно брать счетные звездно-конечные открытые покрытия.*

* Так утверждает теорема Даукера ([8]); однако в нашем случае при помощи теоремы суммы можно обойтись и без нее: надо только заметить, что комплекс K состоит из счетного числа симплексов.

Следствие 2. *Оба данных определения метрической размерности для точечных множеств эквивалентны.*

Доказательство. Допустим сначала, что $M \subseteq E^n$ можно сколь угодно малым сдвигом перевести в r-мерный локально-конечный полиэдр. Возьмем тогда для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ какой-нибудь $\frac{\varepsilon}{3}$-сдвиг f в некоторый полиэдр $\tilde{K}$ размерности r (вместо $\tilde{K}$ можно взять любое множество размерности r). В силу теоремы Даукера ([8]), существует локально-конечное открытое покрытие γ множества $\tilde{K}$ кратности $\leqslant r+1$ и «мелкости» $\frac{\varepsilon}{3}$. Полные прообразы элементов покрытия γ при отображении f и дадут нам открытое (даже локально-конечное) ε-покрыти множества M кратности $\leqslant r+1$. Обратно, пусть точечное множество M имеет сколь угодно мелкие открытые покрытия кратности $\leqslant r+1$. Тогда, в силу следствия 1, для любого $\varepsilon > 0$ существует и счетное звездно-конечное открытое покрытие γ' множества M кратности $\leqslant r+1$, каждый элемент которого имеет диаметр $< \frac{\varepsilon}{4}$. В каждом Γ'_k выбираем произвольно по точке e'_k, а потом сдвигаем каждую из них менее чем на $\frac{\varepsilon}{4}$ в точку $e_k \in E^n$* так, чтобы все они попали в общее положение. Далее, умножаем E^n на прямую E и переносим каждую вершину e_k параллельно прямой E в одну и ту же сторону от E^n на расстояние $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{4}$. После этого на каждый остов, соответствующий непустому пересечению элементов Γ'_k покрытия γ', натягиваем симплекс и получаем таким образом нерв K покрытия γ'. Полиэдр $\tilde{K}$ будет локально-конечным, так как в каждом слое $O_{\alpha_k}E^n$, т. е. в каждой α_k-окрестности множества E^n в E^{1+n}, где $\alpha_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{4}$, находится конечное число вершин, и, стало быть, каждый такой слой пересекается лишь с конечным числом симплексов, потому что в силу звездной конечности покрытия γ' каждая вершина нерва K принадлежит конечному числу симплексов. Так как кратность покрытия γ' равна самое большее $n+1$, то размерность полиэдра $\tilde{K}$ не превосходит n. Произведя барицентрическое отображение множества M в полиэдр $\tilde{K}$, мы и получим, как легко подсчитать, искомый ε-сдвиг. Следствие 2 доказано.

Прежде чем переходить к основным теоремам, заметим, что было бы интересно выяснить, можно ли в первом определении метрической размерности аппроксимирующее множество M полиэдра брать в том же E^n, в котором рассматривается и само M. Кроме того, не мешало бы узнать, можно ли в применении к ограниченным точечным множествам ограничиться в первом определении лишь конечными (компактными) полиэдрами.

ТЕОРЕМА 2. *Если метрическое пространство* $M = A \cup B$, *то* $\delta mM \leqslant \delta mA + \delta mB + 1$.

---

* Считаем, что $n \geqslant 2r+1$. В противном случае погружаем E^n (вместе с лежащим в нем множеством M) в качестве подпространства в E^{2r+1}, вблизи которого и будет происходить далее описываемая реализация искомого полиэдра, и полагаем $n = 2r+1$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого множества A метрического пространства M существует такое множество $H \subseteq M$ типа G_δ, что $A \subseteq H$ и $\delta m H = \delta m A$.*

Доказательство обеих теорем будем проводить одновременно.

Доказательство. Прежде всего заметим, что метрическая размерность δm обладает свойством монотонности:

$$\text{если } A \subseteq H, \text{ то и } \delta m A \leqslant \delta m H.$$

Поэтому теорему 2 достаточно доказать лишь для того случая, когда множества A и B не пересекаются. Пусть $\delta m A = m$, а $\delta m B = n$ (случай, когда одна из этих размерностей бесконечна — тривиален). Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\delta m A = m$, то существует открытое покрытие γ' множества A кратности $\leqslant m+1$, у которого диаметр каждого элемента $\Gamma' \in \gamma'$ меньше, чем ε. Это покрытие точечно конечно*. По лемме 4 работы ([9]), его можно продолжить** в точечно-конечное покрытие γ некоторой окрестности OA множества A, подобное покрытию γ'. Конструкция этого продолжения состоит в том, что сначала для каждой точки $x \in A$ определяется некоторое положительное число

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \min_{x \in \Gamma'} \rho(x, A \setminus \Gamma')$$

(эта величина всегда имеет смысл, так как в силу точечной конечности покрытия γ' точка $x \in A$ принадлежит лишь конечному числу множеств $\Gamma' \in \gamma'$). После этого для каждого множества $\Gamma' \in \gamma'$ строится «продолжение» — открытое во всем M множество

$$\Gamma = \bigcup_{x \in \Gamma'} Ox,$$

где Ox есть $\alpha(x)$-окрестность точки x во всем M. Множества Γ и составляют искомое подобное продолжение γ покрытия γ'. Заметим, что если в этом построении величину $\alpha(x)$ заменить какой-либо меньшей величиной, то от этого каждое из множеств Γ может только уменьшиться. Следовательно, мы снова получим подобное продолжение покрытия γ'.

Для достижения нашей цели удобно заменить величину $\alpha(x)$ величиной

$$\beta(x) = \frac{1}{4} \min_{x \in \Gamma'} \sup_{O_\varepsilon x \subseteq \Gamma'} \operatorname{diam} O_\varepsilon x.$$

Так как для каждого $x \in \Gamma'$ и каждого $\varepsilon > 0$ такого, что $O_\varepsilon x \subseteq \Gamma'$, имеет место неравенство

$$\operatorname{diam} O_\varepsilon x \leqslant 2\varepsilon \leqslant 2\rho(x, A \setminus \Gamma'),$$

а стало быть, и неравенство

$$\sup_{O_\varepsilon x \subseteq \Gamma'} \operatorname{diam} O_\varepsilon x \leqslant 2\rho(x, A \setminus \Gamma'),$$

---

* Т. е. каждая точка $x \in A$ принадлежит конечному числу элементов $\Gamma' \in \gamma'$.

** Пусть в топологическом пространстве R дано множество M и система γ' открытых в M подмножеств Γ'_λ; продолжить систему γ' означает так подобрать к каждому Γ'_λ открытое во всем R множество Γ_λ, что $\Gamma_\lambda \cap M = \Gamma'_\lambda$. Система γ так подобранных множеств Γ_λ называется продолжением системы γ'.

то выполняется и неравенство $\beta(x) \leqslant \alpha(x)$. На основании этого можно оценить и диаметр каждого элемента Γ, получающегося при указанном продолжении покрытия γ: так как диаметр каждого множества Γ' меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, то и

$$\sup_{O_\varepsilon x \subseteq \Gamma'} \operatorname{diam} O_\varepsilon x \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а поэтому и диаметр соответствующего множества Γ будет меньше, чем ε. Таким образом построено открытое покрытие γ некоторой окрестности $OA = \bigcup_{\Gamma \in \gamma} \Gamma$ множества A кратности $\leqslant m+1$ и «мелкости» ε.

Прервем временно излагаемое доказательство теоремы 2 и при помощи полученного факта докажем теорему 3. Для произвольного множества $A \subseteq M$ метрической размерности $\delta m A = m < \infty$ (если $\delta m A = \infty$, то за искомое множество типа G_δ можно взять хотя бы все M) и для каждого натурального числа k, в силу доказанного, существует открытое покрытие γ_k некоторой окрестности $O_k A$ множества A кратности $\leqslant m+1$ и «мелкости» $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Множество $H = \bigcap_k O_k A$ и будет искомым: $\delta m H = \delta m A$. Теорема 3 доказана.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 2. Дословно повторяя только что приведенное для множества A построение, можно получить открытое покрытие $\tilde{\gamma}$ некоторой окрестности OB множества B кратности $\leqslant n+1$ и той же «мелкости» ε. Объединив эти покрытия в одно, т. е. взяв теоретико-множественную сумму $\gamma \cup \tilde{\gamma}$, получим открытое покрытие всего пространства M надлежащей кратности $\leqslant m+n+2$ и надлежащей мелкости ε. Теорема 2 доказана.

Поступило
22. VII. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.—Л., 1951.

Тумаркин Л. А., Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, Math. Ann., t. 98 (1925), 640—656.

[3] Александров П. С., Gestalt und Lage, Ann. of Math., t. 30 (1929), 101—187.

[4] Ситников К. А., Пример двумерного множества в трехмерном пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая характеристика размерности множеств в эвклидовых пространствах, Доклады Ак. наук СССР, т. 88, № 1 (1953), 21—24.

[5] Hurewicz W., Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Acad. Amsterdam, 30 (1927), 425.

[6] Stone A. H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., t. 54, № 10 (1948), 977—982.

[7] Dowker C. H., Mapping theorems for non-compact spaces, Amer. J. Math., t. 69, № 2 (1947), 200—242.

[8] Kaplan S., Homology properties of arbitrary subsets of euclidian spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 248—271.

[9] Смирнов Ю. М., О сильно паракомпактных пространствах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 253—274.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 685—706

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ЦИКЛЫ ЧЕРНА КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе вычислены циклы Черна комплексных алгебраических многообразий. В полученных формулах циклы Черна выражаются через проективные инварианты многообразия.

Введение

1°. Циклы Черна компактных аналитических многообразий рассматривались впервые Черном в работе (1). Эти циклы играют важную роль при изучении топологической и аналитической структуры многообразия, поэтому задача вычисления циклов Черна для возможно более широкого класса комплексных аналитических многообразий не лишена интереса.

Эта задача решена мною для комплексных алгебраических многообразий [см. (2)]. В полученных формулах циклы Черна алгебраического многообразия выражены через довольно простые и легко обозримые проективные инварианты многообразия.

В настоящей работе дается подробное изложение результатов работы (2).

2°. Под комплексным алгебраическим многообразием M в работе понимается такое алгебраическое многообразие комплексного проективного пространства P, которое может быть представлено как регулярный (т. е. локально-гомеоморфный и аналитический) образ некоторого абстрактного компактного комплексно-аналитического многообразия N; само многообразие N также будет называться алгебраическим.

Это сужение класса комплексных алгебраических многообразий необходимо для того, чтобы через каждую точку $z \in M \subset P$ можно было провести единственное касательное к M подпространство пространства P; при этом не исключаются и точки самопересечения многообразия M, так как им приписывается необходимая кратность, определяемая локально-гомеоморфным отображением. Следовательно, для любого алгебраического многообразия можно строить тангенциальное косое произведение и тем самым определить циклы Черна этого многообразия.

В дальнейшем произвольные алгебраические многообразия, задаваемые в проективном пространстве системой алгебраических уравнений, будут называться комплексными алгебраическими псевдомногообразиями. Размерность множества особых точек такого псевдомногообразия хотя бы на

две единицы меньше размерности самого псевдомногообразия. Следовательно, задавая на псевдомногообразии ориентацию, определяемую комплексно-аналитической структурой, мы превращаем его в пикл *.

§ 1. Краткое изложение содержания работы

1°. Пусть M^k — комплексное алгебраическое многообразие комплексной размерности k, лежащее в n-мерном комплексном проективном пространстве P^n (см. введение, п° 2).

Наряду с P^n рассмотрим многообразие P_k^n всевозможных пар (z, P^k), где $z \in P^n$ а k-мерное подпространство $P^k \subset P^n$ содержит точку $z : P^k \ni z$; очевидно что P_k^n является комплексным алгебраическим многообразием.

Вложение $M^k \subset P^n$ определяет комплексное алгебраическое многообразие $N^k \subset P_k^n$ всевозможных пар (z, P_z^k), где $z \in M^k$, а подпространство P_z^k касается многообразия M^k в точке z. Между многообразиями M^k и N^k существует естественный аналитический гомеоморфизм $\varphi : N^k \to M^k$, отображающий точку $(z, P_z^k) \in N^k$ в точку $z \in M^k$. Поэтому задача вычисления циклов ** Черна алгебраического многообразия M^k эквивалентна такой же задаче для многообразия N^k.

2°. Для вычисления циклов Черна многообразия N^k излагаемым методом необходимо знание баз гомологий некоторых размерностей многообразия P_k^n.

Именно, необходимо знание баз гомологий размерностей $\leqslant 2k$, а также некоторых циклов из баз гомологий дополнительных размерностей. Они вычислены в § 2,3 методом Л. С. Понтрягина ([3]).

Оказывается, что комплексное многообразие P_k^n не имеет кручений и все его нечетномерные группы гомологий тривиальны. Базу $2s$-мерных гомологий при $s \leqslant k$ обозначим через $\{X_i^s\}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$; дуальную к ней базу $(2r - 2s)$-мерных гомологий, где $2r$ — размерность многообразия P_k^n, обозначим через $\{Y_j^{r-s}\}$, $j = 1, \ldots, \alpha_s$. Циклы X_i^s и часть циклов Y_j^{r-s} будут реализованы в P_k^n в виде комплексных алгебраических псевдомногообразий (теоремы 2.1, 3.1, 3.2) (мы говорим лишь о части циклов Y_j^{r-s}, так как в работе рассмотрены не все циклы Y_j^{r-s}).

3°. Построим ряд косых произведений, необходимых для дальнейшего.

В проективном пространстве P^n зафиксируем систему однородных координат и все построения, приведенные ниже и использующие координаты, будем проводить в этой системе.

Каждой точке $z = (z^0, \ldots, z^n)$ поставим в соответствие аффинную часть E_z^n пространства P^n, полученную из P^n удалением $(n-1)$-мерного подпространства, уравнение которого имеет вид:

$$\overline{z^0} w^0 + \overline{z^1} w^1 + \ldots + \overline{z^n} w^n = 0, \tag{1.1}$$

* На протяжении всей работы под размерностью будет подразумеваться топологическая размерность. Комплексная размерность алгебраических псевдомногообразий будет каждый раз особо оговариваться. Исключение составят комплексные проективные пространства, комплексная размерность которых будет называться просто размерностью; размерность проективного пространства будет обозначаться верхним индексом.

** Для удобства мы говорим о циклах, а не о классах гомологий.

где $\overline{z^i}$ — комплексно-сопряженные величины к координатам z^i точки z, а w^i — координаты текущей точки w удаляемого $(n-1)$-мерного подпространства.

Используя это замечание, построим косое произведение $T(E^k, P_k^n)$ комплексного k-мерного векторного пространства E^k на базисное многообразие P_k^n с группой линейных преобразований слоя. Именно, точке (z, P^k) базы P_k^n мы отнесем слой

$$E^k_{(z,\,P^k)} = P^k \cap E^n_z$$

с центром в точке $z \in E^k_{(z,\,P^k)}$. Аффинные координаты вводятся в слое $E^k_{(z,\,P^k)}$ следующим образом. Сначала введем аффинные координаты в E^n_z. Если $z^i \neq 0$, то точке $w = (w^0, \ldots, w^n) \in E^n_z$ мы отнесем аффинные координаты $u^1, \ldots, u^n$, определяемые соотношениями:

$$u^1 = \frac{w^0}{\sum} - \frac{z^0}{\sum_0}, \quad u^2 = \frac{w^1}{\sum} - \frac{z^1}{\sum_0}, \ldots, u^i = \frac{w^{i-1}}{\sum} - \frac{z^{i-1}}{\sum_0},$$

$$u^{i+1} = \frac{w^{i+1}}{\sum} - \frac{z^{i+1}}{\sum_0}, \ldots, u^n = \frac{w^n}{\sum} - \frac{z^n}{\sum_0},$$

где

$$\sum\nolimits_0 = z^0\overline{z^0} + \cdots + z^n\overline{z^n}, \quad \sum = w^0\overline{z^0} + \cdots + w^n\overline{z^n}.$$

Эти координаты естественным образом порождают координаты в слое

$$E^k_{(z,\,P^k)} = E^n_z \cap P^k.$$

Простые вычисления показывают, что различные координатные системы слоя $E^k_{(z,\,P^k)}$ получаются друг из друга линейными преобразованиями.

Частями косого произведения $T(E^k, P_k^n)$ являются косые произведения

$$T(E^k, X_i^s), \quad s \leqslant k, \quad T(E^k, N^k),$$

строящиеся аналогичным образом. Нетрудно видеть, что косое произведение $T(E^k, N^k)$ эквивалентно тангенциальному косому произведению многообразия N^k и потому циклы Черна косого произведения $T(E^k, N^k)$ совпадают с циклами Черна многообразия N^k.

4°. Обозначим через $H(k, m)$ многообразие k-мерных подпространств $(k+m)$-мерного комплексного векторного пространства. Это многообразие хорошо изучено [см. (4)]. Здесь мы напомним, что его размерность равна $2km$ и все его нечетномерные числа Бетти равны нулю (см. также § 2, n° 1).

При достаточно большом m существует [см. (1)] непрерывное отображение f многообразия P_k^n в $H(k, m)$, индуцирующее косое произведение, эквивалентное косому произведению $T(E^k, P_k^n)$. Так как число m можно выбрать сколь угодно большим, то отображение f можно считать гомеоморфизмом.

Одновременно с P_k^n в многообразие $H(k, m)$ отображаются и базы X_i^s, N^k косых произведений $T(E^k, X_i^s)$, $T(E^k, N^k)$, причем индуцированные этими отображениями косые произведения также эквивалентны косым произведениям $T(E^k, X_i^s)$, $T(E^k, N^k)$.

Пусть Z^{km-s} — цикл размерности $2(km-s)$ многообразия $H(k, m)$, порождающий $2(r-s)$-мерный цикл Черна Ω^{r-s} косого произведения

$T(E^k, P_k^n)$ [см. (1)]. Цикл Ω^{r-s} задается формулой

$$\Omega^{r-s} = f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n)) = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s Y_j^{r-s}, \tag{1.2}$$

где $\times$ — знак пересечения, σ_j^s — целые числа (кручения в P_k^n отсутствуют), а f^{-1} — обратное к f отображение.

Так как отображение $f: N^k \to H(k, m)$ индуцирует тангенциальное косое произведение многообразия N^k, то цикл Z^{km-s} порождает $2(k-s)$-мерный цикл Черна Ψ^{k-s} многообразия N^k, который, на основании формулы (1.2), может быть представлен в виде:

$$\Psi^{k-s} = f^{-1}(Z^{km-s} \times f(N^k)) = [f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n))] \times N^k = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s (Y_j^{r-s} \times N^k). \tag{1.3}$$

Наконец, $2(k-s)$-мерный цикл Черна Γ^{k-s} многообразия M^k задается формулой

$$\Gamma^{k-s} = \varphi(\Psi^{k-s}) = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s \varphi(Y_j^{r-s} \times N^k), \tag{1.4}$$

где $\varphi: N^k \to M^k$ — указанный выше (см. n^0 1) аналитический гомеоморфизм. Так как $s \leqslant k$, то формула (1.4) дает все циклы Черна многообразия M^k.

Следовательно, для вычисления циклов Черна Γ^{k-s} многообразия M^k необходимо найти целые числа σ_j^s и вычислить циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$. Вычисление чисел σ_j^s оказалось наиболее трудной частью работы и ему посвящен § 5. Вычисление проведено следующим образом. Цикл Z^{km-s}, порождающий $2(k-s)$-мерный цикл Черна Ψ^{k-s} многообразия N^k, порождает в базе X_i^s косого произведения $T(E^k, X_i^s)$ 0-мерный цикл Черна Ω^0, индекс которого равен σ_i^s:

$$\operatorname{ind}(\Omega^0) = \sigma_i^s.$$

В самом деле, учитывая дуальность баз гомологий $\{X_i^s\}$ и $\{Y_j^{r-s}\}$, получим из (1.2):

$$\operatorname{ind}(\Omega^0) = \operatorname{ind}[f^{-1}(Z^{km-s} \times f(X_i^s))] = \operatorname{ind}[f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n)) \times X_i^s] =$$

$$= \operatorname{ind}\left[\left(\sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s Y_j^{r-s}\right) \times X_i^s\right] = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s \operatorname{ind}(Y_j^{r-s} \times X_i^s) = \sigma_i^s.$$

С другой стороны, $\operatorname{ind}(\Omega^0)$ равен сумме индексов особенностей $(k-s+1)$-реперного поля, построенного в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$ [см. (1)]. В § 5 эти поля строятся явным образом для всех косых произведений

$$T(E^k, X_i^s), \quad s \leqslant k, \quad i = 1, \ldots, \alpha_s,$$

и вычисляются суммы их индексов особенностей, т. е. вычисляются числа σ_i^s, $s \leqslant k$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$. Некоторые из чисел $\sigma_i^s = 0$. Поэтому соответствующие им циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ в формуле (1.4) можно не вычислять. Остальные циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ вычислены в § 4 (теорема 4.1).

Оказывается, что циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k) \subset M^k$ можно получить, применив к M^k простые проективно инвариантные операции; следовательно, циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ являются алгебраическими псевдомногообразиями алгебраического многообразия M^k.

В § 6 сформулирована в окончательном виде теорема о циклах Черна комплексного алгебраического многообразия и приведены примеры.

§ 2. Вычисление баз гомологий $\{X_i^s\}$ при $s \leqslant k$

1°. Через $H(k, n-k)$ обозначим многообразие k-мерных подпространств $P^k \subset P^n$, содержащих фиксированную точку $O \subset P^n$. $H(k, n-k)$ является комплексным алгебраическим многообразием. Гомологии в $H(k, n-k)$ изучались в ([4]). Здесь мы приведем необходимые для дальнейшего результаты.

Введем целочисленную неубывающую функцию ω целочисленного аргумента $i: 0 \leqslant \omega(i) \leqslant n-k$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть $Q_i \subset P^n$ — подпространства размерностей $i + \omega(i)$, удовлетворяющие условию:

$$O \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_k.$$

Через $Z(\omega)$ обозначим множество всех подпространств $P^k \in H(k, n-k)$, удовлетворяющих условиям:

$$\dim(P^k \cap Q_i) \geqslant i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Множество $Z(\omega)$ является комплексным алгебраическим псевдомногообразием и, следовательно, циклом размерности $2t = 2\sum_{i=1}^{k} \omega(i)$, лежащим в $H(k, n-k)$.

Если вместо Q_i взять другие подпространства Q_i', удовлетворяющие тем же условиям:

$$O \subset Q_1' \subset \ldots \subset Q_k', \quad \dim Q_i' = i + \omega(i),$$

то получим цикл $Z'(\omega)$, гомологичный в $H(k, n-k)$ циклу $Z(\omega)$.

Местом скачка функции ω будем называть такое значение i ее аргумента, что $\omega(i) \neq \omega(i+1)$.

Пусть $i_1, \ldots, i_{m-1}$ — совокупность всех мест скачков функции ω, взятых в возрастающем порядке; положим еще $i_m = k$. Оказывается, что условия (2.1) эквивалентны условиям

$$\dim(P^k \cap Q_{i_h}) \geqslant i_h, \quad h = 1, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Таким образом, цикл $Z(\omega)$ однозначно (с точностью до гомологий) определяется подпоследовательностью

$$Q_{i_1} \subset Q_{i_2} \subset \ldots \subset Q_{i_m}$$

последовательности

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k.$$

Гомологии в $H(k, n-k)$ описываются следующим образом.

Многообразие $H(k, n-k)$ комплексной размерности $k(n-k)$ не имеет кручений и все его нечетномерные числа Бетти равны нулю. Число Бетти размерности $2t$ равно числу всевозможных функций ω, удовлетворяющих условию: $\sum_{i=1}^{k} \omega(i) = t$. Соответствующие циклы $Z(\omega)$ образуют базу гомологий размерности $2t$.

2°. При вычислении баз $\{X_i^s\}$, $s \leqslant k$ (см. § 1, п° 2) мы используем следующее предложение, содержащееся в приведенных в ([3]) теоремах.

Пусть M — компактное действительное ориентируемое дифференцируемое многообразие четной размерности и пусть f — заданная на M непостоянная действительная дифференцируемая функция. Пусть f достигает максимума и минимума на ориентируемых четномерных многообразиях R и Q соответственно и пусть полный дифференциал функции f обращается в нуль только на R и Q. Пусть, наконец, многообразия R и Q не имеют кручений и их нечетномерные числа Бетти равны нулю.

Тогда оказывается, что и многообразие M не имеет кручений и все его нечетномерные группы гомологий тривиальны.

База $2s$-мерных гомологий многообразия M может быть найдена следующим образом.

Пусть $\{R_i\}$ — полная база гомологий (во всех размерностях) многообразия R, $\{Q_i^s\}$ — база $2s$-мерных гомологий многообразия Q; пусть, далее, $\{M_i^s\}$ — максимальное множество $2s$-мерных циклов из M, пересечение каждого из которых с многообразием R дает некоторый цикл R_i из базы $\{R_i\}$, причем выполнено условие: различные циклы из $\{M_i^s\}$ пересекаются с R по различным базисным циклам R_i. Тогда множество всех циклов M_i^s и Q_i^s составляет базу $2s$-мерных гомологий многообразия M.

3°. Переходим к построению баз $\{X_i^s\}$, $s \leqslant k$ (см. § 1, $n°$ 2). Пусть Q^l — некоторое фиксированное l-мерное подпространство пространства P^n. Множество всевозможных пар (z, P^k), где $z \in Q^l$, $P^k \ni z$, является комплексным алгебраическим многообразием комплексной размерности $l + k(n-k)$, которое мы обозначим через $P_{k,l}^n$.

При $k = 0$, $l = n$ получаем многообразие $P_{0,n}^n$, т. е. проективное пространство P^n; при $l = 0$ получаем многообразие

$$P_{k,0}^n = H(k, n-k);$$

наконец, при $l = n$ мы получаем многообразие

$$P_{k,n}^n = P_k^n,$$

базы гомологий $\{X_i^s\}$ которого мы вычисляем при $s \leqslant k$.

4°. Многообразия $P_{k,l}^n$, рассматриваемые как действительные дифференцируемые многообразия, имеют четную размерность. Мы зададим сейчас на каждом из них при $l > 0$ действительную функцию f, удовлетворяющую всем условиям приведенного в $n°$ 2 предложения.

В пространстве P^n зафиксируем некоторую систему проективных координат и будем считать их нормированными: если $z = (z^0, \ldots, z^n) \in P^n$, то

$$z^0\overline{z^0} + \cdots + z^n\overline{z^n} = 1.$$

Далее, будем считать, что подпространство $Q^l \subset P^n$, участвующее в определении многообразия $P_{k,l}^n$, задается в P^n системой уравнений

$$z^0 = \cdots = z^{n-l-1} = 0.$$

Функцию f на $P_{k,l}^n$, $l > 0$, определим следующим образом: f принимает в точке $(z, P^k) \in P_{k,l}^n$ значение

$$f((z, P^k)) = z^{n-l}\overline{z^{n-l}},$$

где $z = (0, \ldots, 0;\ z^{n-l}, \ldots, z^n) \in Q^l$. Очевидно, что функция f однозначно определена (так как координаты нормированы) и дифференцируема.

Ее максимальное значение равно 1 и достигается на множестве всевозможных пар

$$(\overbrace{(0, \ldots, 0}^{n-l}; 1, 0, \ldots, 0),\ P^k) \in P^n_{k,\,l},$$

т. е. на подмногообразии $R_l = H(k, n-k)$ всевозможных k-мерных подпространств, содержащих точку

$$(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-l}; 1, 0, \ldots, 0) \in Q^l.$$

Минимальное значение f равно 0 и достигается на многообразии $Q_l = P^n_{k,\,l-1}$ всевозможных пар (z, P^k), где

$$z = (0, \ldots, 0;\ 0, z^{n-l+1}, \ldots, z^n) \in Q^{l-1}.$$

Легко проверяется, что полный дифференциал функции f обращается в нуль только на выделенных подмногообразиях $R_l = H(k, n-k)$ и $Q_l = P^n_{k,\,l-1}$. При $l = 1$ многообразие

$$Q_1 = P^n_{k,\,0} = H(k, n-k)$$

и, следовательно, для многообразия $P^n_{k,\,1}$ и функции f, заданной на нем, выполняются все условия предложения $n^\circ 2$. Поэтому $P^n_{k,\,1}$ не имеет кручений и его числа Бетти всех нечетных размерностей равны нулю. Это утверждение справедливо, следовательно, и для многообразий $P^n_{k,\,2}$, $P^n_{k,\,3}$ и т. д., вплоть до $P^n_{k,\,n} = P^n_k$ включительно; каждое из них не имеет кручений и их нечетномерные числа Бетти равны нулю. Этим доказано, что все перечисленные в предложении $n^\circ 2$ условия выполнены для построенных нами многообразий $P^n_{k,\,l}$, R_l, Q_l и функций f при $l = 1, \ldots, n$.

Обозначим через B^s_l базу $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,\,l}$, а через A^s_l — максимальное множество $2s$-мерных циклов многообразия $P^n_{k,\,l}$, пересекающихся в $P^n_{k,\,l}$ с многообразием $R_l = H(k, n-k)$ по базисным циклам из R_l и удовлетворяющих условию: различные циклы из A^s_l пересекаются с многообразием R_l по различным базисным циклам последнего. Из предложения $n^\circ 2$ и из того, что $Q_l = P^n_{k,\,l-1}$ следует (см. обозначения § 1, $n^\circ 2$):

$$\{X^s_i\} = B^s_n = A^s_n \cup B^s_{n-1} = \cdots = A^s_n \cup A^s_{n-1} \cup \cdots \cup A^s_1 \cup B^s_0.$$

Обозначая $B^s_0 = A^s_0$, получим формулу

$$\{X^s_i\} = B^s_n = A^s_n \cup A^s_{n-1} \cup \ldots \cup A^s_0. \tag{2.3}$$

Итак, вычисление базы $B^s_n = \{X^s_i\}$ $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,\,n} = P_k$ свелось к нахождению циклов, составляющих множества A^s_l, $l = 0, 1, \ldots, n$. Мы найдем их для интересующего нас случая $s \leqslant k$.

При $s < l$ множество A^s_l пусто, так как

$$\dim R_l + 2s - \dim P^n_{k,\,l} = 2(k(n-k) + s - l - k(n-k)) < 0.$$

Найдем циклы, составляющие множества A^s_{s-t}, $t = 0, 1, \ldots, s$.

Цикл размерности $2s$ многообразия $P^n_{k,\,s-t}$ пересекается в $P^n_{k,\,s-t}$ с многообразием $R_{s-t} = H(k, n-k)$ по $2t$-мерному циклу, так как

$$\dim R_{s-t} + 2s - \dim P^n_{k,\,s-t} = 2t.$$

Если $Z^t(\omega)$ — один из базисных $2t$-мерных циклов многообразия $R_{s-t} =$

$= H(k, n-k)$, то всякое подпространство $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит некоторое фиксированное подпространство Q^{k-t} размерности $k-t$. В самом деле, так как $\dim Z^t(\omega) = 2t$, то при $i \leqslant k-t$ функция $\omega(i) = 0$ (см. n° 1). Следовательно, если Q_i, $i = 1, \ldots, k$, — последовательность, определяющая цикл $Z^t(\omega)$, то

$$\dim Q_{k-t} = k - t + \omega(k-t) = k - t,$$

и для всякого $P^k \in Z^t(\omega)$ имеем:

$$\dim (P^k \cap Q_{k-t}) \geqslant k - t$$

[см. формулу (2.1)], т. е. всякое $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит фиксированное $(k-t)$-мерное подпространство Q_{k-t}. Так как $s \leqslant k$, то можно считать (см. n° 1), что Q_{k-t} содержит подпространство Q^{s-t}, входящее в определение многообразия $P^n_{k,\,s-t}$.

Итак, всякий $2t$-мерный базисный цикл $Z^t(\omega)$ многообразия $R_{s-t} = H(k, n-k)$ можно выбрать так, чтобы все $P^k \in Z^t(\omega)$ содержали подпространство Q^{s-t}, входящее в определение многообразия $P^n_{k,\,s-t}$. Поэтому множество всевозможных пар (z, P^k), $z \in Q^{s-t}$, $P^k \in Z^t(\omega)$, является прямым произведением подпространства Q^{s-t} на цикл $Z^t(\omega)$, т. е. является алгебраическим псевдомногообразием и, следовательно, циклом размерности $2s$, лежащим в $P^n_{k,\,s-t}$. Мы обозначим его через $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$.

Псевдомногообразие $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$ и многообразие R_{s-t} находятся в общем положении в многообразии $P^n_{k,\,s-t}$. Поэтому их пересечением в $P^n_{k,\,s-t}$ является цикл $Z^t(\omega)$*.

Через $\{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}$ обозначим совокупность циклов $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$, выбранных для всевозможных базисных циклов $Z^t(\omega)$ многообразия R_{s-t} при данном фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant s$. Эта совокупность составит полный набор $2s$-мерных циклов из $P^n_{k,\,s-t}$, пересекающихся в $P^n_{k,\,s-t}$ с многообразием R_{s-t} по базисным циклам последнего, так как соответствующие $Z^t(\omega)$ составляют в R_{s-t} базу $2t$-мерных гомологий (см. n° 1). Следовательно, A^s_l пусто при $l < s$ и $A^s_{s-t} = \{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}$ при $0 \leqslant t \leqslant s$. Для базы $\{X^s_i\}$ $2s$-мерных гомологий формула (2.3) дает следующее выражение:

$$\{X^s_i\} = \bigcup_{t=0}^{s} \{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}.$$

Все доказанное относительно гомологий в P^n_k мы сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Комплексное алгебраическое многообразие P^n_k комплексной размерности $n + k$ $(n - k)$ не имеет кручений и его числа Бетти*

---

* Пусть M_1 и M_2 — псевдомногообразия, лежащие в многообразии P, N_1 и N_2 — множества особых точек псевдомногообразий M_1 и M_2 соответственно. Мы говорим, что M_1 и M_2 находятся в общем положении в P, если в P находятся в общем положении многообразия (M_1 / N_1) и (M_2 / N_2), причем

$$\dim (N_1 \cap M_2 \cup N_2 \cap M_1) \leqslant \dim (M_1 \cap M_2) - 2.$$

В этом случае теоретико-множественное пересечение $M_1 \cap M_2$ псевдомногообразий M_1 и M_2 само является псевдомногообразием и совпадает с топологическим пересечением циклов M_1 и M_2 (при надлежащей ориентации пересечения $M_1 \cap M_2$).

Чтобы сократить изложение, доказательства всех утверждений об общности положения псевдомногообразий мы в дальнейшем будем опускать.

всех нечетных размерностей равны нулю. База $\{X_i^s\}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, *2s-мерных гомологий при* $s \leqslant k$ *состоит из* α_s*-циклов* X_i^s, *которые могут быть получены следующим образом. Пусть* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant k$; *все подпространства* $P^k \in Z^t(\omega)$, *где* $Z^t(\omega)$ — *произвольный* $2t$*-мерный базисный цикл многообразия* $H(k, n-k)$, *содержат некоторое фиксированное* $(s-t)$*-мерное подпространство* Q^{s-t}. *Множество всевозможных пар* (z, P^k), $z \in Q^{s-t}$, $P^k \in Z^t(\omega)$, *есть алгебраическое псевдомногообразие размерности* $2s$, *лежащее в алгебраическом многообразии* P_k^n. *Обозначим его через* $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$. *Совокупность всех циклов* $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$, *соответствующих всевозможным* $Z^t(\omega)$, $t = 0, 1, \ldots, s$, *при данном фиксированном* s, *образует базу* $2s$*-мерных гомологий* $\{X_i^s\}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, *многообразия* P_k^n.

§ 3. Циклы U_t^s, V_t^{r-s}

1°. Мы выделим сейчас из базы $\{X_i^s\}$ $s+1$ цикл U_t^s, $t = 0, \ldots, s$. В § 5, где индексы σ_i^s (см. § 1, n° 4) фактически вычислены для всех $i = 1, \ldots, \alpha_s$, будет показано, что $\sigma_i^s = 0$, если соответствующий цикл $X_i^s \neq U_t^s$. В следующем пункте строятся циклы V_t^{r-s} из дуальной базы $\{Y_j^{r-s}\}$ (см. § 1, n°2), соответствующие циклам U_t^s. В § 4 вычисляются пересечения $V_t^{r-s} \times N^k$ и циклы $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ (см. § 1, n° 4). Остальные циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ не нужны для вычисления циклов Черна Γ^{k-s}, так как формула (1.4) принимает, после сказанного, вид:

$$\Gamma^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} \rho_t^s \varphi(V_t^{r-s} \times N^k). \tag{3.1}$$

Было показано (см. § 2, n° 4), что функция ω цикла $Z^t(\omega)$ может делать первый скачок не раньше, чем на $(k-t)$-м месте, так как

$$\dim Z^t(\omega) = 2t.$$

Рассмотрим циклы $X_i^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega))$ данной размерности $2s$, функция ω которых делает первый скачок на $(k-t)$-м месте. Таких циклов имеется $s+1$: каждому $t = 0, 1, \ldots, s$ соответствует один цикл X_i^s, функция ω_t которого имеет вид:

$$\omega_t(1) = \cdots = \omega_t(k-t) = 0, \quad \omega_t(k-t+1) = \cdots = \omega_t(k) = 1.$$

Цикл $Z^t(\omega)$ можно получить следующим образом. Пусть $Q^{k-t} \subset Q^{k+1}$ — два фиксированных подпространства пространства P^n (они соответствуют пространствам Q_{i_1}, Q_{i_m}, см. § 2, n° 1). Тогда $Z^t(\omega)$ состоит из всех подпространств $P^k \subset Q^{k+1}$, содержащих подпространство Q^{k-t}.

Сказанное сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для каждого* $s \leqslant k$ *из базы* $\{X_i^s\}$ *выделяется* $s+1$ *цикл* U_t^s, $t = 0, \ldots, s$, *при помощи следующей конструкции. Рассмотрим три фиксированных подпространства:* $Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1}$. *Цикл* U_t^s *состоит из всевозможных пар* (z, P^k), *где* $z \in Q^{s-t}$, $Q^{k-t} \subset P^k \subset Q^{k+1}$; *обозначим его через* $(Q^{s-t}, Q^{k-t}, Q^{k+t})$. *Индекс* σ_i^s, *соответствующий циклу* U_t^s, *обозначим через* ρ_t^s. *Имеем:*

$$\sigma_i^s = 0 \quad \textit{при} \quad X_i^s \neq U_t^s,$$
$$\sigma_i^s = \rho_t^s \quad \textit{при} \quad X_i^s = U_t^s.$$

Формула для вычисления индекса ρ_t^s дана в § 5 [см. формулу (5.2)].

2°. Циклы V_t^{r-s} определяются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$ — два фиксированных подпространства пространства P^n. Цикл V_t^{r-s} состоит из всевозможных пар $(z, P^k) \in P_k^n$, где $z \in Q^{n-s+t}$, $\dim (P^k \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1$.*

Мы будем этот цикл обозначать через

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t}, Q^{n-s+t}).$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что V_t^{r-s} есть алгебраическое псевдомногообразие, и, следовательно, цикл размерности $2(k(n-k)+n-s)$. Множество всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, где $z \notin Q^{n-k-2+t}$, образует $2(k(n-k)+n-s)$-мерное псевдомногообразие (открытое, если $n-k-2+t \geqslant 0$). В самом деле, множество Z всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$ при фиксированном $z \notin Q^{n-k-2+t}$ можно определить следующим образом: Z состоит из всевозможных пар (z, P^k), где подпространство P^k содержит точку z и имеет с $(n-k-1+t)$-мерным подпространством, содержащим $Q^{n-k-2+t}$ и z, пересечение размерности $\geqslant t$.

Следовательно, Z есть базисный цикл многообразия $H(k, n-k)$, построенного в точке z, функция ω которого задается условиями:

$$\omega(1) = \cdots = \omega(t) = n-k-1,$$

$$\omega(t+1) = \cdots = \omega(k) = n-k; \quad \dim Z = 2(k(n-k)-t),$$

[см. § 2, n° 1].

Выберем некоторую пару (z, P^k) из псевдомногообразия Z. Она имеет в V_t^{r-s} окрестность, гомеоморфную прямому произведению окрестности точки z в Q^{n-s+t} и окрестности точки (z, P^k) в $Z \subset H(k, n-k)$. Следовательно, множество всех пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, где $z \notin Q^{n-k-2+t}$, образует псевдомногообразие (открытое, если $Q^{n-k-2+t}$ не пусто) размерности

$$2(n-s+t) + \dim Z = 2(k(n-k)+n-s).$$

Обозначим его через W.

Аналогичные рассуждения показывают, что множество всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, $z \in Q^{n-k-2+t}$, образует замкнутое псевдомногообразие W' размерности

$$2(k(n-k)+n-k-1).$$

Так как

$$\dim W - \dim W' = 2(k-s+1) \geqslant 2,$$

то размерность множества особых точек $W \cup W' = V_t^{r-s}$ оказывается хотя бы на 2 единицы меньше, чем

$$\dim V_t^{r-s} = 2(k(n-k)+n-s).$$

Следовательно, V_t^{r-s} есть замкнутое псевдомногообразие размерности $2(k(n-k)+n-s)$. Его алгебраичность очевидна.

Теорема будет доказана, если доказать равенства:

$$\operatorname{ind}(X_i^s \times V_t^{r-s}) = 0 \text{ при } X_i^s \neq U_t^s \text{ и } \operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

Пусть

$$X_i^s = (Q^{s-t'},\ Z^{t'}(\omega)) \neq U_t^s$$

(см. n° 1) и

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t},\ Q^{n-s+t}).$$

Если $t' > t$, то подпространства Q^{n-s+t} и $Q^{s-t'}$ можно выбрать непересекающимися, и в этом случае

$$\operatorname{ind}(X_i^s \times V_t^{r-s}) = 0.$$

Пусть $t' \leqslant t$. Если

$$X_i^s = (Q^{s-t'},\ Z^{t'}(\omega)) \neq U_t^s,$$

то функция ω может делать первый скачок не раньше, чем на $(k-t+1)$-м месте. Следовательно, все подпространства $P^k \in Z^{t'}(\omega)$ содержат некоторое фиксированное подпространство R^{k-t+1} размерности $k-t+1$ (см. § 2, n° 4). Будем считать, что подпространство $Q^{n-k-2+t}$, участвующее в определении цикла V_t^{r-s}, находится в общем положении с подпространством R^{k-t+1}. Имеем:

$$\dim(R^{k-t+1} \cap Q^{n-k-2+t}) = -1,$$

т. е. пересечение пусто. Если $(z, P^k) \in X_i^s$ и $\in V_t^{r-s}$, то $P^k \supset R^{k-t+1}$ и

$$\dim(P^k \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1,$$

но это невозможно, так как размерность подпространства, содержащего R^{k-t+1} и некоторое $(t-1)$-мерное подпространство $R^{t-1} \subset Q^{n-k-2+t}$, не меньше, чем

$$\dim R^{k-t+1} + \dim R^{t-1} + 1 = k+1$$

(R^{k-t+1} и R^{t-1} не пересекаются!).

Остается доказать равенство

$$\operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

Пусть

$$U_t^s = (Q^{s-t},\ Q^{k-t},\ Q^{k+1})$$

(см. n° 1),

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t},\ Q^{n-s+t})$$

и будем предполагать, что $Q^{n-k-2+t}$ и Q^{n-s+t} находятся в общем положении с подпространствами

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1}.$$

Имеем:

$$Q^{n-s+t} \cap Q^{s-t} = R^0 = z, \quad Q^{n-k-2+t} \cap Q^{k+1} = R^{t-1}.$$

Подпространство R^{t-1} не пересекается с Q^{k-t}, следовательно, существует единственное подпространство $P^k \subset Q^{k+1}$, содержащее подпространства Q^{k-t} и R^{t-1}. Пара (z, P^k) и будет единственной точкой пересечения (в теоретико-множественном смысле) циклов U_t^s и V_t^{r-s}. Нетрудно показать (см. сноску на стр. 692), что эта точка является неособой точкой для обоих псевдомногообразий, и что в ней U_t^s и V_t^{r-s} находятся в общем положении. Наконец, учитывая естественные ориентации комплексных псевдомногообразий U_t^s и V_t^{r-s}, получаем:

$$\operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

§ 4. Операция Π_t и вычисление циклов $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$

1°. Для вычисления пересечений $V_t^{r-s} \times N^k$ в P_k^n выберем подпространства $Q^{n-k-2+t}$ и Q^{n-s+t}, определяющие цикл V_t^{r-s}, так, чтобы, во-первых, Q^{n-s+t} и $M^k \subset P^n$ находились в общем положении в P^n и, во-вторых, псевдомногообразие V_t^{r-s} и многообразие N^k находились в общем положении в P_k^n (см. сноску на стр. 692). Этого можно достичь сколь угодно малым шевелением подпространств $Q^{n-k-2+t}$, Q^{n-s+t} около произвольного первоначального положения.

Доказательство этого утверждения требует довольно длинных выкладок и поэтому мы его здесь не будем приводить.

Если подпространства $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$ выбраны указанным способом, то из самого определения циклов V_t^{r-s} (§ 3, $n^\circ 2$) и N^k (§ 1, n° 1) следует

ЛЕММА 1. *Пересечение циклов V_t^{r-s} и N^k, находящихся в общем положении в P_k^n, совпадает с их теоретико-множественным пересечением и, следовательно, состоит из пар (z, P_z^k), где $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, а P_z^k — касательное к M^k в точке z подпространство, имеющее с $Q^{n-k-2+t}$ пересечение размерности $\geqslant t-1$.*

2°. Образ $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ пересечения $V_t^{r-s} \times N^k$ при гомеоморфизме $\varphi : N^k \to M^k$ (см. § 1, n° 1) состоит, очевидно, из первых компонентов пар $(z, P_z^k) \in V_t^{r-s} \times N^k$. Поэтому из леммы 1 следует

ЛЕММА 2. *Образ $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ цикла $V_t^{r-s} \times N^k$ при аналитическом гомеоморфизме $\varphi : N^k \to M^k$ состоит из тех точек $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, в которых касательное к M^{k-s+t} подпространство $P_z^{k-s+t} \subset Q^{n-s+t}$ имеет с $Q^{n-k-2+t}$ пересечение размерности $\geqslant t-1$.*

Очевидно, что цикл $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ является алгебраическим псевдомногообразием размерности

$$\dim V_t^{r-s} + \dim N^k - \dim P_k^n = 2(r-s+k-r) = 2(k-s).$$

Формулировку леммы 2 можно слегка изменить, заменив условие

$$\dim (P_z^{k-s+t} \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1$$

эквивалентным условием: подпространство P_z^{k-s+t} содержится в некотором подпространстве $P^{n-s+t-1} \subset Q^{n-s+t}$, содержащем подпространство $Q^{n-k-2+t}$.

ЛЕММА 3. *Цикл $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ состоит из точек $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, в которых касательное к M^{k-s+t} подпространство $P_z^{k-s+t} \subset Q^{n-s+t}$ содержится в некотором подпространстве пучка $(n-s+t-1)$-мерных подпространств пространства Q^{n-s+t}, содержащих подпространство $Q^{n-k-2+t}$.*

3°. Используя леммы 1—3, мы определим операцию Π_t, которая каждому комплексному алгебраическому многообразию $M^l \subset P^m$ комплексной размерности l ставит в соответствие некоторое комплексное алгебраическое псевдомногообразие комплексной размерности $l-t$, лежащее в M^l:

$$\Pi_t(M^l) = M^{l-t} \subset M^l.$$

Для этого в пространстве P^m зафиксируем подпространство $Q^{m-l-2+t}$ и рассмотрим пучок $(m-1)$-мерных подпространств пространства P^m, содержащих $Q^{m-l-2+t}$.

Обозначим через $\Pi_t(M^l)$ множество точек z многообразия M^l, обладающих свойством: касательное к M^l в точке z подпространство содержится в некотором подпространстве нашего пучка.

Учитывая результаты n° 1—2, мы можем утверждать, что при надлежащем выборе «оси» пучка $Q^{m-l-2+t}$ множество $\Pi_t(M^l)$ превратится в алгебраическое псевдомногообразие $M^{l-t} \subset M^l$.

Окончательный результат настоящего параграфа мы сформулируем в виде теоремы 4.1.

ТЕОРЕМА 4.1. *Подпространства $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$, определяющие цикл V_t^{r-s}, можно выбрать таким образом, чтобы псевдомногообразие V_t^{r-s} и многообразие N^k находились в общем положении в P_k^n. Тогда цикл $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ является алгебраическим псевдомногообразием размерности $k-s$, лежащим в M^k. Он получается, если к пересечению*

$$M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$$

применить операцию Π_t в подпространстве Q^{n-s+t}:

$$\varphi(V_t^{r-s} \times N^k) = \Pi_t(M^{k-s+t}).$$

Формула (3.1) для вычисления циклов Черна принимает теперь вид

$$\Gamma^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} \rho_t^s \Pi_t(M^{k-s+t}). \tag{4.1}$$

§ 5. Вычисление индексов σ_i^s

В настоящем параграфе вычисляются индексы σ_i^s (см. § 1, n° 4). Именно, в каждом косом произведении $T(E^k, X_i^s)$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, $s = 1, \ldots k$ (см. § 1, n° 3), явным образом строится поле $k-s+1$ реперов с изолированными особенностями и вычисляется сумма индексов особенностей этого поля, которая совпадает с σ_i^s.

1°. Покажем, что если базисный цикл X_i^s косого произведения $T(E^k, X_i^s)$ не совпадает ни с одним из циклов U_t^s, то соответствующий индекс $\sigma_i^s = 0$:

$$\sigma_i^s = 0 \quad \text{при} \quad X_i^s \neq U_t^s.$$

Функция ω, входящая в определение цикла

$$X_i^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega)) \neq U_t^s,$$

имеет первый скачок на j-м месте, где $j > k-t$, $t \geqslant 2$ (см. § 3, n° 1). Следовательно, все подпространства $P^k \in Z^t(\omega)$ содержат некоторое фиксированное подпространство $R^{k-t+1} \supset Q^{s-t}$. Над подпространством Q^{s-t}, как над базой, построим косое произведение $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$ комплексного $(k-t+1)$-мерного векторного пространства E^{k-t+1} на Q^{s-t}. Именно, точке $z \in Q^{s-t}$ отнесем слой

$$E_z^{k-t+1} = R^{k-t+1} \cap E_z^n$$

(см. § 1, n° 3). Легко доказать, что в косом произведении $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$ $(k-s+1)$-реперное поле строится без особенностей [см. (1)]. Допустим, что такое поле построено. Так как любое подпространство $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит R^{k-t+1}, то в каждом слое

$$E_{(z, P^k)}^k = P^k \cap E_z^n$$

косого произведения $T(E^k, X_i^s)$, где z фиксировано, содержится слой

$$E_z^{k-t+1} = R^{k-t+1} \cap E_z^n$$

косого произведения $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$. Если в слое $E^k_{(z,\, P^k)}$ задать $(k-s+1)$-репер, который уже построен в соответствующем слое E_z^{k-t+1}, то тем самым в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$ будет задано $(k-s+1)$-репер-ное поле без особенностей.

Следовательно, соответствующий индекс $\sigma_i^s = 0$.

2°. Переходим к вычислению индексов ρ_i^s, соответствующих косым произведениям $T(E^k, U_i^s)$.

Функция ω_t цикла

$$U_i^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega_t))$$

имеет вид:

$$\omega_t(1) = \cdots = \omega_t(k-t) = 0, \quad \omega_t(k-t+1) = \cdots = \omega_t(k) = 1.$$

Цикл

$$U_i^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega_t))$$

определяется тремя подпространствами

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1}$$

и состоит из всевозможных пар (z, P^k), где $z \in Q^{s-t}$, $Q^{k-t} \subset P^k \subset Q^{k+}$ (см. § 3, $n°$ 1).

Покажем, что псевдомногообразие $Z^t(\omega_t)$ является комплексным t-мерным проективным пространством.

В самом деле, выберем подпространства

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1} \subset P^n$$

таким образом, чтобы в фиксированной системе координат они задавались в P^n, соответственно, уравнениями:

$$z^{s-t+1} = \ldots = z^n = 0,$$

$$z^{k-t+1} = \ldots = z^n = 0,$$

$$z^{k+2} = \ldots = z^n = 0.$$

Тогда каждое подпространство $P^k \in Z^t(\omega_t)$, т. е. подпространство, удовлетворяющее условиям:

$$Q^{k-t} \subset P^k \subset Q^{k+1},$$

задается в Q^{k+1} уравнением

$$\sum_{i=1}^{t+1} \zeta^{i-1} w^{k-t+i} = 0, \tag{5.1}$$

где $w^0, \ldots, w^{k+1}$ — координаты переменной точки в Q^{k+1}, а числа $\zeta^0, \ldots, \zeta^t$ одновременно в нуль не обращаются. Очевидно, что каждому подпространству $P^k \in Z^t(\omega_t)$ взаимно однозначно, с точностью до множителя, соответствует система $(\zeta^0, \ldots, \zeta^t)$, т. е. комплексное алгебраическое псевдомногообразие $Z^t(\omega_t)$ является комплексным проективным пространством размерности t.

Таким образом, цикл

$$U_t^s = (Q^{s-t},\ Z^t(\omega_t))$$

есть прямое произведение двух комплексных проективных пространств Q^{s-t} и $Z^t(\omega_t)$ размерностей $s-t$ и t соответственно. Для точек $(z, P^k) \in U_t^s$ примем обозначения:

$$(z, P^k) = (z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^0, \ldots, \zeta^t).$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать числа ζ^i нормированными:

$$\sum_{i=0}^{t} \zeta^i \overline{\zeta^i} = 1.$$

В каждом слое $E^k_{z,\zeta}$ косого произведения $T(E^k, U_t^s)$ мы зададим сейчас последовательность из $k-s+2$ точек

$$q_1 = z,\ q_2, \ldots, q_{k-s+2},$$

непрерывно зависящих от точки (z, ζ) базы U_t^s. Как указано, первая точка последовательности всегда совпадает с центром z слоя $E^k_{(z,\zeta)}$.

Этим в каждом слое $E^k_{(z,\zeta)}$ будет задана последовательность из $k-s+1$ вектора, концами которых служат точки $q_2, \ldots, q_{k-s+2}$, а началом — точка $q_1 = z$. Выбор последовательности точек произведем так, чтобы они становились зависимыми лишь в конечном числе слоев косого произведения $T(E^k, U_t^s)$ и, следовательно, зададим в косом произведении $T(E^k, U_t^s)$ $(k-s+1)$-реперное поле с изолированными особенностями. Сумма индексов этих особенностей равна p_t^s.

В слое $E^k_{(z,\zeta)}$ искомые $k-s+2$ точки задаем матрицей (I):

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
z^0,\ z^1, \ldots,\ z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots,\ 0 & 0,\ 0, \ldots,\ 0 \\
\hline
a_0 z^0, a_1 z^1, \ldots, a_{s-t} z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots,\ 0 & \Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0} - 1), \Phi\zeta^0\overline{\zeta^1}, \ldots, \Phi\zeta^0\overline{\zeta^t} \\
\hline
b_0 z^0, b_1 z^1, \ldots, b_{s-t} z^{s-t} & \Phi_1, 0, \ldots, 0 & 0,\ 0, \ldots,\ 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
l_0 z^0, l_1 z^1, \ldots, l_{s-t} z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots, \Phi_{k-s} & 0,\ 0, \ldots,\ 0
\end{array}\right) \qquad \text{(I)}$$

В этой матрице, разбитой на три вертикальные клетки, $k-s+2$ строки и $k+2$ столбца. Вдоль i-й строки стоят координаты точки q_i, $i = 1, \ldots, k-s+2$, в подпространстве Q^{k+1}. Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, l_{s-t}$, стоящие в первой клетке, все положительны и алгебраически независимы между собой, т. е. никакая подсистема этой системы чисел не обращает в нуль никакого многочлена с целыми коэффициентами от соответствующего числа переменных. Далее, $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ — линейные формы переменных $z^0, \ldots, z^{s-t}$, причем коэффициенты этих форм вместе с коэффициентами $a_0, \ldots, l_{s-t}$ также алгебраически независимы между собой.

Покажем, что заданная этой матрицей последовательность из $k-s+2$ точек удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям.

Прежде всего очевидна независимость такого задания от координат точки $(z, \zeta) \in U_t^s$: $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ являются линейными формами переменных $z^0, \ldots, z^{s-t}$, и координаты ζ^i нормированы.

Докажем, что все $k-s+2$ точки, заданные матрицей (I), лежат в слое $E^k_{(z,\,\zeta)}$. Для этого покажем сначала, что все эти точки лежат в k-мерном подпространстве

$$\zeta = P^k \subset Q^{k+1}.$$

Это надо проверить только для точки q_2, так как все строки третьей клетки матрицы (I), за исключением второй строки, состоят из нулей [см. уравнение (5.1) для подпространства $P^k = \zeta$].

Но так как координаты ζ^i нормированы, то

$$\zeta^0\Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0}-1)+\zeta^1\Phi\zeta^0\overline{\zeta^1}+\ldots+\zeta^t\Phi\zeta^0\overline{\zeta^t}=0.$$

Покажем, что точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ принадлежат аффинной части $E^k_{(z,\,\zeta)}$ подпространства ζ. Это следует из неравенств [см. уравнение (1.1) § 1, n° 3]:

$$\sum_{i=0}^{s-t} z^i\overline{z^i}>0, \quad \sum_{i=0}^{s-t} a_i z^i\overline{z^i}>0, \ldots, \quad \sum_{i=0}^{s-t} l_i z^i\overline{z^i}>0,$$

которые выполняются в силу того, что все коэффициенты $a_0, \ldots, l_{s-}$ положительны, а z^i, $i=0, \ldots, s-t$, одновременно в нуль не обращаются.

Наконец, докажем, что точки $q_1, \ldots, q_{k-2+s}$ становятся зависимыми лишь в конечном числе слоев косого произведения $T(E^k, U^s_t)$ и найдем эти слои.

Если точка $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t};\ \zeta^0, \ldots, \zeta^t)$ такова, что $\zeta^0\overline{\zeta^0}-1 \neq 0$, то при любом выборе точки $z \in Q^{s-t}$ $k-s+2$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ независимы в слое $E^k_{(z,\,\zeta)}$: в этом случае ранг матрицы (I) равен $k-s+2$.

Действительно, пусть среди координат z^i точки (z, ζ) отличны от нуля r координат, все же остальные z^i равны нулю. Пусть, например, от нуля отличны первые r координат z^i (это допущение не повлияет на общность рассуждений). На нормированные координаты ζ^i наложено единственное условие:

$$\zeta^0\overline{\zeta^0}-1 \neq 0.$$

Среди $k-s+1$ формы $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в нуль в точке z может обратиться не более $r-1$ формы, так как их коэффициенты алгебраически независимы между собой. Следовательно, в точке z отличны от нуля хотя бы $k-s+2-r$ форм. При этом, если форма $\Phi \neq 0$, то элемент $\Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0}-1)$ матрицы (I) отличен от нуля в рассматриваемой точке (z, ζ).

Составим определитель $(k-s+2)$-го порядка из первых r столбцов первой клетки матрицы (I) (там все $z^i \neq 0$) и из тех $k-s+2-r$ столбцов второй и третьей клеток (из третьей клетки можно брать только первый столбец), в которых формы $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в нуль не обратились. Легко видеть, что этот определитель отличен от нуля.

Перейдем к случаю, когда слой $E^k_{(z,\,\zeta)}$ отнесен точке (z, ζ), для которой

$$\zeta^0\overline{\zeta^0}-1=0,$$

и, следовательно,

$$\zeta^1=\ldots=\zeta^t=0,$$

так как координаты ζ^i нормированы.

В этом случае в матрице (I) вся третья клетка обращается в нуль и ее ранг определяется первыми двумя клетками, т. е. выбором точки $z \in Q^{s-t}$, поскольку первые две клетки зависят только от переменных z^i.

Мы покажем сейчас, что среди слоев $E^k_{(z,\zeta)}$, где

$$(z, \zeta) = (z; 1, 0, \ldots, 0),$$

существует ровно

$$\binom{k-t+1}{k-s+1}$$

слоев, в которых точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ становятся зависимыми; символом $\binom{a}{b}$ обозначен биномиальный коэффициент.

Пусть в точке $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^0, \ldots, \zeta^t)$ от нуля отличны только r координат; среди форм $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в точке z в нуль обращается не более $r-1$ формы (см. выше). Если в нуль обращается ровно $r-1$ форма, то ранг матрицы в рассматриваемой точке будет равен $k-s+1$ и, следовательно, соответствующий слой $E^k_{(z,\zeta)}$ будет особым. Если в нуль обращается меньшее число форм, то в слое $E^k_{(z,\zeta)}$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ независимы.

Следовательно, для подсчета общего числа особых слоев в косом произведении $T(E^k, U^s_t)$ нужно подсчитать число точек $z \in Q^{s-t}$, удовлетворяющих следующему условию: среди координат z^i точки z от нуля отличны только r координат, и в точке z обращается в нуль ровно $r-1$ форма из $k-s$ форм $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$.

Если число r удовлетворяет условиям:

$$1 \leqslant r \leqslant s-t+1, \quad 1 \leqslant r \leqslant k-s+1,$$

то при произвольном выборе индексов $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{r-1}$ можно найти единственную точку $z \in Q^{s-t}$, удовлетворяющую условиям:

$$z^{i_1} \neq 0, \ldots, z^{i_r} \neq 0,$$

$$\text{все остальные } z^i = 0, \ \Phi_{j_1}(z) = 0, \ldots, \Phi_{j_{r-1}}(z) = 0.$$

Для этого решим следующую систему из $r-1$ уравнения с r неизвестными $z^{i_1}, \ldots, z^{i_r}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{j_1}(z) &= c_{11}z^{i_1} + \ldots + c_{1r}z^{i_r} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{j_{r-1}}(z) &= c_{r-1,1}z^{i_1} + \ldots + c_{r-1,r}z^{i_r} = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Так как коэффициенты c_{ij} алгебраически независимы между собой, то все определители матрицы системы отличны от нуля. Следовательно, всякое решение этой системы получается из некоторого фиксированного решения $(z_0^{i_1}, \ldots, z_0^{i_r})$, все координаты которого отличны от нуля, умножением последнего на соответствующий множитель.

Примем в качестве координат z^{i_s}, $s = 1, \ldots, r$, искомой точки $z \in Q^{s-t}$ координаты $z_0^{i_s}$ решения $(z_0^{i_1}, \ldots, z_0^{i_r})$; все остальные координаты z^i положим равными нулю. Очевидно, что эта точка удовлетворяет требуемому условию и она единственная (при фиксированном значении индексов $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_{r-1}$), так как ее координаты определены с точностью до множителя.

Другими словами, система $(*)$ однозначно определяет особую точку косого произведения $T(E^k, U^s_t)$.

Если индексы $i_1, \ldots, i_r$ оставить без изменения, но изменить хотя бы один из индексов $j_1, \ldots, j_{r-1}$, то получим другую особую точку $z \in Q^{s-t}$, так как коэффициенты форм Φ_i алгебраически независимы между собой. При фиксированной последовательности $i_1, \ldots, i_r$ $r-1$ индекс $j_1, \ldots, j_{r-1}$ можно выбрать $\binom{k-s}{r-1}$ различными способами, сами же индексы $i_1, \ldots, i_r$ можно выбрать $\binom{s-t+1}{r}$ различными способами. Следовательно, при фиксированном r получаются

$$\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{r}$$

различных особых точек. Если просуммировать по r от 1 до $s-t+1$, то получим общее число особых точек. Обозначив это число через ϑ, найдем:

$$\vartheta = \sum_{r=1}^{s-t+1}\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{r} = \sum_{r=1}^{s-t+1}\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{s-t+1-r} =$$

$$= \sum_{q=0}^{s-t}\binom{k-s}{q}\binom{s-t+1}{s-t-q}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{q=0}^{n}\binom{a}{q}\binom{b}{n-q} = \binom{a+b}{n},$$

получим:

$$\vartheta = \sum_{q=0}^{s-t}\binom{k-s}{q}\binom{s-t+1}{s-t-q} = \binom{k-t+1}{s-t} = \binom{k-t+1}{k-t+1-s+t} = \binom{k-t+1}{k-s+1}.$$

Итак,

$$\vartheta = \binom{k-t+1}{k-s+1}.$$

3°. Для вычисления суммы ρ_t^s индексов особенностей $(k-s+1)$-реперного поля, заданного матрицей (1), остается найти индекс особенности в каждом из $\binom{k-t+1}{k-s+1}$ особых точек.

Мы покажем, что этот индекс не зависит от s и для каждого из этих слоев равен $(-1)^t$. Следовательно, для суммы ρ_t^s индексов особенностей получается формула

$$\rho_t^s = (-1)^t\binom{k-t+1}{k-s+1}. \tag{5.2}$$

Пусть точка $(z_0, \zeta_0) = (z_0; 1, 0, \ldots, 0)$ — особая.

Для определенности мы допустим, что для точки

$$z_0 = (z_0^0, \ldots, z_0^{s-t}) \in Q^{s-t}$$

координата $z_0^0 \neq 0$.

Рассмотрим такую окрестность D точки (z_0, ζ_0) в U_t^s, что если

$$(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^0, \ldots, \zeta^t) \in D,$$

то $z^0 \neq 0$, $\zeta^0 \neq 0$ и, кроме того, ни один из слоев, отнесенных точкам (z, ζ) этой окрестности, не является особым, кроме слоя $E^k_{(z_0, \zeta_0)}$.

Множество L всех слоев $E^k_{(z, \zeta)}$, где $(z, \zeta) \in D$, изоморфно прямому произведению $E^k \cdot D$ фиксированного k-мерного комплексного векторного

пространства E^k на окрестность D. Гомеоморфизм $f: L \to E^k \cdot D$ отображает соответствующие слои линейно. Точке $(z, \zeta) \in D$ отнесен слой

$$E^k_{(z,\zeta)} = \zeta \cap E^n_z$$

множества L. Мы построим сейчас «непрерывное семейство» аналогичных множеств L_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; все L_λ будут изоморфны прямому произведению $E^k \cdot D$ и $L_1 = L$. Для построения множеств L_λ каждой точке $(z, \zeta) \in D$ отнесем слой

$$E^k_{(z,\zeta),\lambda} = \zeta \cap E^n_{z,\lambda},$$

где $E^n_{z,\lambda}$ — n-мерная «аффинная часть» проективного пространства P^n, определяемая условием:

$$w = (w^0, \ldots, w^n) \in E^n_{z,\lambda}$$

тогда и только тогда, когда

$$\bar{z^0} w_0 + \lambda(\bar{z^1} w^1 + \ldots + \bar{z^n} w^n) \neq 0.$$

Так как при $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta) \in D$ координата $z^0 \neq 0$, то это условие имеет смысл при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Положим

$$L_\lambda = \{E^k_{(z,\zeta),\lambda}\},$$

где $\{E^k_{(z,\zeta),\lambda}\}$ — совокупность всевозможных слоев $E^k_{(z,\zeta),\lambda}$, $(z, \zeta) \in D$. Очевидно, что $L_1 = L$.

Покажем, что при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, все $k - s + 2$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$, заданные в слое $E^k_{(z,\zeta)}$ матрицей (I), принадлежат слою $E^k_{(z,\zeta),\lambda}$. В самом деле, точка $q_i \in E^k_{(z,\zeta),\lambda}$, если $q_i \in E^n_{z,\lambda}$. Первые $s - t + 1$ координат точки q_i равны

$$\alpha_0 z^0, \alpha_1 z^1 \ldots, \alpha_{s-t} z^{s-t},$$

где z^j — координаты точки $z = q_1$, а числа $\alpha_j > 0$ [см. матрицу (I)]. Поэтому при любом $\lambda \geqslant 0$ сумма

$$\bar{z^0} \alpha_0 z^0 + \lambda(\bar{z^1} \alpha_1 z^1 + \ldots + \bar{z^{s-t}} \alpha_{s-t} z^{s-t}) > 0,$$

так как $z^0 \neq 0$, и, следовательно, $q_i \in E^n_{z,\lambda}$.

Нетрудно задать непрерывное семейство гомеоморфизмов f_λ:

$$L_\lambda \to E^k \cdot D, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

линейно отображающих каждый из слоев

$$E^k_{(z,\zeta),\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

на слой $E^k \cdot (z, \zeta)$. Следовательно, в каждом из прямых произведений L_λ матрица (I) задает $(k - s + 1)$-реперное поле с единственной особой точкой (z_0, ζ_0), и искомый индекс особенности первоначального поля в $L = L_1$ равен индексу особенности реперного поля в L_0, к вычислению которого мы и переходим.

Определим отображение $h: L_0 \to E^k \cdot D$ следующим образом: если

$$w = (w^0, \ldots, w^{k+1}) \in E^k_{(z,\zeta),0} \subset L_0,$$

то

$$h(w) = \left(\left(\frac{w^1}{w^0} - \frac{z^1}{z^0}, \ldots, \frac{w^{s-t}}{w^0} - \frac{z^{s-t}}{z^0}, \frac{w^{s-t+1}}{w^0}, \ldots, \frac{w^{k-t}}{w^0}, \frac{w^{k-t+2}}{w^0}, \ldots, \frac{w^{k+1}}{w^0}\right), (z, \zeta)\right) \in E^k \cdot D,$$

где $(z^0, \ldots, z^{s-t}; 0, \ldots, 0) \in Q^{s-t} \subset Q^{k+1}$ (см. стр. 698). Отображение h определено всюду на L_0 и является изоморфизмом, так как $w^0 \neq 0$, $z^0 \neq 0$ и координаты w^i связаны единственным соотношением [см. формулу (5.1)]

$$\zeta^0 w^{k-t+1} + \ldots + \zeta^t w^{k+1} = 0,$$

где $\zeta^0 \neq 0$.

Реперное поле, заданное в L_0 матрицей (I), переходит при изоморфизме h в реперное поле в $E^k \cdot D$, которое задается матрицей (II), получающейся из матрицы (I), если, во-первых, вычеркнуть из нее первый столбец третьей клетки, во-вторых, в полученной матрице разделить все элементы каждой строки на первый элемент той же строки и удалить первый столбец, и, наконец, вычесть из каждой строки этой последней матрицы первую строку, а затем удалить из полученной матрицы первую строку:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 u^1, \ldots, \alpha_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, 0 & \psi\zeta^0\overline{\zeta^1}, \ldots, \psi\zeta^0\overline{\zeta^t} \\ \hline \beta_1 v^1, \ldots, \beta_{s-t} u^{s-t} & \psi_1, 0, \ldots, 0 & 0, \ \ldots, \ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_1 u^1, \ldots, \delta_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, \psi_{k-s} & 0, \ \ldots, \ 0 \end{array}\right). \qquad \text{(II)}$$

Матрица (II) состоит из $k - s + 1$ строки и k столбцов. Вдоль ее i-й строки стоят координаты i-го вектора, лежащего в слое $E^k \cdot (z, \zeta)$. Величины $u^i = \dfrac{z^i}{z^0}$ являются аффинными координатами точки

$$z = (z^0, \ldots, z^{s-t}) \in Q^{s-t}, \quad z^0 \neq 0;$$

коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \delta_{s-t}$ алгебраически независимы между собой, так как получены из алгебраически независимых между собой коэффициентов $a_0, \ldots, l_{s-t}$ матрицы (I) путем рациональных операций. Далее, $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{k-s}$ — линейные неоднородные многочлены переменных u^i, коэффициенты которых вместе с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \delta_{s-t}$ алгебраически независимы.

Точку $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^0, \ldots, \zeta^t) \in D$ будем записывать в аффинных координатах:

$$(z, \zeta) = (u^1, \ldots, u^{s-t}; v^1, \ldots, v^t),$$

где

$$u^i = \frac{z^i}{z^0}, \quad v^i = \frac{\zeta^i}{\zeta^0}.$$

Получим:

$$\zeta^0\overline{\zeta^i} = \zeta^0\overline{\zeta^0}v^i = \theta v^i.$$

Матрице (II) можно придать теперь вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 u^1, \ldots, \alpha_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, 0 & \psi\theta\overline{v^1}, \ldots, \psi\theta\overline{v^t} \\ \hline \beta_1 u^1, \ldots, \beta_{s-t} u^{s-t} & \psi_1, 0, \ldots, 0 & 0, \ \ldots, \ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_1 u^1, \ldots, \delta_{s-t} u^{s-t} & 0, \ \ldots, \psi_{k-s} & 0, \ \ldots, \ 0 \end{array}\right). \qquad \text{(III)}$$

Пусть аффинные координаты особой точки

$$(z_0, \zeta_0) = (u_0^1, \ldots, u_0^{s-t}; 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют, например, условиям:

$$u_0^1 \neq 0, \ldots, u_0^r \neq 0, \ u_0^{r+1} = \ldots = u^{s-t} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant s - t.$$

Так как точка (z_0, ζ_0) — особая, то в точке z_0 должны обращаться в нуль r многочленов из $\psi_1, \ldots, \psi_{k-s}$. Если бы в нуль обращалось меньшее число многочленов, то ранг матрицы (III) был бы равен $k-s+1$ и точка (z_0, ζ_0) была бы неособой; бо́льшее же число многочленов одновременно в нуль не может обратиться в силу алгебраической независимости их коэффициентов между собой. Без нарушения общности можно предположить, что в точке z_0

$$\psi_1 = \ldots = \psi_r = 0.$$

Легко видеть, что в достаточно малой окрестности $D' \subset D$ точки (z_0, ζ_0) матрицу (III) можно продеформировать в матрицу (IV), не меняя в процессе деформации ее ранга:

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
0, \ldots, 0;\ u^{r+1}, \ldots, u^{s-t} & u^1 - u_0^1, \ldots, u^r - u_0^r;\ 0, \ldots, 0, & \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^t \\
\hline
\beta_1 u_0^1, \ldots, \beta_r u_0^r,\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\gamma_1 u_0^1, \ldots, \gamma_r u_0^r,\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\
0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0;\ \psi_{r+1}^0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, \psi_{k-s}^0 & 0, \ldots, 0
\end{array}\right) \qquad \text{(IV)}$$

где $\psi_{r+1}^0, \ldots, \psi_{k-s}^0$ — значения форм ψ_i, $i \geqslant r+1$, в точке z_0. Очевидно, что искомый индекс равен индексу особенности $(k-s+1)$-реперного поля, заданного матрицей (IV).

Размерность окрестности D' точки (z_0, ζ_0) равна $2s$. Окружим особую точку $(z_0, \zeta_0) \in D'$ сферой S^{2s-1} размерности $2s-1$.

Матрица (IV) задает отображение f этой сферы в многообразие $V_{k,\,k-s+1}$ неособых $(k-s+1)$-реперов k-мерного комплексного векторного пространства E^k [см. (1)]. Это отображение можно описать следующим образом. В E^k рассмотрим $k-s$ независимых фиксированных векторов $e_1, \ldots, e_{k-s}$, заданных $k-s$ строками матрицы (IV), начиная со второй. Через E^{k-s} обозначим $(k-s)$-мерное подпространство, натянутое на эти $k-s$ векторов, через E^s — дополнительное к E^{k-s} подпространство.

Отображение $f: S^{2s-1} \longrightarrow V_{k,\,k-s+1}$ переводит точку $(u^1, \ldots, u^{s-t}; v^1, \ldots, v^t) \in S^{2s-1}$ в $(k-s+1)$-репер, первые $k-s$ векторов которого совпадают с фиксированными векторами $e_1, \ldots, e_{k-s}$, а $(k-s+1)$-й вектор лежит в E^s и задается первой строкой матрицы (IV). Когда точка пробегает сферу S^{2s-1}, кончик $(k-s+1)$-го вектора пробегает $(2s-1)$-мерную сферу в E^s. Следовательно, f есть гомеоморфизм и, снабдив сферу $f(S^{2s-1})$ соответствующей ориентацией, его можно принять за базисный $(2s-1)$-мерный цикл многообразия $V_{k,\,k-s+1}$, [см. (1)]. Очевидно, что степень отображения f естественно проориентированной сферы $S^{2s-1} \subset D'$ на ориентированную сферу $f(S^{2s-1})$ равна $(-1)^t$, так как в первой строке матрицы (IV) операция перехода к комплексно сопряженным величинам применяется к t координатам $v^1, \ldots, v^t$.

Этим доказано, что искомый индекс равен $(-1)^t$ и, следовательно, доказана формула (5.2).

§ 6. Циклы Черна алгебраического многообразия

Из формул (4.1) и (5.2) следует

ТЕОРЕМА. *Пусть M^k — комплексное алгебраическое многообразие комплексной размерности k* [см. введение, $n^o 2$], *лежащее в комплексном проективном пространстве P^n. Его $2(k-s)$-мерный цикл Черна Γ^{k-s} дается формулой*

$$\Gamma^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} (-1)^t \binom{k-t+1}{k-s+1} \Pi_t(M^{k-s+t}), \quad s = 0, \ldots, k,$$

где алгебраические псевдомногообразия $\Pi_t(M^{k-s+t}) \subset M^k$ определены в § 4, $n^o 3$.

При $s = k$ получаем нульмерный цикл Черна, индекс которого равен эйлеровой характеристике $\chi(M^k)$ многообразия M^k [см. (1)]. Следовательно,

$$\chi(M^k) = \operatorname{ind} \Gamma^0 = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t (k-t+1) \operatorname{ind} \Pi_t(M^t).$$

Индекс $\operatorname{ind} \Pi_t(M^t)$ можно назвать, по аналогии с классом плоской алгебраической кривой, классом t-мерного сечения

$$M^t = M^k \cap P^{n-k+t}$$

многообразия M^k.

В случае плоской алгебраической кривой $M^1 \subset P^2$ для эйлеровой характеристики $\chi(M^1)$ получается известная формула

$$\chi(M^1) = 2p - q,$$

где p — степень кривой (класс нульмерного сечения), q — ее класс.

Если задана алгебраическая поверхность $M^2 \subset P^3$, то получаем:

$$\chi(M^2) = 3p - 2q + r,$$

где p — степень поверхности (класс нульмерного сечения), q — класс одномерного сечения поверхности, r — класс самой поверхности.

Легко подсчитать, что для неособой поверхности степени p класс одномерного сечения $q = p(p-1)$, а класс поверхности $r = p(p-1)^2$. Следовательно,

$$\chi(M^2) = 3p - 2p(p-1) + p(p-1)^2 = 6p - 4p^2 + p^3.$$

Аналогичные формулы можно вывести для неособых гиперповерхностей произвольных размерностей.

Поступило
1.XI.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chern S., Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math., 47, 1 (1946), 85—121.

[2] Гамкрелидзе Р. В., Вычисление циклов Черна алгебраических многообразий, Доклады Ак. наук СССР, 90, № 5 (1953), 719—722.

[3] Понтрягин Л. С., Один метод вычисления гомологий, Матем. сборн., 11 (53) (1942), 3—14.

[4] Ehresmann C., Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math., 35, 2 (1934), 396—443.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 707—712

Э. Л. БЛОХ

О НАИБОЛЕЕ ПЛОТНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ НА ГИПЕРСФЕРЕ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе находится верхняя оценка для коэффициента заполнения поверхности гиперсферы при наиболее плотном расположении на ней сферических сегментов с углом раскрытия $2\theta_*$. Полученная оценка является более точной, нежели оценка, данная Шаботи, при $\theta_* \leqslant \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим в пространстве n измерений гиперсферу единичного радиуса. На поверхности сферы разместим центры сфер радиуса r_0. Такие сферы вырежут из поверхности основной сферы сферические сегменты с углом раствора $2\theta_0$ (рис. 1), причем

$$r_0 = 2\sin\frac{\theta_0}{2}.$$

Если сферы радиуса r_0 не пересекаются, то безусловно не будут пересекаться сферические сегменты, определяемые углом θ_0, и охватывающие их сегменты большего угла раствора $2\theta_*$ (рис. 1), где

$$\sin\theta_* = 2\sin\frac{\theta_0}{2}.$$

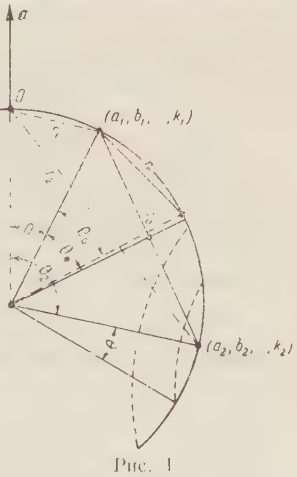


Рис. 1

Обозначим расстояние от центра каждой сферы радиуса r_0 до некоторой произвольной точки O, лежащей на поверхности основной сферы, через r_i (на рис. 1 показаны r_1 и r_2) и оценим сумму

$$\sum_{i=1}^{p} r_i^2.$$

Для этого введем ортогональную систему координат $a, b, \ldots, k$ с началом в точке O и выберем ось a так, чтобы она проходила через центр основной сферы. Координаты центров сфер радиуса r_0 обозначим через $a_i, b_i, \ldots, k_i$; тогда

$$\sum_{i=1}^{p} r_i^2 = \sum_{i-1}^{p} (a_i^2 + b_i^2 + \cdots + k_i^2).$$

Как показано в работе ([1]), при произвольном расположении в пространстве любого числа измерений непересекающихся сфер одинакового радиуса r_0 имеет место неравенство:

$$p\sum_{i=1}^{p}(a_i^2+b_i^2+\cdots+k_i^2)\geqslant 2p(p-1)r_0^2+\left(\sum_{i=1}^{p}a_i\right)^2+\\+\left(\sum_{i=1}^{p}b_i\right)^2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{p}k_i\right)^2$$

Так как в рассматриваемом случае центры сфер лежат на поверхности основной сферы, радиус которой равен единице, то при выбранном направлении оси a для координаты a_i имеем соотношение

$$a_i=-\frac{r_i^2}{2},$$

откуда

$$\left(\sum_{i=1}^{p}a_i\right)^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{p}(a_i^2+b_i^2+\cdots+k_i^2)\right]^2$$

и, следовательно,

$$p\sum_{i=1}^{p}r_i^2\geqslant 2p(p-1)r_0^2+\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{p}r_i^2\right)^2.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\sum_{i=1}^{p}r_i^2\geqslant 2p\left[1-\sqrt{1-2\frac{p-1}{p}r_0^2}\right].$$

Обозначая угол между радиусами основной сферы, проходящими через точку O и центр i-й сферы радиуса r_0, через θ_i, имеем:

$$r_i=2\sin\frac{\theta_i}{2}.$$

Мы получаем:

$$\sum_{i=1}^{p}\sin^2\frac{\theta_i}{2}\geqslant\frac{p}{2}\left[1-\sqrt{1-8\frac{p-1}{p}\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\right]=\frac{p}{2}\left[1-\sqrt{1-2\frac{p-1}{p}\sin^2\theta_*}\right].$$

Введем угол θ_m так, чтобы

$$\sin\theta_m=\sqrt{2}\sin\theta_*=2\sqrt{2}\sin\frac{\theta_0}{2}.$$

Тогда последнее неравенство принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{p}\sin^2\frac{\theta_i}{2}\geqslant\frac{p}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{p-1}{p}\sin^2\theta_m}\right].$$

Сохраняя положение центров сфер радиуса r_0, увеличим их радиусы до величины r_m так, чтобы вырезаемые новыми сферами сферические сегменты имели угол раствора $2\theta_m$. Естественно, что увеличенные сферы и определяемые ими сферические сегменты могут частично пересекать друг друга. Предположим, что новые сегменты состоят из вещества переменной плотности $\rho(\theta)$, зависящей от угла θ, показанного на рис. 1, так что

$$\rho(\theta)=\sin\frac{\theta_m}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Тогда в центре сегмента ($\theta=0$)

$$\rho=\sin^2\frac{\theta_m}{2},$$

а на его границе ($\theta = \theta_m$)

$$\rho = 0.$$

Если p таких сегментов перекрываются в некоторой области, содержащей точку O, то суммарная плотность в этой точке будет равна

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(\theta_i) = p \sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sum_{i=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_i}{2} \leqslant p \sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \frac{p}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{p-1}{p} \sin^2 \theta_m}\right],$$

или

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(\theta_i) \leqslant \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_m}{\cos \theta_m + \sqrt{\cos^2 \theta_m + \frac{1}{p} \sin^2 \theta_m}}.$$

Однако, как указано в работе ([2]), если не перекрываются сферические сегменты с углом раствора $2\theta_*$, то сферические сегменты с углом раствора $2\theta_m$ не могут иметь более чем $n+1$ общих точек (где n — число измерений). Таким образом,

$$p \leqslant n + 1$$

и, значит, суммарная плотность нигде на поверхности основной сферы не может превышать величины

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(\theta_i) \leqslant \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_m}{\cos \theta_m + \sqrt{\cos^2 \theta_m + \frac{\sin^2 \theta_m}{n+1}}}.$$

Следовательно, общая масса вещества, размещенного на этой сфере, будет не больше чем

$$\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_m S_n(\pi)}{\cos \theta_m + \sqrt{\cos^2 \theta_m + \frac{\sin^2 \theta_m}{n+1}}},$$

где $S_n(\pi)$ — площадь поверхности гиперсферы единичного радиуса.

С другой стороны, масса указанного выше вещества равна произведению числа сегментов ν_n на массу сегмента $M_n(\theta_m)$ и, следовательно,

$$\nu_n \leqslant \frac{\sin^2 \theta_m}{\cos \theta_m + \sqrt{\cos^2 \theta_m + \frac{\sin^2 \theta_m}{n+1}}} \cdot \frac{S_n(\pi)}{2M_n(\theta_m)}.$$

Если перейти к коэффициенту заполнения площади непересекающимися сегментами с углом раствора $2\theta_*$, то, обозначая этот коэффициент через $K_n(\theta_*)$,

$$K_n(\theta_*) = \nu_n \frac{S_n(\theta_*)}{S_n(\pi)},$$

где $S_n(\theta_*)$ — площадь поверхности сегмента с углом раствора $2\theta_*$, получим:

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{\sin^2 \theta_m}{\cos \theta_m + \sqrt{\cos^2 \theta_m + \frac{\sin^2 \theta_m}{n+1}}} \cdot \frac{S_n(\theta_*)}{2M_n(\theta_m)}.$$

Для вычисления $S_n(\theta_*)$ и $M_n(\theta_m)$ воспользуемся известными выражениями (для сферы единичного радиуса):

$$S_n(\theta) = \omega_{n-1} \int_0^{\theta} \sin^{n-2} u \, du, \quad M_n(\theta) = \omega_{n-1} \int_0^{\theta} \rho(u) \sin^{n-2} u \, du,$$

где ω_{n-1} — угловая мера сферы в пространстве $n-1$ измерения. Тогда, так как

$$\int_0^{\theta_m} \rho(u)\sin^{n-2}u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_m}(\cos u - \cos\theta_m)\sin^{n-2}u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^{n-1}\theta_m}{n-1} - \cos\theta_m\int_0^{\theta_m}\sin^{n-2}u\,du\right]$$

и для $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\theta}\sin^{n-2}u\,du = \sin^{n-1}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$

получаем:

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{\sin^2\theta_m}{\cos\theta_m + \sqrt{\cos^2\theta_m + \frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}}\left(\frac{\sin\theta_*}{\sin\theta_m}\right)^{n-1}\cdot\frac{\lambda_n(\theta_*)}{\frac{1}{n-1} - \cos\theta_m\,\lambda_n(\theta_m)},$$

где

$$\lambda_n(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}, \qquad \sin\theta_m = \sqrt{2}\sin\theta_*, \qquad \left(\theta_* \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$

Учитывая последнее соотношение, окончательно получим:

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{n-1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\frac{\sin^2\theta_m}{\cos\theta_m + \sqrt{\cos^2\theta_m + \frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}}\cdot\frac{\lambda_n(\theta_*)}{1-(n-1)\cos\theta_m\lambda_m(\theta_m)}. \qquad (1)$$

Заметим, что при $\theta_* \to 0$ совокупность сферических сегментов на сфере в пространстве n измерений можно рассматривать как совокупность сфер в пространстве на единицу более низкого числа измерений. В этом случае $K_n(0)$ представляет собой коэффициент заполнения $(n-1)$-мерного пространства не пересекающимися между собой сферами при их наиболее плотной упаковке (ρ_{n-1}). Таким образом, заменяя n на $n+1$, получаем:

$$\rho_n = \lim_{\theta_* \to 0} K_{n+1}(\theta_*),$$

т. е. коэффициент ρ_n может быть получен как частный случай $K_{n+1}(\theta_*)$ при $\theta_* = 0$.

Следует отметить, что если сразу считать $\theta_* \to 0$, то приведенные выше рассуждения будут совпадать с рассуждениями Бликфельдта (1), использованными им для определения верхней оценки коэффициента ρ_n. Следовательно, полученная оценка для $K_n(\theta_*)$ при замене n на $n+1$ и $\theta_* = 0$ должна совпадать с известной оценкой Бликфельдта, согласно которой

$$\rho_n \leqslant \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Но при $\theta \to 0$

$$\lambda_n(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{n+1} + O(\sin^4\theta)$$

и

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{n-1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\sin^2\theta_m}{\cos^2\theta_m + \sqrt{\cos^2\theta_m + \frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{n-1} + O(\sin^2\theta_m)\right]}{1 - \cos\theta_m - \frac{\cos\theta_m \sin^2\theta_m}{2}\frac{n-1}{n+1} + O(\sin^4\theta_m}$$

или

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{n-1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \frac{2\cos^2\frac{\theta_m}{2}}{\cos\theta_m + \sqrt{\cos^2\theta_m + \frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}} \cdot \frac{\frac{1}{n-1} + O(\sin^2\theta_m)}{1 - \frac{n-1}{n+1}\cos^2\frac{\theta_m}{2}\cos\theta_m + O(\sin^2\theta_m)}$$

и, следовательно,

$$K_n(0) \leqslant \frac{n+1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, \quad K_{n+1} \leqslant \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}$$

Сравним полученный результат с верхней оценкой для $K_n(\theta_*)$, найденной в 1953 г. Шаботи ([2]). Не прибегая к дополнительным упрощениям, использованным в работе Шаботи и несколько ухудшающим его результат, полученную им верхнюю оценку для ν_n (и, следовательно, для $K_n(\theta_*)$) в наших обозначениях можно представить в виде:

$$K_n(\theta_*) \leqslant (n+1)\left(\frac{\sin\theta_*}{\sin\theta_m}\right)^{n-1} \frac{\lambda_n(\theta_*)}{\lambda_n(\theta_m)} = \frac{n+1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{\lambda_n(\theta_*)}{\lambda_n(\theta_m)}. \qquad (2)$$

При $\theta_* = 0$ получаем:

$$K_n(0) \leqslant \frac{n+1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \text{ или } K_{n+1}(0) = \rho_n \leqslant \frac{n+2}{2^{\frac{n}{2}}} = 2\frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}},$$

что ровно в 2 раза выше оценки Бликфельдта. Для сравнения при всех других значениях θ_* $\left(0 \leqslant \theta_* \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ разделим выражение (1) на величину (2); тогда получаем:

$$\Delta_n(\theta_*) = \frac{n-1}{n+1} \frac{\sin^2\theta_m}{\cos\theta_m + \sqrt{\cos^2\theta_m + \frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}} \cdot \frac{\lambda_n(\theta_m)}{1 - (n-1)\cos\theta_m\lambda_n(\theta_m)}.$$

При $\theta_* = 0$, как было показано, $\Delta_n(0) = \frac{1}{2}$. При $\theta_* = \frac{\pi}{4}$, $\theta_m = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\Delta_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{n-1}{n+1}\sqrt{n+1}\,\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n-1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

для $n = 3$ $\Delta_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ и при $n \to \infty$ $\Delta_n\left(\frac{\pi}{4}\right) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}} \simeq 1{,}25$.

Так как

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi}} \leqslant 1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{2},$$

то

$$\cos\theta\lambda_n(\theta) \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{\sin^2\theta}{n^2-1}$$

и, следовательно,

$$\Delta_n(\theta_*) \leqslant \frac{1-\frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}{\cos\theta_m\left[\cos\theta_m+\sqrt{\cos^2\theta_m+\frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}\right]} \leqslant \frac{1}{2\cos^2\theta_m} = \frac{1}{2(1-2\sin^2\theta_*)}$$

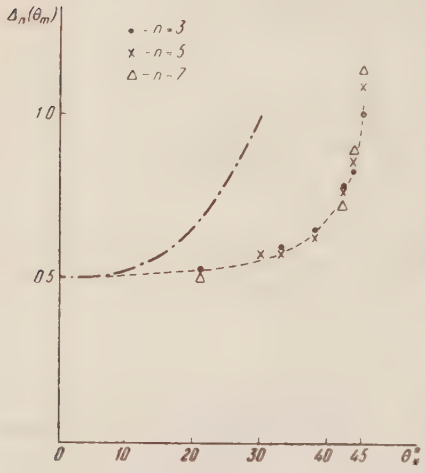


Рис. 2

Таким образом, для всех $\theta_m < \frac{\pi}{4}$, что соответствует углу $\theta_* < \frac{\pi}{6}$, величина $\Delta_n(\theta_*) < 1$.

Приведенное сравнение показывает, что полученная верхняя оценка коэффициента $K_n(\theta_*)$ для всех $\theta_* < \frac{\pi}{6}$ по своей точности превосходит оценку Шаботи и уступает ей при $\theta_* \to \frac{\pi}{4}$.

Характер зависимости $\Delta_n(\theta_*)$ от угла θ_* для малых значений n показан на рис. 2, где также дана зависимость

$$\frac{1}{2(1-2\sin^2\theta_*)},$$

ограничивающая сверху значение $\Delta_n(\theta_*)$ для $\theta_* \leqslant \frac{\pi}{6}$. В заключение упростим несколько оценку (1) для углов $\theta_* < \frac{\pi}{6}$, воспользовавшись неравенством

$$\cos\theta\lambda_n(\theta) \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{\sin^2\theta}{n^2-1}.$$

Имеем:

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{n+1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1-\frac{\sin^2\theta_*}{n+1}}{\cos\theta_*\left[\cos\theta_m+\sqrt{\cos^2\theta_m+\frac{\sin^2\theta_m}{n+1}}\right]} \leqslant \frac{n+1}{2^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta_*\cos\theta_m},$$

или окончательно:

$$K_n(\theta_*) \leqslant \frac{n+1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\cos\theta_*\sqrt{1-2\sin^2\theta_*}} \quad \left(\theta_* \leqslant \frac{\pi}{6}\right).$$

Поступило
15. IX. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blichfeldt H. F., The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, Math. Ann., 101, 4 (1929), 605—608.

[2] Chabauty C., Résultats sur l'empilement de calottes égales sur une périsphère de R^n et correction à un travail antérieur, C. R., 236, 15 (1953), 1462—1464.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 713—750

А. И. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОДНОЙ «ПОЧТИ БИНАРНОЙ» ЗАДАЧЕ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе доказываются некоторые аддитивные теоремы с простыми числами, являющиеся в некотором смысле приближением к бинарной проблеме Гольдбаха.

Настоящая работа состоит из двух глав. В первой главе используется расширенная гипотеза Римана для того, чтобы показать принципиальную сторону метода. Кроме того, при ее помощи получается значительное усиление основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если достаточно большое число N записать в p-ичной системе счисления:*

$$N = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_R p^R, \tag{1}$$

то для того чтобы получить сумму двух простых чисел, достаточно изменить ограниченное абсолютной константой число коэффициентов, каждый на ± 1, причем нули изменить на $+1$, $p-1$ — на -1.

Доказательство проведено методом Ю. В. Линника, изложенным в его работе (1).

Если же принять расширенную гипотезу Римана и положить

$$M = \left[\left(\frac{\ln N}{\ln p}\right)^{\frac{1}{m}}\right],$$

где $m \geqslant 1$ — некоторое фиксированное целое число, то теорема 1 усиливается следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Если достаточно большое число N записать в p-ичной системе счисления:*

$$N = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_M p^M + \cdots + a_R p^R, \tag{2}$$

то для того чтобы получить сумму двух простых чисел, достаточно изменить ограниченное абсолютной константой число коэффициентов среди первых M, каждый на ± 1, причем нули изменить на $+1$, $p-1$ — на -1.

В дальнейшем мы полагаем: N — достаточно большое целое положительное число, p — некоторое целое положительное число, бóльшее единицы и фиксированное для всех N, $\varepsilon_n = +1$ либо -1 (по нашему

усмотрению) для любого n,

$$M = \left[\left(\frac{\ln N}{\ln p}\right)^{\frac{1}{m}}\right];$$

в первой главе m — любое целое положительное число, фиксированное для всех $N > N_0$, во второй главе $m = 1$.

Теоремы 1 и 2 будут получены из более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Для всех $N > N_0$ можно подобрать такое фиксированное K_0, что любое $N > N_0$ можно представить в виде*

$$N = p_1 + p_2 + \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} + \varepsilon_{x_2} p^{x_2} + \cdots + \varepsilon_{x_k} p^{x_k}, \tag{3}$$

где p_1 и p_2 — простые числа, $x_i \leqslant M$, $k \leqslant k_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ попарно не равны, числа N и $p \cdot k$ имеют одинаковую четность.

Действительно, допустим, что теорема 3 доказана; в таком случае воспользуемся произвольностью выбора знака ε_n и положим

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -1, & \text{если } a_n = 0, \\ +1, & \text{если } a_n \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда мы получаем теорему 1 без гипотезы Римана при $m = 1$, $R = M$ и теорему 2 с гипотезой Римана при $m \geqslant 1$.

Глава I

§ 1. Допустим, что расширенная гипотеза Римана верна, и на ее основе докажем следующую теорему, из которой получим теорему 3 как следствие.

ТЕОРЕМА 1.1. *Из всех 2^M систем $(\varepsilon_1 p, \varepsilon_2 p^2, \ldots, \varepsilon_M p^M)$ выберем одну, вполне определенную систему с заданными числами ε_i, $1 \leqslant i \leqslant M$. Положим*

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1} \sum_{N_1 = p_1 + p_2} \ln p_1 \cdot \ln p_2; \tag{1.1.1}$$

тогда

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N), \tag{1.1.2}$$

где

$$N_1 = N - \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} - \ldots - \varepsilon_{x_k} p^{x_k} > 0, \tag{1.1.3}$$

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p \mid N_1} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid N_1} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \tag{1.1.4}$$

$$|\rho(N)| = B(1-\eta)^k N M^k,$$

причем при данном фиксированном p B — константа, $\eta > 0$ — произвольно малое фиксированное число.

Доказательство. Введем суммы:

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i \alpha n} \Lambda(n),$$

$$T(\alpha) = \sum_{n=1}^{M} e^{-\frac{\varepsilon_n p^n}{N}} e^{-2\pi i \alpha \varepsilon_n p^n}.$$

Тогда получаем:

$$Q_k(N, p) = e \cdot \int_0^1 S^2(\alpha) T^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N} d\alpha + O\left(N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right).$$

Таким образом, изучение функции $Q_k(N, p)$ свелось к изучению интеграла

$$\int_0^1 S^2(\alpha)\, T^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha.$$

Пусть τ подчинено условию

$$(\ln N)^{10} < \tau < \sqrt{N}.$$

Всякое $\vartheta \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha,$$

где $|\alpha| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, $1 \leqslant q \leqslant \tau$, $(a, q) = 1$. Если ввести обозначения:

$$\tau_\chi = \sum_{l=1}^{q} \chi(l) \cdot e^{2\pi i \frac{l}{q}},$$

$$A_\chi(\alpha) = \sum \chi(n)\, \Lambda(n)\, e^{-n\left(\frac{1}{N} + 2\pi i \alpha\right)}, \tag{1.1.5}$$

то мы получим классическое равенство:

$$S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\, \bar{\tau}_\chi \cdot A_\chi(\alpha) + B \ln^3 q. \tag{1.1.6}$$

Кроме того, известно соотношение:

$$A_\chi(\alpha) = \frac{E(\chi)}{x} - \sum x^{-\rho_\chi} \Gamma(\rho_\chi) + B \ln^3 N, \tag{1.1.7}$$

где

$$E(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

$x = \frac{1}{N} + 2\pi i \alpha$, $\rho_x = \frac{1}{2} + it$ пробегает нули $L(S, \chi)$. Используя последние равенства и оценки работы [1], находим, что

$$I_q(N_1) = \sum_{(a, q)=1} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^2\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + \alpha\right) N_1}\, d\alpha =$$

$$= N_1 \cdot e^{-\frac{N_1}{N}} \cdot A_q(N_1) + B \cdot \frac{N \cdot \ln^3 N}{\sqrt{q \cdot \tau}}, \tag{1.1.8}$$

где

$$A_q(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a, q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1}, \tag{1.1.9}$$

и, кроме того, при условии, что $q > \sqrt{\tau}$, получаем:

$$I_{aq}(N_1) = \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left| S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) \right|^2 d\alpha = B \cdot \frac{N \cdot \ln^3 N}{\tau}. \tag{1.1.10}$$

§ 2. Перейдем к изучению интеграла

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 |T(\alpha)|^{2m}\, d\alpha. \tag{1.2.1}$$

Предварительно докажем две леммы, которые потребуются при его оценке.

ЛЕММА 1.1. *Если* $1 \leqslant k_i \leqslant M$, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, *то число решений уравнения*

$$p^{k_1} + p^{k_2} + \cdots + p^{k_m} = p^{k_{m+1}} + \cdots + p^{k_{2m}}, \tag{1.2.2}$$

обозначенное через $F(M, m)$, *имеет следующую оценку*:

$$F(M, m) \leqslant (m!)^2 M^m = B \ln N. \tag{1.2.3}$$

Доказательство леммы см. в работе А. Г. Постникова ([12]).

Введем для данного целого положительного n функцию

$$f(n) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{d},$$

где p — простой делитель n. В таком случае имеет место

ЛЕММА 2.1. *Если* $1 \leqslant k_i \leqslant M$, $1 \leqslant i \leqslant 2m$ *и*

$$y = p^{k_1} + p^{k_2} + \cdots + p^{k_m} - p^{k_{m+1}} - \cdots - p^{k_{2m}} \neq 0,$$

то имеем оценку:

$$\sum_{y \neq 0} f(|y|) = B \cdot \ln^2 N. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Положим

$$p^{k_1} + \cdots - p^{k_{2m}} = p^{k_1} + q;$$

тогда

$$\sum_{y} f(|y|) = \sum_{q>0} \sum_{k_1=1}^{M} f(p^{k_1} + q) + \sum_{q<0} \sum_{p^{k_1}+q>0} f(p^{k_1} + q) +$$

$$+ \sum_{q<0} \sum_{p^{k_1}+q<0} f(-p^{k_1} - q) + \sum_{q=0} \sum_{k=1}^{M_1} f(p^{k_1}). \tag{1.2.5}$$

Рассмотрим первую двойную сумму в правой части (1.2.5). Зафиксируем какое-либо $q > 0$ и для этого q рассмотрим $\sum_{k_1=1}^{M}$ Если $q = p^\delta q'$, где $\delta \geqslant 1$, и $q' \equiv l \pmod p$, $1 \leqslant l \leqslant p-1$, то, учитывая мультипликативность $f(n)$, имеем:

$$\sum_{k_1=1}^{M} f(p^{k_1} + q) = \sum_{k_1=1}^{\delta-1} f(p^{k_1} + p^\delta \cdot q') + \sum_{k_1=\delta}^{M} f(p^{k_1} + p^\delta \cdot q') \ll$$

$$\ll \sum_{k_1=1}^{\delta-1} f(1 + p^{k_1} \cdot q') + \sum_{k_1=0}^{M-\delta} f(p^{k_1} + q') \ll \sum_{k_1=1}^{M} f(1 + p^{k_1} q') + \sum_{k_1=0}^{M} f(p^{k_1} + q')$$

Оценим сумму (1.2.6)

$$\sum_{k_1=1}^{M} f(p^{k_1} \cdot q' + 1) = \sum_{k_1=1}^{M} \sum_{d|1+p^{k_1}q'} \frac{\mu^2(d)}{d} = \sum_{n=1}^{Q} \frac{\mu^2(n)}{n} \sum_{\substack{p^{k_1}q'+1 \equiv 0 \pmod n \\ k_1 \leqslant M}} 1,$$

где $Q = \max(p^{k_1} q' + 1)$.

Заметим, что если мы фиксируем наименьшее $k_1 = k^*$ такóе, что

$$p^{k^*} \cdot q' + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

то все остальные k_1, удовлетворяющие этому сравнению, должны иметь вид:

$$k_1 = k^* + rl(n),$$

где $l(n) = \min \sigma$ при условии, что $p^\sigma \equiv 1 \pmod{n}$. Это условие необходимо, так как если

$$p^{k^*} \cdot q' + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

и

$$p^{k^*+a} q' + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

то, вычитая первое сравнение из второго, получим, что

$$p^a \equiv 1 \pmod{n},$$

т. е. $a = r \cdot l(n)$. Это же условие и достаточно. Действительно, если $a = r \cdot l(n)$ и $k_1 = k^* + rl(n)$, то в этом случае

$$p^{k_1} \cdot q' + 1 = p^{k^*} \cdot p^{rl(n)} \cdot q' + 1 \equiv p^{k^*} q' + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

и, следовательно,

$$\sum_{p^{k_1} q' + 1 \equiv 0 \pmod{n}} 1 \leqslant \frac{M}{l(n)}.$$

Учитывая эту оценку, получаем:

$$\sum_{k_1 \leqslant M} f(1 + p^{k_1} q') \leqslant \sum_{n=1}^{Q} \frac{\mu^2(n)}{n} \frac{M}{l(n)} \leqslant M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{nl(n)}.$$

Но, как показал Н. П. Романов ([9]), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{nl(n)}$$

сходится и, следовательно,

$$\sum_{k \leqslant M} f(1 + p^{k_1} \cdot q') = B \cdot M. \tag{1.2.7}$$

Оценим вторую сумму в правой части (1.2.6):

$$\sum_{k_1=2}^{M} f(p^{k_1} + q') = \sum_{k_1=1}^{M-1} f(p \cdot p^{k_1} + q') \leqslant \sum_{k_1=1}^{M} f(d) \cdot f(d\, p^{k_1} + q'') \ll$$

$$\ll \sum_{k_1=1}^{M} f(d_1 p^{k_1} + q''),$$

где $d \cdot d_1 = p$, $q' = dq''$ $(q'', p) = 1$,

$$\sum_{k_1=1}^{M} f(d_1 \cdot p^{k_1} + q'') = \sum_{k_1=1}^{M} \sum_{d \mid d_1 p^k + q''} \frac{\mu^2(d)}{d} = \sum_{n=1}^{Q} \frac{\mu^2(n)}{n} \sum_{d_1 \cdot p^{k_1} + q'' \equiv 0 \pmod{n}} 1.$$

Так как $(q'', p) = 1$, то $(n, p) = 1$, и если для данного q'' найдется такое наименьшее $k_1 = k^*$, что

$$d_1 p^{k^*} + q'' \equiv 0 \pmod{n},$$

то все остальные k_1 должны удовлетворять условию:

$$k_1 = k^* + r \cdot l(n).$$

Необходимость и достаточность этого условия доказываются аналогично предыдущему. Таким образом,

$$\sum_{d \cdot p^{k_1} + q'' \equiv 0 \pmod n} 1 \leqslant \frac{M}{l(n)}.$$

Используя вторично теорему Н. П. Романова, получаем:

$$\sum_{k_1=2}^{M} f(p^{k_1} + q') \leqslant M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n \cdot l(n)} = B \cdot M.$$

Учитывая, что $f(n) = B \cdot \ln \ln n$, окончательно имеем:

$$\sum_{k_1=0}^{M} f(p^{k_1} + q') = B \cdot M. \tag{1.2.8}$$

Подставляя (1.2.7) и (1.2.8) в (1.2.6), находим:

$$\sum_{q>0} \sum_{k_1=1}^{M} f(p^{k_1} + q) = B \cdot M \cdot \sum_{q>0} 1 = B \cdot M^{2m} = B \cdot \ln^2 N.$$

Аналогично получаем следующие оценки:

$$\sum_{q<0} \sum_{p^{k_1}+q>0} f(p^{k_1} + q) = B \cdot \ln^2 N,$$

$$\sum_{q<0} \sum_{p^{k_1}+q<0} f(-p^{k_1} - q) = B \cdot \ln^2 N,$$

$$\sum_{q=0} \sum_{k_1=0}^{M} f(p^k) = B \cdot \ln^2 N.$$

Подставляя их в правую часть (1.2.5), получаем лемму 2.

§ 3. Используя леммы 1.1 и 2.1, можно оценить интеграл (1.2.1).

ТЕОРЕМА А. *Имеет место следующее неравенство*:

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha < c \cdot N \cdot \ln^2 N, \tag{1.3.1}$$

где c — некоторая константа, зависящая только от m и p.

Доказательство. Сумму $S(\alpha)$ разобьем на две части:

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) + S_2(\alpha),$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_p e^{-\frac{p}{N}} e^{-2\pi i \alpha p} \ln p, \qquad S_2(\alpha) = \sum_{n \neq p} e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i \alpha n} \Lambda(n).$$

В таком случае

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha \ll \int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha + \int_0^1 |S_2(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha, \tag{1.3.2}$$

но

$$\int_0^1 |S_2(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha = B \cdot \ln^2 N \cdot \int_0^1 |S_2(\alpha)|^2 d\alpha = B\sqrt{N} \ln^6 N. \quad (1.3.3)$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (1.3.2) Разобьем $T(\alpha)$ на две суммы: $T_1(\alpha)$ и $T_2(\alpha)$ по следующему принципу: к сумме $T_1(\alpha)$ отнесем члены с $\varepsilon_n = +1$, к сумме $T_2(\alpha)$ — члены с $\varepsilon_n = -1$; тогда

$$\int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} d\alpha \ll$$

$$\ll \int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 |T_1(\alpha)|^{2m} d\alpha + \int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 |T_2(\alpha)|^{2m} d\alpha. \quad (1.3.4)$$

Трактуя первый и второй интегралы в правой части (1.3.4) как суммы по решениям уравнения

$$p_1 - p_2 + p^{k_1} + \cdots - p^{k_{2m}} = 0,$$

мы найдем, что каждый из них не превосходит интеграла:

$$\int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 \cdot |T_3(\alpha)|^{2m} d\alpha, \quad (1.3.5)$$

где

$$T_3(\alpha) = \sum_{n=1}^{M} e^{-\frac{p^n}{N}} e^{-2\pi i \alpha p^n}.$$

Оценим интеграл (1.3.5):

$$\int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 |T_3(\alpha)|^{2m} d\alpha \leqslant \sum_{\substack{p_1 - p_2 = y \\ y = p_1^{k_1} + \ldots - p^{k_{2m}}}} e^{-\frac{p_1+p_2}{N}} \ln p_1 \cdot \ln p_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{y=0 \\ p_1,\ y}} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln^2 p_1 + \sum_{\substack{p_1,\ y \neq 0 \\ p_1 - p_2 = y}} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln p_1 \ln p_2, \quad (1.3.6)$$

но

$$\sum_{p_1} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln^2 p_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N(2^k-1) < p_1 \leqslant N(2^{k+1}-1)} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln^2 p_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k} \ln N \cdot 2^{k+1} \cdot \sum_{N(2^k-1) < p \leqslant N(2^{k+1}-1)} \ln p \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k} \vartheta(N \cdot 2^{k+1}) \ln N \cdot 2^k \leqslant$$

$$\leqslant N \cdot \ln N \sum e^{-2^k} \cdot 2^{k+1} \ln 2^{k+1} < 3 \cdot N \cdot \ln N,$$

и, следовательно, используя лемму 1.1, получаем:

$$\sum_{\substack{y, p_1 \\ y=0}} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln^2 p_1 = BN \ln N \cdot \sum_{y=0} 1 = B \cdot N \cdot \ln^2 N. \quad (1.3.7)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{p_1-p_2=\nu} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln p_1 \ln p_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{N(2^k-1)<p_1\leqslant N(2^{k+1}-1) \\ p_1-p_2=\nu}} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln p_1 \ln p_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k} \ln^2 N \cdot 2^{k+1} \sum_{\substack{p_1-p_2=\nu \\ p_1\leqslant N\cdot 2^{k+1}}} 1. \tag{1.3.8}$$

Но, по теореме Л. Г. Шнирельмана, обобщающей теорему Бруна, имеем:

$$\sum_{\substack{p_1-p_2=\nu \\ p_1\leqslant N\cdot 2^{k+1}}} = B\cdot f(|\nu|)\cdot \frac{N\cdot 2^{k+1}}{\ln^2 N\cdot 2^{k+1}}.$$

Подставляя эту оценку в (1.3.8), получаем:

$$\sum_{p_1-p_2=\nu} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln p_1 \cdot \ln p_2 = B\cdot f(|\nu|)\cdot N,$$

и, следовательно, используя лемму 2.1, находим:

$$\sum_{\substack{p_1-p_2=\nu \\ \nu\neq 0}} e^{-\frac{p_1}{N}} \ln p_1 \ln p_2 = B\cdot N\cdot \sum_{\nu\neq 0} f(|\nu|) = B\cdot N\cdot \ln^2 N. \tag{1.3.9}$$

Соединяя оценки (1.3.9), (1.3.8), (1.3.3), получаем теорему А.

§ 4. Займемся изучением поведения модуля суммы $T(\alpha)$ на сегменте $[0,1]$ и установим следующую теорему.

ТЕОРЕМА В. *Пусть* $\mathfrak{E}_\eta$ *— множество тех точек* $\alpha\in[0,1]$, *где*

$$|T(\alpha)|>(1-\eta)M. \tag{1.4.1}$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\mathfrak{E}_\eta < p^{-(1-13\sqrt{\eta})M} \tag{1.4.2}$$

при условии, что $\eta\leqslant p^{-24}$.

Доказательство. Вводя обозначения $\lambda = e^{-\frac{1}{N}}$ и $\alpha_n = \alpha\cdot p^n$, получим:

$$|T(\alpha)| = \left|\sum_{n=1}^{M} \lambda^{\varepsilon_n\cdot p^n} e^{-2\pi i\alpha_n\varepsilon_n}\right| = \sum_{n=1}^{M} \lambda^{\varepsilon_n\cdot p^n}\cos 2\pi(\varepsilon_n\cdot\alpha_n-\varphi),$$

где $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ определяется взаимно однозначно относительно α в этом же интервале.

Можно утверждать, что среди чисел α_n при условии $p^n\leqslant p^M$ найдутся по крайней мере $M_1>(1-\sqrt{\eta})M$ таких, что

$$\cos 2\pi(\alpha_n\varepsilon_n-\varphi)>1-2\sqrt{\eta}. \tag{1.4.3}$$

Действительно, в противном случае мы получили бы, что

$$|T(\alpha)| = \sum_{n=1}^{M}\cos 2\pi(d_n\cdot\varepsilon_n-\varphi)+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant(1-\sqrt{\eta})M} 1+(1-2\sqrt{\eta}) \sum_{(1-\sqrt{\eta})M\leqslant n\leqslant M} 1+O(1)=M(1-2\eta)+O(1),$$

что противоречит условию (1.4.1) при достаточно большом N.

Число α_n, удовлетворяющее условию (1.4.3), назовем особым числом, а соответствующий $\cos 2\pi(\alpha_n\cdot\varepsilon_n-\varphi)$ — особым числом суммы.

Для особых чисел из условия (1.4.3) элементарно получаем:

$$\alpha_n\cdot\varepsilon_n-\varphi-k_n=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}, \quad -1<\theta<1. \tag{1.4.4}$$

В дальнейшем на протяжении всего доказательства число θ всегда будет обозначать число из интервала $(-1,1)$, причем в разных равенствах оно может быть различным.

Введем обозначение:

$$S=\sum_{n=1}^{M}\lambda^{\varepsilon_n\cdot p^n}\cos 2\pi(\varepsilon_n\alpha_n-\varphi)>(1-\eta)M. \tag{1.4.5}$$

В сумме S имеется M_1 особых членов, но $M_1>(1-\sqrt{\eta})M>\frac{1}{2}M$, следовательно, среди них обязательно найдутся два соседних, для которых одновременно имеем:

$$\begin{aligned}\alpha_n\cdot\varepsilon_n-\varphi-k_n&=\frac{\theta}{\pi}\cdot\eta^{\frac{1}{4}},\\ \alpha_{n+1}\varepsilon_{n+1}-\varphi-k_{n+1}&=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}.\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Относительно знаков ε_n и ε_{n+1} представляются две возможности. Либо $\varepsilon_n=\varepsilon_{n+1}$, либо $\varepsilon_n=-\varepsilon_{n+1}$; таким образом, условие (1.4.6) можно разбить на два:

$$\begin{cases}\alpha_n\varepsilon_n-\varphi-k_n=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}\\ \alpha_{n+1}\varepsilon_n-\varphi-k_{n+1}=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}\end{cases} \quad (\varepsilon_n=\varepsilon_{n+1}), \tag{1.4.7}$$

$$\begin{cases}\alpha_n\cdot\varepsilon_n+\varphi-k_n=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}\\ \alpha_{n+1}\varepsilon_n-\varphi-k_{n+1}=\frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}\end{cases} \quad (\varepsilon_n=-\varepsilon_{n+1}). \tag{1.4.8}$$

Введем три класса сумм.

Сумму (1.4.5) отнесем к 1-му классу в том и только в том случае, если каждая пара соседних особых членов имеет вид (1.4.7).

Сумму (1.4.5) отнесем ко 2-му классу в том и только в том случае, если каждая пара соседних особых членов имеет вид (1.4.8).

Сумму (1.4.5) отнесем к 3-му классу в том и только в том случае, если она содержит по меньшей мере две разные пары соседних особых членов.

Допустим, что сумма (1.4.5) принадлежит к 1-му классу. Учитывая, что $\alpha_{n+1}=p\alpha_n$, умножим первое уравнение (1.4.7) на p и вычтем по-

членно из второго. Мы получим:

$$(p-1)\varphi - k = \frac{\theta}{\pi}(p+1)\cdot\eta^{\frac{1}{4}} \tag{1.4.9}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{k}{p-1} + \frac{2\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}, \tag{1.4.10}$$

но $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, значит, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Подставляя (1.4.10) в (1.4.4), получаем:

$$e_n\alpha_n - k_n = \frac{k}{p-1} + \theta\eta^{\frac{1}{4}}. \tag{1.4.11}$$

Из этого условия находим, что либо

$$\{\alpha_n\} = \frac{k}{p-1} + \theta\eta^{\frac{1}{4}}, \tag{1.4.12}$$

либо

$$1 - \{\alpha_n\} = \frac{k}{p-1} + \theta\eta^{\frac{1}{4}},$$

$$\{\alpha_n\} = \frac{p-1-k}{p-1} - \theta\eta^{\frac{1}{4}}. \tag{1.4.13}$$

Но если k пробегает последовательность $0, 1, \ldots, p-1$ и $-1 < \theta < 1$, то и $p-1-k$ пробегает эту же последовательность и $-1 < -\theta < 1$.

Таким образом, все множества значений α, определяемых условием (1.4.12) и (1.4.13), совпадают и мы их можем объединить в одно:

$$\{\alpha_n\} = \frac{b}{p-1} + \theta\eta^{\frac{1}{4}}, \tag{1.4.14}$$

где $b = 0, 1, \ldots, p-1$ и $-1 < \theta < 1$.

Запишем α p-адической дробью:

$$\alpha = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} + \cdots \tag{1.4.15}$$

и пусть $r = \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln\eta}{\ln p}\right]$; в таком случае $\eta = \frac{\theta}{p^r}$ и

$$\{\alpha_n\} = \frac{b}{p-1} + \frac{\theta}{p^r},$$

или

$$\{\alpha_n\} = \frac{b}{p} + \frac{b}{p^2} + \cdots + \frac{b}{p^r} + \frac{\frac{b}{p-1} + \theta}{p^r}.$$

Учитывая, что $-1 < \frac{b}{p-1} + \theta < 2$ при $b \neq p-1$ и $0 < \frac{b}{p-1} + \theta < 1$ при $b = p-1$, получаем:

$$\{\alpha_n\} = \frac{b}{p} + \frac{b}{p^2} + \cdots + \frac{b}{p^{r-1}} + \frac{c_1}{p^r} + \frac{c_2}{p^{r+1}} + \cdots. \tag{1.4.16}$$

Сопоставляя условия (1.4.15) и (1.4.16), получаем:

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+r-1} = b = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad (1.4.17)$$

в силу единственности разложения α в p-адическую дробь.

Назовем a_{n+1} особым коэффициентом. В таком случае если S принадлежит 1-му классу, то любой из M_1 особых коэффициентов среди первых M в p-адическом разложении α влечет за собой серию из $r-1$ последовательных коэффициентов, равных ему.

Допустим, что сумма (1.4.5) принадлежит 2-му классу. В таком случае из условия (1.4.8), аналогично (1.4.9), получим:

$$(p+1)\varphi - k = \frac{\theta}{\pi}(p+1)\eta^{\frac{1}{4}}$$

и

$$\varphi = \frac{k}{p+1} + \frac{\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}}. \qquad (1.4.18)$$

В силу условия $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, имеем: $k = 0,1,\ldots, p, p+1$. Подставляя (1.4.18) в (1.4.4), получаем:

$$\varepsilon_n \alpha_n - k_n = \frac{b}{p+1} + \frac{2\theta}{\pi}\eta^{\frac{1}{4}},$$

откуда, аналогично (1.4.14), находим:

$$\{\alpha_n\} = \frac{b}{p+1} + \theta\eta^{\frac{1}{4}}, \qquad (1.4.19)$$

где $b = 0,1,2,\ldots, p+1$.

Если $b = 0, p+1$, то, аналогично (1.4.17), получаем:

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+r-1} = 0, p-1.$$

Если же $b \neq 0, p+1$, то в этом случае имеем:

$$\frac{b}{p+1} = \frac{b-1}{p} + \frac{p-b}{p^2} + \frac{b-1}{p^3} + \cdots + \frac{q_{r-1}}{p^{r-1}} + \frac{q_r}{p^r} + \frac{\theta}{p^r}.$$

Подставляя это разложение в (1.4.19), мы, в силу единственности разложения α в p-адическую дробь, получаем условие:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_{n+3} = a_{n+5} = \cdots = a_{n+r-\xi_1} = b-1, \\ a_{n+2} = a_{n+4} = a_{n+6} = \cdots = a_{n+r-\xi_2} = p-b. \end{cases}$$

Таким образом, сумма 2-го класса влечет за собой следующую зависимость $(r-1)$ последовательных коэффициентов, начиная с особого: либо

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_{n+3} = \cdots = a_{n+r-\xi_1} = b-1, \\ a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = a_{n+r-\xi_2} = p-b, \end{cases} \qquad (1.4.20)$$

если $b = 1, 2, \ldots, p$, либо

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \cdots = a_{n+r-1} = 0, p-1,$$

если $b=0$, $p-1$, где ξ_1 и ξ_2 принимают значения 1 или 2, в зависимости от четности $r-1$.

Допустим, что сумма S принадлежит 3-му классу. В таком случае условия (1.4.17) и (1.4.20) должны совпадать. Но это возможно лишь в том случае, если

$$\begin{aligned} &a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+r-1}=0,\ \frac{p}{2},\ p-1 \text{ при } p\equiv 0 \pmod 2,\\ &a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+r-1}=0,\ p-1 \text{ при } p\equiv 1 \pmod 2. \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Следовательно, если сумма S принадлежит 3-му классу, то любой из M_1 особых коэффициентов среди первых M в p-ичном разложении α влечет за собой серию из $(r-1)$ последовательных коэффициентов, равных ему. Он же, в свою очередь, принимает два или три значения, в зависимости от четности p.

Подводя итог, мы можем сказать, что если сумма S принадлежит 1-му или 3-му классу, то особый коэффициент единственным образом определяет после себя серию из $(r-1)$ коэффициентов.

Если же сумма S принадлежит 2-му классу, то единственным образом серию из $(r-1)$ коэффициентов определяют уже два коэффициента — особый и следующий за ним. Они же, в свою очередь, вместе принимают $(p+2)$ значения.

Введем два определения.

k последовательных коэффициентов, начинающихся с особого и имеющих разность между двумя соседними особыми коэффициентами, не бо́льшую, чем $(r-3)$, назовем особой группой коэффициентов.

$k \geqslant r-3$ последовательных неособых коэффициентов назовем неособой группой коэффициентов.

Для особой группы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *Все коэффициенты особой группы равны между собой, если сумма принадлежит 1-му или 3-му классу, и подчинены условию* (1.4.20), *где* $(r-1)$ *должно быть заменено на* k, *если сумма принадлежит 2-му классу.*

Доказательство леммы вытекает из того факта, что каждый особый коэффициент и следующий за ним, начиная со второго, в особой группе зависят от предыдущего и эту зависимость распространяют на $(r-1)$ последующих коэффициентов.

Подсчитаем число возможных систем коэффициентов

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_M \tag{1.4.22}$$

при разложении α в p-адическую дробь, определяемых одной суммой S.

Среди M коэффициентов (1.4.22) мы имеем $M'=M-M_1$ неособых. Но между двумя различными особыми группами должна быть одна неособая группа, и если мы обозначим число особых групп через n, то будем иметь:

$$n \leqslant \frac{M'}{r-3}+1.$$

Но все коэффициенты одной особой группы принимают, по лемме 3.1, не более чем $p+2$ значений, следовательно, всего одна сумма S определяет не более чем

$$(p+2)^n p^{M'-(r-3)(n-1)} \tag{1.4.23}$$

систем (1.4.22).

Все наши рассуждения относились к одной сумме S, которая имела M_1 вполне определенных особых коэффициентов. Но из M членов суммы S мы можем выбрать $C_M^{M_1}$ способами M_1 особых членов и, следовательно, мы можем получить столько же сумм S, каждая из которых будет иметь ровно M_1 особых членов и отличаться от всех других расположением их.

Запишем эти суммы в некоторой последовательности:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{C_M^{M_1}}. \tag{1.4.24}$$

Разобьем эту последовательность на R классов, где R — верхняя граница числа неособых групп и, следовательно, при данном M

$$R \leqslant \left[\frac{M'}{r-3}\right].$$

Пусть $0 \leqslant n \leqslant R$. Отнесем к n-му классу те и только те суммы S_i, которые имеют ровно n неособых групп. Обозначим классы через

$$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_R.$$

Каждый класс $\mathfrak{S}_n$ разобьем на q_n подклассов:

$$\mathfrak{S}_{n,1}, \mathfrak{S}_{n,2}, \ldots, \mathfrak{S}_{n,q_n}.$$

В каждый подкласс $\mathfrak{S}_{n,i}$ отнесем те и только те суммы n-го класса, которые дают одинаковые неособые группы и, следовательно, один подкласс $\mathfrak{S}_0$ дает не более чем (1.4.23) систем (1.4.22). Заметим, что класс $\mathfrak{S}_0$ имеет только один подкласс, т. е. самого себя.

Докажем следующую оценку:

$$q_n \leqslant (C_M^n)^2. \tag{1.4.25}$$

Рассмотрим некоторый подкласс $\mathfrak{S}_{n,i}$, где $n \geqslant 1$. Этот подкласс имеет ровно n неособых групп. Перенумеруем их по порядку, начиная с крайней левой. Пусть a_{ij} означает крайний левый неособый член j-й неособой группы, a'_{ij} — крайний правый член j-й неособой группы. Составим систему чисел

$$\mathfrak{S}_{n,i}\,[(a_{i_1}a'_{i_1})(a_{i_2}a'_{i_2})\ldots(a_{i_n}a'_{i_n})$$

и заставим i пробегать все свои значения до q_n. Мы получим q_n систем пар чисел:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{S}_{n1}\,[(a_{1_1}a'_{1_1})(a_{1_2}a'_{1_2})\ldots(a_{1_n}a'_{1_n})],\\
\mathfrak{S}_{n2}\,[(a_{2_1}a'_{2_1})(a_{2_2}a'_{2_2})\ldots(a_{2_n}a'_{2_n})],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{S}_{nq_n}\,[(a_{q_{n1}}a'_{q_{n1}})(a_{q_{n2}}a'_{q_{n2}})\ldots(a_{q_{nn}}a'_{q_{nn}})].
\end{gathered} \tag{1.4.26}$$

Все полученные системы будут различны между собой. Действительно, если бы мы допустили, что две системы чисел

$$\mathfrak{S}_{ni}\,[(a_{i_1}a'_{i_1})\dots(a_{i_n}a'_{i_n})] \text{ и } \mathfrak{S}_{nj}\,[(a_{j_1}a'_{j_1})\dots(a_{j_n}a'_{j_n})]$$

равны между собой, то это означало бы, что

$$\begin{aligned} a_{i_1} &= a_{j_1}, & a'_{i_1} &= a_{j_1}, \\ a_{i_2} &= a_{j_2}, & a'_{i_2} &= a'_{j_2}, \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ a_{i_n} &= a_{j_n}, & a'_{i_n} &= a'_{j_n}, \end{aligned}$$

т. е. что все неособые группы коэффициентов подгрупп $\mathfrak{S}_{ni}$ и $\mathfrak{S}_{nj}$ равны между собой, что возможно лишь при $i = j$.

Составим два совершенно одинаковых множества A и A'. Каждое из них включает все сочетания первых M коэффициентов p-ичного разложения числа α по n.

Возьмем некоторую систему чисел

$$\mathfrak{S}_{n,m}\,[(a_{m_1}a'_{m_1})(a_{m_2}a'_{m_2})\cdots(a_{m_n}a'_{m_n})]$$

и поставим ей в соответствие элемент из множества A, равный $(a_{m_1}a_{m_2}\dots a_{m_n})$, и элемент из множества A', равный $(a'_{m_1}\dots a'_{m_n})$.

Таким образом, каждой системе чисел (1.4.26) можно поставить в соответствие два элемента — один из множества A, другой — из множества A', а отсюда следует, что всего систем (1.4.26) будет не больше $(C_M^n)^2$, т. е. действительно

$$q_n \leqslant (C_M^n)^2.$$

Но каждый подкласс $\mathfrak{S}_{n,i}$ дает не больше чем (1.4.23) систем (1.4.2) и, следовательно, весь класс $\mathfrak{S}_n$ дает не более чем

$$q_n\,(p+2)^n \cdot p^{M'-(r-3)(n-1)} \leqslant p^{2R}\cdot p^{M'_1}(C_M^n)^2.$$

Таким образом, все классы при данном M_1 дадут не более чем

$$p^{2h}\cdot p^{M'}\cdot \sum_{n=0}^{R}(C_M^n)^2 \leqslant R\cdot p^{2R}\cdot p^{M'}(C_M^R)^2.$$

Но M' пробегает значения от 0 до $[\sqrt{\eta}\,M]$. Следовательно, всех систем (1.4.22) будет не более чем

$$M^2\cdot p^{\left(\sqrt{\eta}+\frac{2\sqrt{\eta}}{r-3}\right)M}\cdot\left(C_M^{\left[\frac{\sqrt{\eta}\,M}{r-3}\right]}\right)^2,$$

и, применяя к оценке C_M^n формулу Стирлинга, с условием, что

$$r-3 \geqslant \frac{1}{2}\,r, \quad r \geqslant 6, \quad \eta \leqslant p^{-24},$$

мы находим:

$$M^2\cdot p^{\left(\sqrt{\eta}+\frac{2\sqrt{\eta}}{r-3}\right)M}\left(C_M^{\left[\frac{\sqrt{\eta}\,M}{r-3}\right]}\right)^2 < p^{13\sqrt{\eta}\,M}.$$

Так как всего систем будет p^M, то, следовательно,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}_\eta < \frac{p^{13\sqrt{\eta}M}}{p^M} = p^{-(1-13\sqrt{\eta})M},$$

что и доказывает теорему B.

Заметим, что теоремы A и B имеют безусловный характер.

ЛЕММА 4.1. *Множество $\mathcal{E}_\eta$ состоит из интервалов, длина каждого из которых не меньше, чем p^{-M}, и не больше, чем $p^{-(1-\sqrt{\eta})M}$.*

Доказательство. Допустим, что $\alpha \in \mathcal{E}_\eta$ и

$$\alpha = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_M}{p^M} + \frac{a_{M+1}}{p^{M+1}} + \cdots.$$

Только первые M коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_M$ могут быть ограничены в своем изменении; каждый коэффициент a_{M+i}, $i \geqslant 1$, может пробегать независимо от остальных все свои значения $0, 1, \ldots, p-1$ и, следовательно,

$$\alpha = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_M}{p^M} + \theta,$$

где

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{p^M}.$$

Таким образом, интервал длины p^{-M} является наименьшим возможным интервалом, входящим в $\mathcal{E}_\eta$.

В то же время длина интервала $\in \mathcal{E}_\eta$ не может превосходить $p^{-(1-\sqrt{\eta})M}$, так как среди первых M коэффициентов разложения α обязательно найдутся $[(1-\sqrt{\eta})M]+1$ особых, и наибольший интервал $\in \mathcal{E}_\eta$ получается в том случае, если первые $[(1-\sqrt{\eta})M]+1$ коэффициентов будут особыми, т. е.

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{a}{p^{[M(1-\sqrt{\eta})]+r}} + \cdots < p^{-(1-\sqrt{\eta})M},$$

и лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 5.1. *Множество $\mathcal{E}_\eta$ состоит не более чем из $p^{13\sqrt{\eta}M}$ интервалов.*

Доказательство. Так как наименьший интервал $\in \mathcal{E}_\eta$ не меньше, чем p^{-M}, то, следовательно, всего интервалов будет не больше, чем

$$\frac{\operatorname{mes} \mathcal{E}_\eta}{p^{-M}} < p^{13\sqrt{\eta}M}.$$

§ 5. Пусть $Q = p^M$. Положим $\tau = Q^{\frac{1}{3}}$ и обозначим через F_{aq} сегмент $\left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right]$, через F_q — систему из $\varphi(q)$ сегментов F_{aq}, через $\mathfrak{M}$ — совокупность F_q-систем при условии, что $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{\tau}$, через $\mathfrak{m}$ — дополнение $\mathfrak{M}$ до $[0,1]$ и через $\mathfrak{m}_\eta$ — систему интервалов $\in \mathcal{E}_\eta \cap \mathfrak{m}$; $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_\eta$. В этом случае имеем:

$$\int_0^1 S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}_\eta} + \int_{\mathfrak{m}_1}.$$

Займемся оценкой интеграла по $\mathfrak{m}_\eta$. Все множество $\mathfrak{m}$ покрывается системами F_q при $q > \sqrt{\tau}$, причем некоторые системы F_q могут пересекаться, но так, что ни одна рациональная точка $\frac{a}{q}$ не войдет в интервал F_{aq}, если $q \neq q_1$. Это вытекает из того, что при $q \neq q$ имеем:

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{q \cdot q_1} \geqslant \max\left[\frac{1}{q\tau}, \frac{1}{q_1\tau}\right].$$

Из условия же

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{q \cdot q_1} \geqslant \frac{1}{\tau^2} > \frac{1}{Q^{1-\sqrt{\eta}}}$$

мы заключаем, что каждый интервал, принадлежащий пересечению $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{E}_\eta$, покрывается не более чем тремя сегментами F_{aq} при $q > \sqrt{\tau}$, а так как $\mathfrak{E}_\eta$ состоит из $B \cdot Q^{13\sqrt{\eta}}$ интервалов, то, следовательно, $\mathfrak{m}_\eta$ покрывается не более чем $3 \cdot BQ^{13\sqrt{\eta}}$ сегментами F_{aq} при $q > \sqrt{\tau}$. Но $\eta \leqslant p^{-24} \leqslant 2^{-24}$ и, следовательно,

$$13\sqrt{\eta} < 2^4 \cdot 2^{-12} = 2^{-8} < 0{,}01; \quad B \cdot BQ^{13\sqrt{\eta}} < Q^{0{,}01}.$$

Перенумеруем все интервалы, входящие в $\mathfrak{m}_\eta$:

$$\mathfrak{m}_\eta = \sum_{i \leqslant Q^{0{,}01}} \mathfrak{m}_{\eta_i}$$

и, следовательно,

$$\int_{\mathfrak{m}_\eta} S^2(\alpha)\, T^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N} d\alpha \leqslant M^k \int_{\mathfrak{m}_\eta} |S(\alpha)|^2 d\alpha = M^k \sum_{i \leqslant Q^{0{,}01}} \int_{\mathfrak{m}_{\eta_i}} |S(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Но каждое $\mathfrak{m}_{\eta_i}$ покрывается не более чем тремя сегментами F_{aq} при $q > \sqrt{\tau}$, следовательно,

$$\int_{\mathfrak{m}_{\eta i}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant \sum_{j \leqslant 3} \int_{-\frac{1}{q_j\tau}}^{\frac{1}{q_j\tau}} \left|S\left(\frac{a}{q_j} + \alpha\right)\right|^2 d\alpha. \tag{1.5.1}$$

Подставляя оценку (1.1.10) в (1.5.1), получаем:

$$\int_{\mathfrak{m}_{\eta_i}} |S(\alpha)|^2 d\alpha = B\, \frac{N \cdot \ln^3 N}{\tau}.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathfrak{m}_\eta} S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N} d\alpha \leqslant M^k \frac{N \cdot \ln^3 N}{\tau} Q^{0{,}01} = B \cdot \frac{NM^k}{\sqrt{\tau}}. \tag{1.5.2}$$

Оценим интеграл по множеству $\mathfrak{m}_1$. На этом множестве мы имеем неравенство

$$|T(\alpha)| < (1 - \tau) M$$

Полагая $k_1 = k - 2m$ и используя теорему А, получаем:

$$\int_{\mathfrak{m}_1} S^2(\alpha)\cdot T^k(\alpha)\cdot e^{2\pi i\alpha N}d\alpha =$$

$$= B(1-\eta)^{k_1}M^{k_1}\int_0^1 |S(\alpha)|^2\cdot|T(\alpha)|^{2m}d\alpha = B(1-\eta)^{k_1}\cdot N\cdot M^k. \qquad (1.5.3)$$

§ 6. Рассмотрим интеграл по $\mathfrak{M}$. В силу определения $\mathfrak{M}$ и оценки (1.1.8), получаем:

$$\int_{\mathfrak{M}} S^2(\alpha)\cdot T^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}d\alpha = \sum_{N_1} r_{N_1}\int_{\mathfrak{M}} S^2(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N_1}d\alpha =$$

$$= \sum_{N_1}\sum_{q\leqslant\sqrt{\tau}}\sum_{(a,q)=1} r_{N_1}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}d\alpha =$$

$$= e^{-1}\sum_{N_1>0} N_1\sum_{q\leqslant\sqrt{\tau}} A_q(N_1) + B\frac{N\cdot M^k\cdot\ln^3 N}{\sqrt[4]{\tau}}. \qquad (1.6.1)$$

(1.6.1) содержит отрезок особого ряда $\sum_{q\leqslant\sqrt{\tau}} A_q(N_1)$. Из условия (1.1.9) получаем:

$$A_q(N_1) = \prod_{p|q}\cdot A_p(N_1)\cdot\mu^2(q),$$

причем если p/N_1, то $A_p(N_1) = \frac{1}{p-1}$, а если $p\nmid N_1$, то

$$A_p(N_1) = -\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оценим величину

$$\rho_Q(N) = \sum_{q>Q} A_Q(N_1),$$

где $Q = e^{c(\ln N)^\gamma}$, c и γ — положительные константы, не зависящие от N.

Допустим, что $p_1, p_2, \ldots, p_r$ являются простыми делителями N_1 и $(q, N_1) = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}$. В таком случае

$$A_q(N_1) = \frac{1}{(p_{i_1}-1)\ldots(p_{i_k}-1)}\frac{\mu(n)}{\varphi^2(n)},$$

где

$$n = \frac{q}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}}.$$

Введем функцию

$$\psi(Q, p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}) = \sum_{\substack{Q \\ n>\frac{}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}} \\ (n,\ p_{i_1}\cdot p_{i_2}\ldots p_{i_k})=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi^2(n)}. \qquad (1.6.2)$$

Используя решето, получаем:

$$\rho_Q(N) = \sum_{\substack{q>Q \\ (N,q)=1}} A_q(N_1) + \sum_{\substack{i_1=1 \\ (q,\ N_1)=p_{i_1} \\ q>Q}}^{r} \frac{\psi(Q,\ p_{i_1})}{p_{i_1}-1} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_r \\ (q,\ N_1)=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r} \\ q>Q}} \frac{\psi(Q,\ p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r})}{(p_{i_1}-1)(p_{i_2}-1)\cdots(p_{i_r}-1)}. \tag{1.6.3}$$

Из (1.6.2) получаем оценку:

$$|\psi(Q,\ p_{i_1}\cdots p_{i_k})| \ll \min\left(1, \frac{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdots p_{i_k}\ln^2 N}{Q}\right). \tag{1.6.4}$$

Кроме того, учитывая неравенство:

$$(p_{i_1}-1)(p_{i_2}-1)\cdots(p_{i_k}-1) \gg \frac{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}{\ln N},$$

из (1.6.3) находим:

$$|\rho_Q(N_1)| \leqslant \Big|\sum_{\substack{q>Q \\ (q,\ N_1)=1}} A_q(N_1)\Big| + \ln N_1 \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{|\psi(Q,\ p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k})|}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}. \tag{1.6.5}$$

Но

$$\Big|\sum_{\substack{q>Q \\ (q,N_1)=1}} A_q(N_1)\Big| = \Big|\sum_{\substack{n>Q \\ (n,N_1)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi^2(n)}\Big| \leqslant \sum_{n>Q} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ll \frac{\ln N}{Q}. \tag{1.6.6}$$

Оценим двойную сумму в (1.6.5), для чего суммы по индексу k разобьем на две:

$$\sum_{k=1}^{\nu} + \sum_{k=\nu+1}^{r}, \tag{1.6.7}$$

где $\nu = \left[\frac{1}{2}\frac{\ln Q}{\ln\ln N}\right]$.

Рассмотрим вторую сумму в (1.6.7). Используя оценку

$$|\psi(Q,\ p_{i_1}\cdots p_{i_k})| \ll 1,$$

получим:

$$\sum_{k=\nu+1}^{r} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{|\psi(Q, p_{i_1}\cdots p_{i_k})|}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdots p_{i_k}} \ll \sum_{k=\nu+1}^{r} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}};$$

но внутренняя сумма в данном случае имеет оценку:

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} < \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}\right)^k}{k!} \ll \frac{(\ln\ln N)^k}{k!}.$$

Применяя формулу Стирлинга, получаем для $k \geqslant \nu + 1$:

$$k! > (\ln \ln N)^k Q^{\frac{1}{3}\gamma}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=\nu+1}^{r} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{|\psi(Q, p_{i_1} \cdots p_{i_k})|}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \ll \frac{\ln N}{Q^{\frac{1}{3}\gamma}}. \tag{1.6.8}$$

Рассмотрим первую сумму в (1.6.7). Используя оценку

$$|\psi| \ll \frac{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}{Q} \ln^2 N,$$

получаем:

$$\sum_{k \leqslant \nu} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{|\psi(Q, p_{i_1} \cdots p_{i_k})|}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \ll \sum_{k \leqslant \nu} \frac{\ln^2 N}{Q} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} 1 < \frac{\ln^3 N}{Q} C_r^{\nu}.$$

Но $r < \ln N$, следовательно,

$$\begin{aligned} C_r^{\nu} &< (\ln N)^{\nu} = e^{\nu \ln \ln N} < e^{\frac{1}{2}\ln Q} \leqslant \sqrt{Q}, \\ \sum_{k \leqslant \nu} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \frac{|\psi(Q, p_{i_1} \cdots p_{i_k})|}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} &= B \cdot \frac{\ln^3 N}{\sqrt{Q}}. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Соединяя оценки (1.6.9), (1.6.8), (1.6.6), получаем:

$$|\rho_Q(N)| = B \cdot \frac{\ln N}{Q^{\frac{1}{3}\gamma}}.$$

Положим

$$Q = \sqrt{\tau} = e^{\frac{1}{6}M} = e^{\frac{\ln p}{6}\left(\frac{\ln N}{\ln p}\right)^{\frac{1}{m}}}. \tag{1.6.10}$$

Здесь $c = \frac{(\ln p)^{1-\frac{1}{m}}}{6}$, $\gamma = \frac{1}{m}$ и, следовательно,

$$|\rho_{\sqrt{\tau}}(N_1)| = B \frac{\ln N}{Q^{\frac{1}{3m}}} = \frac{\ln N}{\tau^{\frac{1}{6m}}}. \tag{1.6.11}$$

Но

$$\sum_{q \leqslant \sqrt{\tau}} A_q(N_1) = \mathfrak{S}(N_1) - \rho_{\sqrt{\tau}}(N_1), \tag{1.6.12}$$

где

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p \mid N} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid N_1} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right). \tag{1.6.13}$$

Подставляя (1.6.12) в (1.6.1) и учитывая оценку (1.6.11), получаем:

$$e \cdot \int_{\mathfrak{M}} S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + B \cdot \frac{N \cdot M^k \cdot \ln^3 N}{\tau^{\frac{1}{6m}}}.$$

Соединяя, наконец, полученную оценку с оценками (1.5.2) и (1.5.3), находим:

$$e\int_0^1 S^2(\alpha)\,T^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}d\alpha = \sum_{N_1} \mathfrak{S}(N_1)\,N_1 + B(1-\eta_1)^{k_1}\cdot N\cdot M^k.$$

Выбирая η столь малым, чтобы выполнялось условие

$$(1-\eta_1)^{2m} > \frac{1}{2},$$

мы окончательно получаем доказательство теоремы 1.1:

$$e\int_0^1 S^2(\alpha)\,T^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}d\alpha = \sum_{N_1>0} \mathfrak{S}(N_1)\cdot N_1 + B(1-\eta_1)^k\cdot N\cdot M^k.$$

§ 7. Заметим. что для четных N_1 $\mathfrak{S}(N_1) > c_0 > 0$, где c_0 не зависит от N. Если мы через N_1' обозначим N_1 с условием, что

$$1 \leqslant x_i \leqslant \frac{\ln N}{\ln p} - \frac{\ln 2k}{\ln p},$$

то получим, что $\frac{1}{2}N \leqslant N' \leqslant 2N$ и N_1' четно, следовательно,

$$\sum_{N_1>0} \mathfrak{S}(N_1)\,N_1 > \sum_{N_1'} N_1'\cdot\mathfrak{S}(N_1') > \frac{c_0}{4}\,N\cdot M^k.$$

Выбирая k таким, чтобы выполнялось условие

$$B(1-\eta_1)^k < \frac{c_0}{8},$$

мы получаем:

$$e\int_0^1 S^2(\alpha)\,T^k(\alpha)\cdot e^{2\pi i\alpha N}d\alpha > \frac{c_0}{8}\,NM^k. \tag{1.7.1}$$

Следовательно, уравнение (3) всегда разрешимо для всех $N > N_0$.

Докажем теперь теорему 3, т. е. докажем что существует решение уравнения (3) при условии, что $x_1, x_2, \ldots, x_k$ попарно не равны.

Допустим, что в решении уравнения (3)

$$x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_n},$$

где $2 \leqslant n \leqslant k$. $Q_k(N, p)$ в этом случае запишем как $Q_{k-n}(N, p)$; тогда имеем:

$$Q_{k-n}(N, p) \leqslant C_k^n e\int_0^1 S^2(\alpha)\cdot T^{k-n}(\alpha)\,T_n(\alpha)\cdot e^{2\pi i\alpha N}d\alpha + BN^{\frac{3}{4}+\varepsilon}, \tag{1.7.2}$$

где

$$T_n(\alpha) = \sum_{x=1}^{M} e^{-\frac{n\cdot\varepsilon_x\cdot p^x}{N}} e^{-2\pi i n\varepsilon_x p^x}.$$

Оценим интеграл:

$$I_n(N) = \int_0^1 S^2(\alpha)\cdot T^{k-n}(\alpha)\,T_n(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

Положим в дальнейшем $k \geqslant 3m+1$. В таком случае, если $k-n \geqslant 2m$, то мы получаем:

$$|I_n(N)| \leqslant \int_0^1 |S(\alpha)|^2 \cdot |T(\alpha)|^{2m} |T(\alpha)|^{k-n-2m} |T_n(\alpha)|\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant M^{k-n-2m+1} \int_0^1 |S(\alpha)|^2 |T(\alpha)|^{2m}\, d\alpha = B \cdot N \cdot M^{k-n+1} = B \cdot \frac{N \cdot M^k}{M^{n-1}}.$$

Если же $k-n < 2m$, то мы имеем:

$$I_n(N)| \leqslant M^{k-n+1} \int_0^1 |S(\alpha)|^2 \cdot d\alpha = BM^{k-n+1} N \cdot \ln N = B \cdot N \cdot M^{k-n+m+1} =$$

$$= B \cdot N \cdot M^{3m} = B\, \frac{N \cdot M^k}{M}. \tag{1.7.3}$$

Таким образом, при любом n мы имеем оценку:

$$|I_n(N)| = B \cdot \frac{N \cdot M^k}{M}.$$

Подставляя ее в правую часть (1.7.2), находим:

$$|Q_{k-n}(N, p)| = B \cdot \frac{N \cdot M^k}{M} C_k^n.$$

Если мы обозначим через $Q_k'(N, p)$ функцию $Q_k(N, p)$ с условием, что $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ попарно не равны, то получим:

$$Q_k'(N, p) = Q_k(N, p) - \sum_{n=2}^{k} Q_{k-n}(N, p),$$

$$Q_k'(N, p) = Q_k(N, p) + B \cdot 2^k \cdot \frac{N \cdot M^k}{M}.$$

При большом N

$$B \cdot \frac{2^k}{M} < (1-\eta)^k,$$

и, используя теорему 1.1, мы получаем:

$$Q_k'(N, p) = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N_1). \tag{1.7.4}$$

Но правую часть в (1.7.4), как уже было показано, можно сделать больше, чем $\frac{c_0}{8} NM^k$. Этим теорема 3 доказана, а следовательно, доказаны теоремы 1 и 2.

Глава II

§ 1. В этой главе расширенная гипотеза Римана об L-рядах Дирихле заменена плотностными теоремами и, следовательно, результаты ее безусловны. Полагая $m = 1$, получаем:

$$M = \left[\frac{\ln N}{\ln p}\right] p^M = cN, \quad \frac{1}{p} < c \leqslant 1, \quad \operatorname{mes} \mathfrak{S}_\eta \ll \frac{N^{13\sqrt{\eta}}}{N}.$$

По леммам 4.1 и 5.1 получаем, что $\mathscr{E}_\eta$ состоит из интервалов длиной не меньше, чем N^{-1} и не больше, чем $N^{-1+\sqrt{\eta}}$. Всего интервалов, принадлежащих $\mathscr{E}_\eta$, не больше, чем $cN^{13\sqrt{\eta}}$.

Для этой главы примем следующие обозначения:

$$\gamma = \sqrt{\eta}, \quad 100\gamma = \gamma_1, \quad 100\gamma_1 = \gamma_2, \quad \tau = N^{\gamma_1}, \quad \Lambda = N^{-1+\gamma_2},$$

$$F_{aq}(\Lambda) = \left[\frac{a}{q} - \Lambda, \frac{a}{q} + \Lambda\right], \quad F_q(\Lambda) = \sum_{(a, q)=1} F_{aq}(\Lambda),$$

$$Q_1 = e^{(\ln N)^{\lambda'}}, \text{ где } \lambda' = \frac{1-\lambda}{2} \text{ и } \frac{3}{4} < \lambda < \frac{4}{5},$$

$$I(N, F_{aq}(\Lambda)) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} S^2\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha,$$

$$I(N, F_q(\Lambda) = \sum_{(a, q)=1} I(N, F_{aq}(\Lambda)).$$

Сегмент $[0, 1]$ разобьем на три множества:

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant Q_1} F_q(\Lambda), \quad \mathfrak{m}(\Lambda) = \sum_{Q_1 < q \leqslant \tau} F_q(\Lambda),$$

$$\mathfrak{m} = [0, 1] - \mathfrak{M}(\Lambda) - \mathfrak{m}(\Lambda),$$

и интеграл, аналогичный (1.1.4), будем изучать на этих трех множествах.

В этой главе нам не удастся доказать теорему 1.1 в том объеме, как она сформулирована в главе I. Мы докажем ее справедливость только для определенного класса чисел N, удовлетворяющих следующим условиям:

$$N \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}},$$

если $\nu > \ln \ln N$ и p_i — простой делитель числа p. Для всех остальных чисел мы сможем получить только теорему 3, а следовательно, и теорему 1.

Принимая обозначения гл. I и II, докажем следующую безусловную теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для всех $N > N_0$ можно подобрать такое k, ограниченное абсолютной константой, что уравнение* (2) *разрешимо для всех $N > N_0$, если N и $p \cdot k$ имеют одинаковую четность.*

Кроме того, если $N \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$, где $\nu > \ln \ln N$ и p_i — простой делитель p, то имеет место асимптотическая формула:

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) \cdot N_1 + \rho(N),$$

где

$$\rho(N) = B\sqrt{\eta} \cdot N \cdot M^k.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\int_0^1 S^2(\alpha)\, T^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha n}\, d\alpha = \int_{\mathfrak{M}(\Lambda)} + \int_{\mathfrak{m}(\Lambda)} + \int_{\mathfrak{m}}. \tag{2.1.1}$$

Оценка интегралов по множествам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{m}(\Lambda)$ проводится так же, как это сделано в работе [1]. Здесь же приведено только доказательство леммы XVa, аналогичной лемме XV, работы [1], так как там доказательство нечетко.

В процессе доказательства леммы XVa потребуется несколько вспомогательных лемм, которые приведены здесь без доказательства, так как они аналогичны доказательствам соответствующих лемм в работе [1].

ЛЕММА XIIa. *Если Q таково, что $\frac{\ln Q}{\ln p} \geqslant M^{\frac{2}{3}}$, то можно подобрать такое целое число l_Q, которое будет удовлетворять условиям:*

$$3\frac{\ln Q}{\ln p} \leqslant l_Q \leqslant 12\frac{\ln Q}{\ln p}, \tag{2.1.2}$$

$$\left\{\frac{M}{l_Q}\right\} = 1 - \frac{B}{l_Q}. \tag{2.1.3}$$

Доказательство см. в работе [1].

Сумму $T(\vartheta)$ разобьем на частные последовательные суммы $T_j(\vartheta)$ по l_Q членов в каждой, если $j = 1, \ldots, \nu - 1$. Сумма $T_\nu(\vartheta)$ может быть короче остальных, но не намного. При условии (2.1.3)

$$\nu = \left[\frac{M}{l_Q}\right] + 1.$$

Если не выполнено условие (2.1.3), то либо

$$\nu = \left[\frac{M}{l_Q}\right] + 1,$$

либо

$$\nu = \left[\frac{M}{l_Q}\right].$$

Таким образом, получаем:

$$T(\vartheta) = \sum_{j \leqslant \nu} T_j(\vartheta),$$

где

$$T_j(\vartheta) = \sum_{m \leqslant l_Q} e^{-\frac{\varepsilon_{A_j+m} p^{A_j+m}}{N}} e^{-2\pi i \vartheta p^{A_j+m} \varepsilon_{A_j+m}}.$$

При $j \leqslant \nu - 1$

$$A = (j-1)\, l_Q.$$

Положим $\eta_{11} = 3\gamma_2$; тогда при $j \leqslant (1 - \eta_{11})\nu$ имеем:

$$p^{A_j+m} \leqslant p^{A_j+l_Q} \leqslant p^{M(1-0{,}9\eta_1)} = B \cdot \frac{N}{N^{2{,}7\gamma_2}}.$$

Далее,

$$T(0) = M + B, \quad T_j(0) = l_Q + B, \quad j \leqslant \nu - 1,$$

$T_\nu(0) = l_Q - B\sqrt{l_Q}$ при условии (2.6.5), $T_\nu(0) \leqslant l_Q$ всегда.

Рассмотрим критические множества ε_j сумм $T_j(\vartheta)$ при $j \leqslant (1-\eta_1)\nu$ как множества точек ϑ, для которых

$$|T_j(\vartheta)| > (1-\eta)\,T_j(0).$$

Если через $\mathfrak{S}_Q(\Lambda)$ обозначено множество $F_q(\Lambda)$ при условии, что $Q < q \leqslant 2Q$, то имеет место следующая

ЛЕММА XIVa. *Количество множеств* $F_q(\Lambda) \in \mathfrak{S}_Q(\Lambda)$, *которые пересекаются с суммой* $\sum\limits_{j \leqslant (1-\eta)\nu} \varepsilon_j = \mathcal{E}$, *не превосходит*

$$B \cdot Q^{200\gamma} \ln^{2r} N,$$

где $\gamma = \sqrt{\eta}$ *и* r — *число простых делителей* p.

Если $Q > (\ln N)^{k'}$ *и* $\eta < 10^{-7}$, *то при* $k' > 200\,r$ *имеем:*

$$B \cdot Q^{200\gamma} \ln^{2r} N = BQ^{0,1}.$$

Доказательство см. в работе [1] (лемма XIV).

ЛЕММА XIVb. *Пусть* $F_q(\Lambda)$ *пересекается с* $\mathcal{E}$ *и* $q = d \cdot q'$, *где* $(q', p) = 1$ *и* d *имеет простыми делителями только числа, входящие в каноническое разложение* p. *Тогда число интервалов* $F_{aq}(\Lambda) \in F_q(\Lambda)$ *и пересекающихся с* $\mathcal{E}$, *не превосходит*

$$B \cdot d \cdot Q^{0,1} \cdot \ln N.$$

Доказательство. Пусть

$$\beta = \{\vartheta \cdot p^{A_j}\} = \frac{a_1}{q_1} + \theta \cdot \Lambda \cdot p^{A_j}$$

и

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \theta\Lambda,$$

где $q = d_1 \cdot q_1$, $q = d \cdot q'$, $d = d_1 \cdot d_2$, $q_1 = d_2 \cdot q'$.

Тогда

$$\vartheta \cdot p^{A_j} = \frac{\left(\frac{p^{A_j}}{d_1}\right) \cdot a}{q_1} + \theta \cdot \Lambda \cdot p^{A_j} \quad (p^{A_j} \geqslant d_1).$$

Из условия $\beta = \{\vartheta \cdot p^{A_j}\}$ имеем:

$$\frac{\left(\frac{p^{A_j}}{d_1}\right) a}{q_1} - \frac{a_1}{q_1} = m \text{ — целое число}$$

или

$$\left(\frac{p^{A_j}}{d_1}\right) \cdot a \equiv a_1 \pmod{q_1}.$$

Решая полученное сравнение, находим:

$$a = a^* + kq_1.$$

Но в силу того, что $a < q = d_1 \cdot q_1$, мы имеем $k = 0, 1, \ldots, d_1$ и, следовательно, из всех $\varphi(q)$ значений a сравнению удовлетворяет не более чем $d_1 \leqslant d$. А это значит, что если β находится в одном из $B \cdot Q^{0,1}$ интерва-

лов, то при данном A_j не более чем d интервалов $F_{aq}(\Lambda) \in F_q(\Lambda)$ будет пересекаться с $\mathcal{E}$. Но A_j может принять не более чем $\ln N$ значений и, следовательно, всего $F_{aq}(\Lambda) \in F_q(\Lambda)$ и пересекающихся с $\mathcal{E}$ будет не больше, чем $B \cdot d \cdot Q^{0,1} \ln N$.

§ 2. ЛЕММА XVa.

$$\int_{m(\Lambda)} = \sum_{Q_1 < q \leqslant \tau} I(N, F_q(\Lambda)) = B \cdot N \cdot M^k [(1-\eta)^k + \eta_1].$$

Рассмотрим множества $F_q(\Lambda) \in \mathfrak{S}_Q(\Lambda)$, которые пересекаются с $\mathcal{E}$. Их количество равно $R = B \cdot Q^{0,1}$. Перенумеруем их:

$$F_{q_1}(\Lambda),\ F_{q_2}(\Lambda),\ \ldots,\ F_{q_R}(\Lambda) \quad (Q < q \leqslant 2Q),\quad i = 1, \ldots, R. \tag{2.2.1}$$

Но

$$\sum_{Q_1 < q \leqslant \tau} I(N, F_q(\Lambda)) = \sum_{Q \geqslant Q_1} \sum_{Q < q \leqslant 2Q} I(N, F_q(\Lambda)). \tag{2.2.2}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{Q < q \leqslant 2Q} I(N, F_q(\Lambda)). \tag{2.2.3}$$

Принимая во внимание (2.2.1), мы можем записать:

$$\sum_{Q < q \leqslant 2Q} I(N, F_q(\Lambda)) = \sum_{i=1}^{R} I(N, F_{q_i}(\Lambda)) + \sum_{\substack{Q < q \leqslant 2Q \\ q \neq q_i}} I(N, F_q(\Lambda)). \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{R} I(N, F_{q_i}(\Lambda)). \tag{2.2.5}$$

Разделим ее на две следующим образом. Положим $q_i = d \cdot q_i'$, где d имеет простыми делителями только числа $\in p$. Если $d \leqslant q_i^{0,5}$, то в этом случае $I(N, F_{q_i}(\Lambda))$ отнесем к первой сумме; если $d > q_i^{0,5}$, то $I(N, F_{q_i}(\Lambda))$ отнесем ко второй сумме, т. е.

$$\sum_{i=1}^{R} I(N, F_{q_i}(\Lambda)) = \sum_{i_1=1}^{R_1} I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda)) + \sum_{i_2=1}^{R_2} I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)), \tag{2.2.6}$$

причем $R = R_1 + R_2$.

Рассмотрим $I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda))$. Мы имеем:

$$I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda)) = \sum_{(a, q_{i_1})=1} I(N, F_{aq_{i_1}}(\Lambda)).$$

Сумму по a снова разделим на две. К первой сумме отнесем те a, для которых

$$F_{aq_{i_1}}(\Lambda)) \cap \mathcal{E}.$$

Ко второй сумме отнесем те a, для которых

$$F_{aq_{i_1}}(\Lambda) \pitchfork \mathcal{E}.$$

В таком случае имеем:

$$I(N, F_{aq_{i_1}}(\Lambda)) = \sum_{a_1} I(N, F_{a,\, q_{i_1}}(\Lambda)) + \sum_{a_2} I(N, F_{a_2 q_{i_1}}(\Lambda)). \tag{2.2.7}$$

Для второй суммы в (2.2.7) имеем оценку:

$$\sum_{a_2} I(N, F_{a_2 q_{i_1}}(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta_1)^k + \eta_{11}]\, M^{k-2} \sum_{a_2} \int\limits_{F_{a_2 q_{i_1}}} |S(\alpha)\, T(\alpha)|^2\, d\alpha.$$

Для первой суммы в (2.2.7), согласно оценке (15.15) работы [1] и лемме XIVb, имеем:

$$\sum_{a_1} I(N, F_{aq_{i_1}}(\Lambda)) = B\,\frac{N}{Q^{0.99}}\cdot Q^{0.6} M^k \ln^{48} N = B\,\frac{NM^k}{Q^{0.39}}\cdot \ln^{48} N.$$

Соединяя две оценки для сумм по a_1 и a_2 вместе, получаем оценку:

$$I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda)) = B\,[(1-\eta_1)^k + \eta_{11}]\, M^{k-2} \int\limits_{F_{q_{i_1}}(\Lambda)} |S(\alpha)\cdot T(\alpha)|^2\, d\alpha + B\,\frac{NM^k}{Q^{0.28}}$$

и

$$\sum_{i=1}^{R} I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta_1)^k + \eta_{11}]\, M^{k-2} \sum_{i_1 \leqslant R_1} \int\limits_{F_{q_{i_1}}(\Lambda)} |S(\alpha)\, T(\alpha)|^2\, d\alpha +$$

$$+ B\cdot R_1\,\frac{NM^k}{Q^{0.29}} \ln^{48} N.$$

Но $R_1 \leqslant R = B\cdot Q^{0,1}$, следовательно:

$$\sum_{i_1 \leqslant R_1} I(N, F_{q_{i_1}}(\Lambda)) = B\,[(1-\eta_1)^k + \eta_{11}]\, M^{k-2} \sum_{i_1 \leqslant R_1} \int\limits_{F_{q_{i_1}}(\Lambda)} |S(\alpha)\, T(\alpha)|^2\, d\alpha +$$

$$+ B\,\frac{NM^k}{Q^{0.19}} \ln^{48} N. \tag{2.2.8}$$

Рассмотрим $I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda))$, т. е. такие q_{i_1}, для которых $d > q_i^{0.5}$.

По условию, мы имеем:

$$N = d'\cdot N',$$

где $d' < p^{r_0}$ и $r_0 \leqslant \ln\ln N$.

Разобьем сумму $T(\alpha)$ на две суммы:

$$T(\alpha) = \sum_{n=1}^{2r_0} e^{-\frac{\varepsilon_n p^n}{N}}\, e^{-2\pi i \alpha \varepsilon_n p^n} + \sum_{n=2r_0+1}^{M} e^{-\frac{\varepsilon_n p^n}{N}}\, e^{-2\pi i \alpha \varepsilon_n p^n} = u(\alpha) + T_1(\alpha).$$

Тогда

$$I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = \sum_{n=1}^{k-2} C_k^n \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\cdot T_1^{k-n}(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha +$$

$$+ C_k^1 \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\cdot T_1(\alpha)\cdot n^{k-1}\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha + \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\cdot u^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\cdot T_1^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha. \tag{2.2.9}$$

Но если $1 \leqslant n \leqslant k-2$, то

$$\left| \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\, T_1^{k-n}(\alpha) \cdot u^n(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha \right| = B\, \frac{\ln^n M}{M^n}\, M^{k-2} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} |S(\alpha)\, T_1(\alpha)|^2\, d\alpha$$

и, следовательно,

$$\left| \sum_{n=2}^{k-2} C_k^n \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} \right| = B\, \frac{\ln M}{M}\, M^{k-2} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} |S(\alpha)\, T(\alpha)|^2\, d\alpha. \tag{2.2.10}$$

Принимая во внимание, что $k > 3$, получаем:

$$\left| \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha) \cdot T_1(\alpha) \cdot u^{k-1}(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha \right| = B \cdot M^{1+\varepsilon} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} |S(\alpha)|^2\, d\alpha \quad (\varepsilon > 0),$$

и

$$\left| \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha) \cdot u^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha \right| = B \cdot M^{\varepsilon} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} |S(\alpha)|^2\, d\alpha \quad (\varepsilon > 0).$$

Поставляя эти оценки и (2.2.10) в правую часть (2.2.9), получаем:

$$I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha) \cdot T_1^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha +$$

$$+ B\, \frac{\ln M}{M}\, M^{k-2} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} |S(\alpha)|^2 (|T(\alpha)|^2 + 1)\, d\alpha. \tag{2.2.11}$$

Положим

$$N_1' = N - \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} - \ldots - \varepsilon_{x_k} \cdot p^{x_k},$$

где каждое $x_i > 2r_0$; в таком случае

$$\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\, T_1^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{N_1'} r_{N_1'} \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N_1'}\, d\alpha = \sum_{N_1'} r_{N_1'}\, I(N_1' \cdot I_{q_{i_2}}(\Lambda)).$$

Докажем, что для каждой пары N_1' и q_{i_2} выполняется неравенство:

$$(N_1',\ q_{i_2}) \leqslant q_{i_2}^{0.6}.$$

Допустим противное, т. е. что

$$(N_1',\ q_{i_2}) > q_{i_2}^{0.6}.$$

Так как $d > q_{i_2}^{0.5}$ и $q_{i_2}' = d \cdot q_{i_2}'$, то мы имеем:

$$(d,\ N_1') > q_{i_2}^{0.1},$$

а так как d имеет простыми делителями только числа канонического разложения

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

то можно утверждать, что среди чисел $p_1 p_2 \dots p_r$ найдется такое p_i, которое входит в каноническое разложение (d, N_1') с показателем степени, не меньшим, чем $\left[\frac{0{,}1}{r} \lg_{p_i} q_{i_2}\right]$.

То, что (d, N_1') в каноническом разложении имеет только числа $p_i (i = 1, 2, \dots, r)$, очевидно.

Допустим, что

$$(d, N_1') = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r}$$

и каждое

$$\nu_i \leqslant \left[\frac{0{,}1}{r} \lg_{p_i} q_{i_2}\right].$$

В таком случае

$$(d, N_1') = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r} < \frac{q_{i_2}^{0.1}}{p_1 \cdot p_2 \dots p_r},$$

т. е. $(d, N_1') < q^{0.1}$, что противоречит условию. Положим

$$\nu_i = \left[\frac{0{,}1}{r} \lg_{p_i} q_{i_2}\right];$$

тогда получаем:

$$(d, N_1') \equiv 0 \pmod{p_i^{\nu_i}}.$$

Положим

$$q_{i_2} \geqslant (\ln N)^{30r \cdot \ln p};$$

в таком случае $\nu_i > 2r_0 + 1$ и, следовательно,

$$(d, N_1') \equiv 0 \pmod{p_i^{2r_0+1}},$$

$$N_1' \equiv 0 \pmod{p_i^{2r_0+1}}.$$

Но

$$N_1' = N - \varepsilon_{x_i} p^{x_1} - \dots - \varepsilon_{x_k} \cdot p^{x_k},$$

причем каждое $x_i \geqslant 2r_0 + 1$, следовательно, имеем:

$$p^{x_i} \equiv 0 \pmod{p_i^{2r_0+1}}.$$

Соединяя это сравнение с последним для N_1', получаем:

$$N \equiv 0 \pmod{p_i^{2r_0+1}}.$$

Но, по условию, $N = p_i^{r_0} \cdot N'$ при $(N', p_i) = 1$, следовательно, для каждой пары N_1' и q_{i_2} имеем:

$$(N_1', q_{i_2}) \leqslant q^{0.6}.$$

Используя оценку (13.1) работы [1], получаем:

$$I(N_1', F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = B \cdot \frac{N}{Q^{0{,}19}} \ln^{42} N$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)} S^2(\alpha)\cdot T_1^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}\,d\alpha = \sum_{N_1'} r_{N_1'}\cdot I(N_1', F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = B\cdot\frac{NM^k}{Q^{0,19}}\ln^{42}N. \tag{2.2.12}$$

Подставляя эту оценку в (2.2.11), находим:

$$I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = B\cdot\frac{\ln M}{M}M^{k-2}\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)|^2(|T_1(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + B\cdot\frac{N\cdot M^k}{Q^{0,19}}\ln^{42}N.$$

Принимая во внимание, что $R_2 \leqslant BQ^{0,1}$, имеем:

$$\sum_{i_2\leqslant R_2} I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = B\cdot\frac{\ln M}{M}M^{k-2}\sum_{i_2\leqslant R}\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)|^2(|T_1(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + B\frac{NM^k}{Q^{0,09}}\ln^{42}N. \tag{2.2.13}$$

Но

$$|T_1(\alpha)|^2 \ll |T(\alpha)|^2 + |u(\alpha)|^2,$$

следовательно,

$$\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)T_1(\alpha)|^2\,d\alpha \ll \int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)T(\alpha)|^2\,d\alpha + B\ln^2 M\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)|^2\,d\alpha.$$

Подставляя эту оценку в (2.2.13), получаем:

$$\sum_{i_2\leqslant R_2} I(N, F_{q_{i_2}}(\Lambda)) = B\cdot\frac{\ln^2 M}{M}M^{k-2}\sum_{i_2\leqslant R_2}\int\limits_{F_{q_{i_2}}(\Lambda)}|S(\alpha)|(|T(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + B\frac{N\cdot M^k}{Q^{0,09}}\ln^{42}N. \tag{2.2.14}$$

Соединяя оценки (2.2.8) и (2.2.14), находим:

$$\sum_{i\leqslant R} I(N, F_{q_i}(\Lambda)) = B[(1-\eta)^k+\eta_1]M^{k-2}\sum_{i=1}^{R}\int\limits_{F_{q_i}(\Lambda)}|S(\alpha)|^2(|T(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + B\frac{N\cdot M^k}{Q^{0,09}}\ln^{43}N. \tag{2.2.15}$$

Для второй суммы в (2.2.4), на основании леммы XIII работы [1], имеем:

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ q=q_i}} I(N, F_{q_i}(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta)^k+\eta_1]M^{k-2}\sum_{\substack{Q<q<2Q\\ q\neq q_i}}\int\limits_{F_{q_i}(\Lambda)}|S(\alpha)T(\alpha)|^2\,d\alpha. \tag{2.2.16}$$

Подставляя оценки (2.2.15) и (2.2.16) в (2.2.4), получаем:

$$\sum_{Q<q\leqslant 2Q} I(N, F_q(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta)^k+\eta_1]M^{k-2}\sum_{Q<q\leqslant 2Q}\int\limits_{F_{q_i}(\Lambda)}|S(\alpha)|^2(|T(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + B\frac{N\cdot M^k}{Q^{0,09}}\ln^{43}N. \tag{2.2.17}$$

Суммируя оценку (2.2.17) по всем Q, количество которых $\ll \ln N$, имеем:

$$\sum_{Q<q\leqslant\tau} I(N, F_q(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta_1)^k+\eta_{11}]\,M^{k-2}\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} |S(\alpha)|^2(|T(\alpha)|^2+1)\,d\alpha + \\ + B\cdot\frac{NM^k}{Q^{0,09}}\ln^{44}N.$$

Но, по теореме А,

$$\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} |S(\alpha)|^2(|T(\alpha)|^2+1)\,d\alpha = B\cdot N\cdot M^2,$$

следовательно,

$$\sum_{Q_1<q\leqslant\tau} I(N, F_q(\Lambda)) = B[(1-\eta_1)^k+\eta_{11}]M^k\cdot N + B\cdot\frac{N\cdot M^k}{Q_1^{0,09}}\ln^{44}N. \quad (2.2.18)$$

Принимая во внимание, что $Q_1 = e^{(\ln N)^{\lambda'}}$, получаем:

$$\frac{N\cdot N^k}{Q_1^{0,09}}\ln^{44}N < \frac{N\cdot M^k}{\ln^{46}N}.$$

Подставляя эту оценку в (2.2.18), окончательно получаем лемму:

$$\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} = B[(1-\eta)^k+\eta_{11}]N\cdot M^k. \quad (2.2.19)$$

Соединяя оценку (2.2.19) с оценкой интеграла $\int\limits_{\mathfrak{m}}$, находим:

$$\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} + \int\limits_{\mathfrak{m}} = B[(1-\eta)^k+\eta]\cdot N\cdot M^k.$$

Подставляя эту оценку в (2.1.1), получаем:

$$\int\limits_0^1 S^2(\alpha)T^k(\alpha)e^{2\pi i\alpha N}d\alpha = \int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} S^2(\alpha)T^k(\alpha)e^{2\pi i\alpha N}d\alpha + B[(1-\eta)^k+\eta_{11}]N\cdot M^k.$$

§ 3. Займемся вычислением интеграла $\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)}$, который должен дать главный член:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} = \sum_{N_1} r_{N_1}\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\alpha)e^{\pi i\alpha N}d\alpha = \\ = \sum_{N_1}\sum_{q=1}^{Q_1}\sum_{(a,q)=1} r_{N_1}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)N}d\alpha. \quad (2.3.1)$$

Воспользуемся первой теоремой Пейджа. Пусть Q_1 — натуральное число. Рассмотрим множество нулей функций $L(s,\chi)$ для всех характеров, основные модули которых $\leqslant Q_1$; это множество обозначим символом $\mathfrak{B}_{Q_1}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{B}_{Q_1} = \sum_{q=1}^{Q_1}\mathfrak{U}_q,$$

где $\mathfrak{N}_q$ — множество нулей всех $L(s, \chi)$ для данного q. Обозначим символом $\tilde{\beta}_{q^*}$ наибольший действительный нуль из множества $\mathfrak{B}_{Q_1}$. В таком случае имеет место

ТЕОРЕМА ПЕЙДЖА. *Существует такая абсолютная положительная постоянная* μ, *что все действительные нули* $\mathfrak{B}_{Q_1}$, *кроме, быть может,* $\tilde{\beta}_{q^*}$, *лежат вне области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{\ln Q_1}.$$

Доказательство см. в работе ([6]).

Могут представиться две возможности: либо $q^* \leqslant (\ln N)^{\nu}$, либо $q^* > (\ln N)^{\nu}$, где $\nu = \max[10^3, 30r \ln p + 1]$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

1. Допустим, что $q^* > (\ln N)^{\nu}$. Тогда выражение (2.3.1) можно представить в виде:

$$\sum_{N_1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q^*)}}^{Q_1} \sum_{(a,q)=1} r_{N_1} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} S^2\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + \alpha\right) N_1} d\alpha +$$

$$+ \sum_{N_1} \sum_{q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q^*)} \sum_{(a,q)=1} r_{N_1} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} S^2\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + \alpha\right) N_1} d\alpha =$$

$$= \sum_{N_1 > 0} r_{N_1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q^*)}} I(N_1, F_q(\Lambda)) + \sum_{N_1} r_{N_1} \sum_{q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q^*)} I(N, F_q(\Lambda)). \quad (2.3.2)$$

Рассмотрим интеграл $I_q(N_1)$ при $q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q^*)$. Мы имеем:

$$I(N_1, F_q(\Lambda)) = I^{(0)}(N_1, F_q(\Lambda)) + I^{(1)}(N_1, F_q(\Lambda)) +$$
$$+ I^{(2)}(N_1, F_q(\Lambda)) + BN^{\gamma}\tau. \quad (2.3.2^*)$$

Используя оценку (4.1) работы ([1]), получаем:

$$| I^{(2)}(N_1, F_q(\Lambda)) | \leqslant B \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}' \int_{-\Lambda}^{\Lambda} | A_{\chi}(\alpha) |^2 d\alpha.$$

Кроме того,

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} | A_{\chi}(\alpha) |^2 d\alpha = B \cdot \ln^4 N \sum_{\nu} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} | A_{\chi\beta}(\alpha) |^2 d\alpha. \quad (2.3.3)$$

Но из оценки (8.5) работы ([1]) следует:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} | A_{\chi\beta}(\alpha) |^2 d\alpha = BN^{2\nu} Q^2 (N^{\gamma}, \nu, \chi) + B \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln^3 N}. \quad (2.3.4)$$

Для дальнейшего нам понадобится

ТЕОРЕМА ЧУДАКОВА. *Пусть* $L(s, \chi)$ — *любая функция, принадлежащая модулю* q; *тогда существует такое* $\mu > 0$, *что* $L(s, \chi) \neq 0$ *в области, определенной условиями*:

$$0 < | t | \leqslant t_0, \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{\ln q},$$

$$| t | > t_0, \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{(\ln t)^{\lambda}},$$

где

$$t_0 = e^{(\ln q)^{\frac{1}{\lambda}}}, \qquad \frac{3}{4} < \lambda < \frac{4}{5}.$$

Доказательство см. в работе (11).

Из этой теоремы, положив $\lambda' = \frac{1-\lambda}{2}$, мы легко получаем

Следствие 1. *Если* $1 \leqslant q \leqslant Q_1 = e^{(\ln N)^{\lambda'}}$ *и* $q \not\equiv 0 \pmod{q^*}$, *то существует такое* $\mu > 0$, *что* $L(s, \chi) \neq 0$ *в области, определенной условиями*:

$$-N \leqslant t \leqslant N, \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}}.$$

Действительно, так как $q \not\equiv 0 \pmod{q^*}$, то, по теореме Пейджа, мы имеем, что все действительные нули лежат вне области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{\ln Q_1} = 1 - \frac{\mu}{(\ln N)^{\frac{1-\lambda}{2}}} > 1 - \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}},$$

а из теоремы Чудакова следует, в соединении с этим результатом, что вся область

$$-N \leqslant t \leqslant N, \quad \sigma \leqslant 1 - \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}}$$

свободна от нулей $L(s, \chi)$ при $q \not\equiv 0 \pmod{q^*}$ и $q \leqslant Q_1$. Это значит, что если

$$\nu \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}},$$

то

$$Q(N^{\gamma_2}, \nu, \chi) = 0$$

и, следовательно, из (2.3.4) получаем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_{\chi\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln^2 N}, \qquad \nu \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}}.$$

Пусть $\nu = \frac{1}{2} - \xi$, где $\frac{1}{10^4} \geqslant \xi \geqslant \frac{\mu}{(\ln N)^{\lambda}}$; в таком случае мы имеем:

$$Q(N^{\gamma_2}, \nu, \chi) = B \cdot q^{2\nu} \cdot N^{\gamma_2\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)} \ln^{10} N + k \cdot q^{30} = B \cdot q \cdot N^{4\gamma_2 \cdot \xi} \cdot \ln^{10} N + k \cdot Q_1^{30}.$$

Подставляя эту оценку в (2.3.4), получаем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_{\chi\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \cdot Q_1 N^{1-2\xi+4\gamma_2\xi} \ln^{10} N^{1-2\xi} Q_1^{30} =$$

$$= B \cdot Q_1 N^{1-\frac{3}{2}\xi} + B \cdot N^{1-\xi} \frac{Q_1^{30}}{N^{\xi}} = B \cdot N \cdot e^{-\mu_1 (\ln N)^{2\lambda'}}.$$

Окончательно имеем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_{\chi\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \cdot N \cdot e^{-\mu_1 (\ln N)^{2\lambda'}}.$$

Подставляя эту оценку в (2.3.3), получаем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha = B \cdot N \cdot e^{-\mu_1 (\ln N)^{2\lambda'}} \ln^6 N \tag{2.3.5}$$

и, следовательно,

$$|I^{(2)}(N, F_q(\Lambda))| = B \cdot Q_1 \cdot N \cdot e^{-\mu_1 (\ln N)^{2\lambda'}} \cdot \ln^6 N.$$

Аналогично получаем:

$$|I^{(1)}(N, F_q(\Lambda))| = B \cdot Q_1 \cdot N \cdot e^{-\mu_1 (\ln N)^{2\lambda'}} \cdot \ln^6 N.$$

Соединяя две последние оценки, получим:

$$|I^{(1)}(N, F_q(\Lambda))| + |I^{(2)}(N, F_q(\Lambda))| = B \cdot Q_1 \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}} \ln^6 N.$$

Замечая, что

$$BN^\gamma \cdot \tau = B \cdot Q_1 \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}} \cdot \ln^6 N,$$

находим:

$$I(N, F_q(\Lambda)) = I^{(0)}(N, F_q(\Lambda)) + B \cdot Q_1 \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}} \ln^6 N$$

и, следовательно,

$$\sum_{N_1 > 0} r_{N_1} \sum_{q \not\equiv 0 \pmod{q^*}} I(N, F_q(\Lambda)) = \sum_{N_1 > 0} r_{N_1} \sum_{q \not\equiv 0 \pmod{q^*}} I^{(0)}(N, F_q(\Lambda)) + B \cdot Q_1^2 \cdot M^k \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}} \ln^6 N. \tag{2.3.6}$$

Так как

$$I^{(0)}(N, F_q(\Lambda)) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a, q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} A_{\chi_0}^2(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N_1} d\alpha,$$

где

$$A_{\chi_0}(\alpha) = \frac{1}{x} - A(\alpha) + B \cdot \ln^3 N,$$

то

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} A_{\chi_0}^2(\alpha) e^{2\pi i \alpha N_1} d\alpha = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{2\pi i \alpha N_1}}{x^2} d\alpha + B \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{|A(\alpha)|}{|x|} d\alpha + B \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|^2 d\alpha + B \cdot \ln^3 N \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{|x|} + B \ln^3 N \cdot \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)| d\alpha + B\Lambda \cdot \ln^6 N. \tag{2.3.7}$$

Но для $A(\alpha)$ справедлива оценка:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|^2 d\alpha = B \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}}.$$

Кроме того, имеем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{|x|^2} < N.$$

Используя эти оценки, получаем:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{|A(\alpha)|}{|x|}\,d\alpha = B\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}},$$

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{|x|} = B\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}},$$

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|\,d\alpha = B\sqrt{N}\,e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}}.$$

Подставляя все эти оценки в (2.3.7), получим:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} A_{\chi_0}^2(\alpha)\cdot e^{2\pi i\alpha N_1}\,d\alpha = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{2\pi i\alpha N_1}}{x^2}\,d\alpha + B\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda_1}}. \qquad (2.3.8)$$

Но

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{2\pi i\alpha N_1}}{x^2}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha N_1}}{x^2}\,d\alpha + B\cdot N^{1-\gamma_2}$$

и

$$N^{1-\gamma_2} = B\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}}.$$

Пользуясь теорией вычетов, находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha N_1}}{x^2}\,d\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } N_1 \leqslant 0, \\ N_1\cdot e^{-\frac{N_1}{N}}, & \text{если } N_1 > 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I^{(0)}(N, F_q(\Lambda)) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i\frac{a}{q}N_1}\cdot N_1\cdot e^{-\frac{N_1}{N}} + BQ_1\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}}. \qquad (2.3.9)$$

Подставляя эти оценки в (2.3.6) и учитывая, что $r_{N_1} = e^{-\frac{N-N_1}{N}}$, получим:

$$\sum_{N_1>0} r_{N_1} \sum_{q\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q^*)} I(N, F_q(\Lambda)) = \frac{1}{e}\sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q^*)} A_q(N_1) +$$

$$+ B\cdot Q_1^2\cdot N\cdot M^k\cdot e^{-\mu_1(\ln N)^{2\lambda'}}. \qquad (2.3.10)$$

Оценим сумму:

$$\sum_{N_1} r_{N_1} \sum_{q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q^*)} I(N_1, F_q(\Lambda)) = \sum_{q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q^*)} I(N, F_q(\Lambda)).$$

Так как, по предположению, $q^* > (\ln N)^{\nu}$, где $\nu = \max[10^3\cdot 30r\ln p + 1]$, то к этой сумме применимы рассуждения леммы XVa и, следовательно, мы имеем:

$$\sum_{q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q^*)} I(N, F_q(\Lambda)) = B\cdot[(1-\eta)^k + \eta_{11}]\cdot N\cdot M^k$$

и

$$e\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\alpha)\,T^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}\,d\alpha = \sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q\not\equiv 0 \pmod{q^*}} A_q(N_1) +$$

$$+ B\cdot[(1-\eta)^k + \eta_1]\,N\cdot M^k.$$

Но

$$\sum_{q\not\equiv 0 \pmod{q^*}} A_q(N_1) = \sum_{q=1}^{Q_1} A_q(N_1) - \sum_{q\equiv 0 \pmod{q^*}} A_q(N_1)$$

и

$$\Big|\sum_{q\equiv 0 \pmod{q^*}} A_q(N_1)\Big| \ll \sum_{q\equiv 0 \pmod{q^*}} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \ln N \sum_{q\equiv 0 \pmod{q^*}} \frac{1}{q} =$$

$$= B\,\frac{\ln N}{q^*}\sum_{n=1}^{Q_1}\frac{1}{n} = B\,\frac{\ln^2 N}{q^*}.$$

Таким образом,

$$\sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q\not\equiv 0 \pmod{q^*}} A_q(N_1) = \sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q=1}^{Q_1} A_q(N_1) + B\cdot\frac{N\cdot M^k\cdot\ln^2 N}{q^*}.$$

Учитывая, что $q > (\ln N)^{1000}$, получаем:

$$e\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\alpha)\,T^k(\alpha)\,e^{2\pi i\alpha N}\,d\alpha = \sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q=0}^{Q_1} A_q(N_1) + B\cdot[(1-\eta)^k + \eta_1]\cdot N\cdot M^k.$$

Эту оценку мы получили в предположении, что $q^* > (\ln N)^\nu$.

2. Допустим теперь, что $q^* \leqslant (\ln N)^\nu$. В таком случае мы можем использовать теорему Зигеля.

ТЕОРЕМА ЗИГЕЛЯ. *Пусть* ε *— произвольное положительное число. Тогда существует такое* μ, *зависящее от* ε, *что*

$$1-\tilde{\beta} > \frac{\mu}{(q^*)^\varepsilon},$$

где $\tilde{\beta}$ *— наибольший действительный нуль функций* $L(s,\chi)$.

Соединяя теорему Зигеля с теоремами Пейджа и Чудакова, мы получаем

Следствие 2. *Если* $1 \leqslant q \leqslant Q_1 = e^{(\ln N)^{\lambda'}}$ *и* $q^* \leqslant (\ln N)^\nu$, *то существует такое* $\mu > 0$, *что* $L(s,\chi) \neq 0$ *в области, определенной условиями* $-N \leqslant t \leqslant N$, $\sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{(\ln N)^\lambda}$ *для всех* q *интервала* $(1, Q_1)$.

Рассуждения, которые были применимы в первом случае для всех модулей, за исключением $\equiv 0 \pmod{q^*}$, сейчас применимы без всякого исключения и, следовательно, аналогично предыдущему, получаем:

$$\sum_{N_1} r_{N_1} \sum_{q=1}^{Q_1} I(N, F_q(\Lambda)) = \frac{1}{e}\sum_{N_1>0} N_1 \sum_{q=1}^{Q_1} A_q(N_1) +$$

$$+ B\cdot Q_1^2\cdot M^k\cdot N\cdot e^{-\mu(\ln N)^{2\lambda'}}. \qquad (2.3.11)$$

Так как

$$Q_1^2 \cdot M^k \cdot N \cdot e^{-\mu (\ln N)^{2\lambda'}} = B[(1-\eta)^k - \eta_{11}] \cdot N \cdot M^k,$$

то, соединяя оценки (2.3.10) и (2.3.11), окончательно имеем:

$$e \int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\alpha) T^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{N_1 > 0} N_1 \sum_{q=1}^{Q_1} A_q(N_1) + \\ + B[(1-\eta)^k + \eta_{11}]. \tag{2.3.12}$$

Но в главе I было доказано, что если $Q_1 = e^{(\ln N)^{\lambda'}}$, то

$$\left| \mathfrak{S}(N_1) - \sum_{q=1}^{Q} A_q(N_1) \right| = \frac{B}{Q^{\frac{1}{3}\lambda'}}.$$

Подставляя эту оценку в (2.3.12), получим:

$$e \int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\alpha) T^k(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) \cdot N_1 + B[(1-\eta)^k + \eta_{11}] N \cdot M^k.$$

Соединяя эту оценку с оценкой (2.2.20), находим:

$$e \int\limits_0^1 S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + B[(1-\eta)^k + \eta_{11}] N \cdot M^k \tag{2.3.13}$$

или, обозначая

$$\rho(N) = B[(1-\eta)^k + \eta_{11}] N \cdot M^k,$$

получаем асимптотическую формулу:

$$e \cdot \int\limits_0^1 S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N).$$

Мы положили $\eta_{11} = 3\gamma_2$, но $\gamma_2 = 10^4 \sqrt{\eta}$, и при заданном η, выбирая k так, чтобы выполнялось неравенство:

$$k \geqslant \frac{1}{2\eta} \ln \frac{1}{\eta},$$

получаем:

$$B[(1-\eta)^k + \eta_{11}] = B\sqrt{\eta},$$

т. е. получаем доказательство теоремы 2.1 для случая $N \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$, если $\nu > \ln \ln N$:

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N), \tag{2.3.14}$$

где $\rho(N) = B\sqrt{\eta} N \cdot M^k$.

Допустим, что

$$N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_i^{\beta_i} \cdot N_1,$$

где $\beta_1 > \ln \ln N, \beta_2 > \ln \ln N, \dots, \beta_i > \ln \ln N$, $i \geqslant 1$.

Возьмем $x_1 = r + 1$ и рассмотрим число

$$N' = N - \varepsilon_{x_1} p^{x_1} = (p_1^{\alpha_1} \dots p_{i_1}^{\alpha_{i_1}})^{x_1} N^{(1)},$$

для которого $(N^{(1)}, p_1 \cdot p_2 \dots p_i) = 1$. Если N' не делится на высокую степень ($> \ln \ln N$) остальных простых сомножителей $p_{i_1+1}, \dots, p_r$ числа p, то мы заканчиваем нашу операцию. Если же

$$N^{(1)} = p_{i_1+1}^{\beta_{i_1+1}} \dots p_{i_2}^{\beta_{i_2}} \cdot N_2,$$

где

$$\beta_{i_1+1} > \ln \ln N, \dots, \quad \beta_{i_2} > \ln \ln N, \quad i_2 \geqslant i_1 + 1, \quad (N_2 p_1 p_2 \dots p_{i_r}) = 1,$$

то, полагая $x_2 = x_1 - 1$, рассмотрим число

$$N'' = N - \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} - \varepsilon_{x_2} \cdot p^{x_2} = (p_1^{\alpha_1} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}})^{x_2} \cdot N^{(2)}.$$

Если слова N'' делятся на высокую степень оставшихся множителей $p_{i_2+1}, \dots, p_r$, то мы рассмотрим число

$$N''' = N - \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} - \varepsilon_{x_2} \cdot p^{x_2} - \varepsilon_{x_3} \cdot p^{x_3}$$

и т. д. Сделав $l \leqslant r$ шагов, мы получим число

$$N^* = N - \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} - \dots - \varepsilon_{x_l} \cdot p^{x_l}$$

с условием, что $N^* \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$, если $\nu > \ln \ln N$, числа $x_1, \dots, x_l$ попарно не равны и каждое $x_i \leqslant r + 1$.

Для числа N^* рассмотрим решение уравнения

$$N^* = p_1 + p_2 + \varepsilon_{x_1} \cdot p^{x_1} + \dots + \varepsilon_{x_k} p^{x_k}$$

с условием, что каждое $x_i \geqslant r + 2$. Если обозначим

$$T_1(\alpha) = \sum_{n=r+2}^{M} e^{-\frac{\varepsilon_n \cdot p^n}{N}} e^{-2\pi i \alpha \varepsilon_n \cdot p^n}$$

и

$$Q_k^*(N^*, p) = \sum_{N_1^*} \sum_{N_1^* = p_1 + p_2} \ln p_1 \ln p_2, \tag{2.3.15}$$

где $N_1^* = N^* - \varepsilon_{x_1} p^{x_1} - \dots - \varepsilon_{x_k} p^{x_k}$ с условием, что $x_i \geqslant r + 2$, то получим:

$$Q_k^*(N^*, p) = e \cdot \int_0^1 S^2(\alpha)\, T_1^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha + BN^{\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

Но

$$T_1(\alpha) = T(\alpha) + \theta \cdot r,$$

следовательно,

$$\int_0^1 S^2(\alpha) \cdot T_1^k(\alpha) \cdot e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha = \int_0^1 S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k} C_k^n r^n \cdot \int_0^1 S^2(\alpha)\, T^{k-n}(\alpha)\, \theta^n\, e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha.$$

Аналогично оценке правой части (2.3.9), получаем:

$$\left| \sum_{n=1}^{k} C_k^n \int_0^1 S^2(\alpha)\, T^{k-n}(\alpha)\, \theta^n e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha \right| = B\, \frac{N \cdot M^k}{M},$$

следовательно,

$$\int_0^1 S^2(\alpha) T_1^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha = \int_0^1 S^2(\alpha) \cdot T^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha + B\, \frac{N \cdot M^k}{M}$$

и, таким образом,

$$Q_k^*(N^*, p) = \int_0^1 S^2(\alpha)\, T^k(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha N^*}\, d\alpha + B\, \frac{N \cdot M^k}{M}. \qquad (2.3.16)$$

Так как рассуждения § 7 главы I не зависят от гипотезы Римана для всех рядов Дирихле, то, следовательно, они полностью применимы к формулам (2.3.14) и (2.3.16).

Таким образом, теорема 2.1, а с нею и теорема 1, полностью доказаны.

Математический институт
имени В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линник Ю. В., Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа, Матем. сборник, т. 32 (74) (1953), 3—60.

[2] Линник Ю. В., Простые числа и степени двойки, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 152—169.

[3] Линник Ю. В., Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 505—520.

[4] Линник Ю. В., Новое доказательство теоремы Гольдбаха — Виноградова, Матем. сборник, 19(61) (1946), 3—7.

[5] Линник Ю. В., О густоте нулей L-рядов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 35—54.

[6] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947.

[7] Родосский К. А., О числе всех нулей L-функций с характерами по данному модулю, Доклады Ак. наук СССР, 84, № 4 (1952), 669—671.

[8] Родосский К. А., О числе L-функций, имеющих нули в некотором прямоугольнике, Укр. матем. журнал, III, № 4 (1951), 395—409.

[9] Романов Н. П., О некоторых теоремах аддитивной теории чисел, Успехи матем. наук, вып. VII (1940), 47—56.

[10] Виноградов И. М., Избранные труды, М.—Л., 1953.

[11] Чудаков Н. Г., О нулях функций $L(S, \chi)$, Матем. сборник, 19 (61) (1946), 47—56.

[12] Постников А. Г., К вопросу о распределении дробных долей показательной функции, Доклады Ак. наук СССР, 86, № 3 (1952), 473—476.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 751—764

А. Г. ПОСТНИКОВ

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С РАСТУЩИМ ЧИСЛОМ СЛАГАЕМЫХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Задача о числе представлений целого N в виде $N = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$, где $f(x)$ — целочисленная функция целочисленного аргумента, $0 \leqslant x_i \leqslant P$, P — фиксированное, а $n \to \infty$, сводится к локальной предельной теореме теории вероятностей. С помощью оценок сумм $\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i f(x)}$ можно решить эту задачу и при растущих P. В работе разбираются случаи $f(x)=x, f(x)=x^2$.

Мы рассматриваем аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Пусть имеется какая-либо функция $f(x)$, принимающая при целых значениях x целые значения. Ищется число представлений целого N в виде

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = N, \tag{1}$$

когда $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $n \to \infty$.

Если P фиксировано, то такая задача просто сводится к теоремам теории вероятностей, относящимся к суммам независимых случайных величин [см. (1), стр. 153 и § 1 настоящей работы]. Мы проводим мысль, что в случае, если известны оценки тригонометрической суммы

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i f(x)}, \tag{2}$$

то можно решить задачу о числе решений уравнения и в том случае, когда P может расти с увеличением n. Решение нужно проводить по плану доказательства локальной предельной теоремы теории вероятностей [см. (2), стр. 250] с добавлением оценок суммы (2). Для иллюстрации этого мы рассматриваем две задачи: в первой мы берем $f(x) = x$ во второй берем $f(x) = x^2$.

§ 1

Дадим вероятностную интерпретацию упомянутых задач.

Пример 1. Пусть $r_{n,P}(N)$ обозначает число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N \tag{3}$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$ и пусть P фиксировано.

Рассмотрим независимые случайные величины ξ_i, определенные следующим законом распределения:

Значения	0	1	. . .	P
Вероятности	$\frac{1}{P+1}$	$\frac{1}{P+1}$	. . .	$\frac{1}{P+1}$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Сосчитаем вероятность $P(\zeta_n = N)$. Вероятность есть отношение числа благоприятствующих событию случаев к общему числу случаев. Общее число случаев равно $(P+1)^n$, число благоприятствующих случаев равно $r_{n,P}(N)$, следовательно,

$$P(\zeta_n = N) = \frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}. \tag{4}$$

Слагаемые являются решетчатыми случайными величинами с максимальным шагом $h = 1$. Математическое ожидание и дисперсия величины ξ определяются формулами:

$$M\xi_i = 0 \cdot \frac{1}{P+1} + 1\,\frac{1}{P+1} + \cdots + P\,\frac{1}{P+1} = \frac{P}{2}, \tag{5}$$

$$D\xi_i = \frac{1}{P+1}(1^2 + \cdots + P^2) - \left(\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{P^2+2P}{12}. \tag{6}$$

Применяя локальную предельную теорему теории вероятностей [см. [2] стр. 250], мы находим, что равномерно относительно целых N

$$\sqrt{n\,\frac{P^2+2P}{12}}\,\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{2n\frac{P^2+2P}{12}}} \to 0.$$

Итак, мы получили, что при фиксированном P и $n \to \infty$ равномерно относительно целых N

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n\,\frac{P^2+2P}{6}}}\,e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}} + o\left(\frac{(P+1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right). \tag{7}$$

Пример 2. Пусть теперь $r_{n,P}(N)$ означает число решений диофантова уравнения

$$N = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \tag{8}$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Введем величины:

$$a = \frac{1}{P+1}(1^2 + 2^2 + \cdots + P^2) = \frac{P(2P+1)}{6}, \tag{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{P+1}(1^4 + 2^4 + \cdots + P^4) - \left(\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{P(2P+1)(3P^2+3P-1)}{30} - \left(\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2 = \frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{180}. \tag{10}$$

Пусть P фиксировано, а $n \to \infty$. Мы сейчас установим, что равномерно относительно целых N имеет место формула:

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n\,\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}}\,e^{-\frac{\left(N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2}{n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}} + o\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{\sqrt{n}}\right). \tag{11}$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_i, определяемые следующим законом распределения:

Значения	0^s	1^s	. . .	P^s
Вероятности	$\frac{1}{P+1}$	$\frac{1}{P+1}$	. . .	$\frac{1}{P+1}$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Сосчитаем вероятность $P(\zeta_n = N)$. Вероятность есть отношение числа благоприятствующих событию случаев к общему числу случаев. Общее число случаев равно $(P+1)^n$, число благоприятствующих случаев равно $r_{n,P}(N)$; следовательно,

$$P(\zeta_n = N) = \frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}. \tag{12}$$

Слагаемые являются решетчатыми случайными величинами с максимальным шагом $h = 1$. Математическое ожидание и дисперсия величины ξ_i определяются формулами:

$$M\xi_i = a = \frac{P(2P+1)}{6}, \tag{9'}$$

$$D\xi_i = \sigma^2 = \frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{180}. \tag{10'}$$

Применяя снова локальную предельную теорему теории вероятностей, получаем, что равномерно относительно целых N

$$\sqrt{n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{180}}\,\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2}{2n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{180}}} \to 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Существует такая константа $k > 1$, что для числа решений $r_{n,P}(N)$ уравнения*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N \tag{3}$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P \leqslant \frac{k^n}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равномерно относительно целых N имеет место асимптотическая формула:

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n\frac{P^2+2P}{6}}}\,e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}} + O\left(\frac{(P+1)^{n-1}}{n}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$r_{n,P}(N)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^{n}e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha. \tag{14}$$

Выберем $0<\eta<1$, которое зафиксируем после, и разобьем путь интегрирования:

$$r_{n,P}(N)=\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^{n}e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\frac{\eta}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{P+1}}\left(\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^{n}e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha+\int\limits_{\frac{1}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}}\left(\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^{n}e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha. \tag{15}$$

Разделив обе части (15) на $(P+1)^n$ и оценивая полученное выражение, находим:

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}=\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^{n}e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha+$$

$$+O\left(\frac{1}{(P+1)^n}\int\limits_{\frac{\eta}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{P+1}}\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|^{n}d\alpha\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{(P+1)^n}\int\limits_{\frac{1}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}}\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|^{n}d\alpha\right).$$

Преобразуем первый член правой части, введя величину

$$B_n=\sqrt{n}\sqrt{\frac{P^2+2P}{12}},$$

величину

$$\beta_3=\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}\left|x-\frac{P}{2}\right|^{3},$$

которая с ростом P имеет, очевидно, порядок P^3, и величины

$$\rho_3=\frac{\beta_3}{\left(\frac{P^2+2P}{12}\right)^{\frac{3}{2}}}\quad\text{и}\quad T_n=\frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}.$$

Все эти величины имеют теоретико-вероятностный смысл. Известно [см. ([3]), стр. 68], что $\rho_3\geqslant 1$. Кроме того, так как в выражении ρ_3 и числитель и знаменатель имеют по P порядок P^3, то $\rho_3\leqslant C$, где C —

некоторая абсолютная постоянная. Имеем:

$$\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^n e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha\left(x-\frac{P}{2}\right)}\right)^n e^{-2\pi i\alpha\left(N-n\frac{P}{2}\right)}\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{2\pi\eta B_n}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{i\frac{t}{B_n}\left(x-\frac{P}{2}\right)}\right)^n e^{-i\frac{t}{B_n}\left(N-n\frac{P}{2}\right)}\,dt.$$

(Здесь мы сделали замену переменных $2\pi B_n\alpha=t$.) Величины $\frac{2\pi B_n}{P+1}$ и $T_n=\frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}$ имеют один и тот же порядок роста, поэтому можно выбрать η так, чтобы

$$\frac{2\pi\eta B_n}{P+1}\leqslant T_n.$$

Мы воспользуемся следующей леммой [см. (3), стр. 216, теорема 2].

ЛЕММА. *При* $|t|\leqslant T_n$

$$\left|\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{i\frac{t}{B_n}\left(x-\frac{P}{2}\right)}\right)^n-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\leqslant\frac{7}{6\sqrt{n}}\frac{|t|^3}{\rho_3}e^{-\frac{t^2}{4}}.\qquad(16)$$

Это дает:

$$\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^n e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha=\frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{2\pi\eta B_n}{P+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-i\frac{t}{B_n}\left(N-n\frac{P}{2}\right)}\,dt+$$

$$+O\left(\frac{1}{B_n\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_n}|t|^3e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt\right)$$

(ибо $1\leqslant\rho_3\leqslant C$). Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^3e^{-\frac{t^2}{4}}dt$ есть константа и B_n по порядку равно $P\sqrt{n}$, то

$$\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{\eta}{P+1}}\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right)^n e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{|\alpha|\leqslant\frac{2\pi\eta B_n}{P+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-i\frac{t}{B_n}\left(N-n\frac{P}{2}\right)}\,dt+O\left(\frac{1}{Pn}\right).\qquad(17)$$

Распространим первый интеграл правой части (17) на всю прямую

$(-\infty, \infty)$. Ошибка при этом будет:

$$O\left(\frac{1}{P\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\geqslant C\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=O\left(\frac{1}{Pn}\int\limits_{|t|\geqslant C\sqrt{n}}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{Pn}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=O\left(\frac{1}{Pn}\right).$$

На основании классического преобразования,

$$\frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-i\frac{t}{B_n}\left(N-n\frac{P}{2}\right)}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{P^2+2P}{12}n}}e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{2n\frac{P^2+2P}{12}}}$$

$\left(B_n=\sqrt{n\frac{P^2+2P}{12}}\right)$. Итак,

$$\frac{r_{n,\,P}(N)}{(P+1)^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{P^2+2P}{6}}}e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}}+O\left(\frac{1}{Pn}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{(P+1)^n}\int\limits_{\frac{\eta}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{P+1}}\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|^n d\alpha\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{(P+1)^n}\int\limits_{\frac{1}{P+1}\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}}\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|^n d\alpha\right). \qquad (18)$$

ЛЕММА. *Пусть* $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{P+1}$, *где* $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2(P+1)}$. *Тогда*

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|\leqslant(P+1)(1-C\varepsilon^2(P+1)^2), \qquad (19)$$

где C — *абсолютная постоянная* >0.

Доказательство. Известно, что

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|=\left|\frac{\sin\pi(P+1)\alpha}{\sin\pi\alpha}\right|.$$

При $|\alpha|\leqslant\frac{1}{P+1}$

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|=\frac{\sin\pi(P+1)\alpha}{\sin\pi\alpha}.$$

Докажем, что на $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{P+1}$ функция $y=\frac{\sin\pi(P+1)\alpha}{\sin\pi\alpha}$ убывает:

$$y'=\frac{\pi(P+1)\cos\pi(P+1)\alpha\sin\pi\alpha-\pi\sin\pi(P+1)\alpha\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}=$$

$$=\frac{\pi}{\sin^2\pi\alpha}((P+1)\operatorname{tg}\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi(P+1)\alpha)\cdot\cos\pi(P+1)\alpha\cdot\cos\pi\alpha.$$

Если $0<\alpha<\frac{1}{2(P+1)}$, то

$$(P+1)\operatorname{tg}\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi(P+1)\alpha<0,$$

а

$$\cos\pi(P+1)\alpha>0$$

(функция $(P+1)\operatorname{tg}\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi(P+1)\alpha$ при $\alpha=0$ равна нулю, а ее производная $(P+1)\pi\left(\frac{1}{\cos^2\pi\alpha}-\frac{1}{\cos^2\pi(P+1)\alpha}\right)<0$ при $0<\alpha<\frac{1}{2(P+1)}$).

Если

$$\frac{1}{2(P+1)}<\alpha<\frac{1}{P+1},$$

то

$$(P+1)\operatorname{tg}\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi(P+1)\alpha>0,$$

а

$$\cos\pi(P+1)\alpha<0.$$

Таким образом, $y'\leqslant 0$ при $0<\alpha<\frac{1}{P+1}$. В силу этого,

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|\leqslant\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\varepsilon x}\right|.$$

Пусть P — нечетное: $P=2s+1$. Тогда

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\varepsilon x}\right|=\left|\sum_{k=0}^{s}\left(e^{2\pi i\frac{2k+1}{2}\varepsilon}+e^{-2\pi i\frac{2k+1}{2}\varepsilon}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{s}|\cos\pi(2k+1)\varepsilon|=2\sum_{k=0}^{s}\cos\pi(2k+1)\varepsilon\leqslant 2\sum_{k=0}^{s}(1-2\varepsilon^2(2k+1)^2)\leqslant$$

$$\leqslant(P+1)(1-C\varepsilon^2(P+1)^2).$$

(Мы воспользовались тем, что $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2(P+1)}$, и тривиальным неравенством: $\cos\pi x\leqslant 1-2x^2$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.) Пусть $P=2s$. Аналогично, имеем:

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\varepsilon x}\right|\leqslant 1+\sum_{k=1}^{s}|e^{2\pi i\varepsilon k}+e^{-2\pi i\varepsilon k}|\leqslant$$

$$\leqslant 1+2\sum_{k=1}^{s}(1-k^2\varepsilon^2)\leqslant(P+1)(1-C\varepsilon^2(P+1)^2).$$

Лемма доказана.

Выберем теперь $\eta\leqslant\frac{1}{2}$ (это не противоречит выбору $\frac{2\pi\eta B_n}{P+1}\leqslant T_n$) и положим $\varepsilon=\frac{\eta}{P+1}$. При $\frac{\eta}{P+1}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{P+1}$

$$\left|\sum_{x=0}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right|\leqslant(P+1)(1-C\eta^2)=(P+1)\rho,$$

где $0<\rho<1$. Если $\frac{1}{P+1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то применяем обычную оценку:

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x}\right| \leqslant \frac{1}{2(\alpha)} \leqslant \frac{P+1}{2} = (P+1)\rho, \quad 0<\rho<1.$$

Подставляя эти оценки в равенство (18), получаем:

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n \frac{P^2+2P}{6}}} e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}} + O\left(\frac{1}{Pn}\right) + O(\rho^n).$$

Если $P \leqslant \frac{k^n}{n}$, где $k>1$ — некоторая постоянная, то $\rho^n \leqslant \frac{1}{Pn}$, и мы получаем:

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n \frac{P^2+2P}{6}}} e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}} + O\left(\frac{1}{Pn}\right),$$

что и требовалось доказать.

§ 3

В этом параграфе $r_{n,P}(N)$ обозначает число решений диофантова уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = N \tag{8}$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $P \leqslant K^n$, K — некоторая постоянная >1, то для числа решений $r_{n,P}(N)$ уравнения (8) равномерно относительно целых N имеет место асимптотическая формула:*

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n \frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}} e^{-\frac{\left(N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2}{n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}} + O\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{n}\right). \tag{20}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$r_{n,P}(N) = \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right)^n e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha. \tag{21}$$

Выберем $0<\eta<1$, которое зафиксируем после, и разобьем интеграл формулы (21) на две части:

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} = \int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\eta}{(P+1)^2}} \left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right)^n e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(P+1)^n} \int\limits_{\frac{\eta}{(P+1)^2} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}} \left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right| d\alpha\right). \tag{22}$$

Преобразуем первый член формулы (22). Величины a и σ определены формулами (9′) и (10′). Введем величину

$$B_n = \sqrt{n}\,\sigma,$$

величину

$$\beta_3 = \frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} |x^2 - a|^3,$$

которая с ростом P имеет, очевидно, порядок P^6, и величины

$$\rho_3 = \frac{\beta_3}{\sigma^3} \quad \text{и} \quad T_n = \frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}.$$

Мы снова убеждаемся в том, что $1 \leqslant \rho_3 \leqslant C$, где C — некоторая абсолютная постоянная. Имеем:

$$\int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\eta}{(P+1)^2}} \left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right)^n e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha =$$

$$= \int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\eta}{(P+1)^2}} \left(\frac{1}{(P+1)}\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha (x^2-a)}\right)^n e^{-2\pi i \alpha (N-na)}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi B_n} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{2\pi\eta B_n}{(P+1)^2}} \left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} e^{i\frac{t}{B_n}(x^2-a)}\right)^n e^{-i\frac{t}{B_n}(N-an)}\, dt.$$

Величины $\frac{2\pi B_n}{(P+1)^2}$ и $T_n = \frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}$ имеют один и тот же порядок роста; поэтому можно выбрать η так, чтобы

$$\frac{2\pi\eta B_n}{(P+1)^2} \leqslant T_n.$$

Мы снова воспользуемся следующей леммой [см. (3), стр. 216 (теорема 2)].

ЛЕММА. *При* $|t| \leqslant T_n$

$$\left|\left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} e^{i\frac{t}{B_n}(x^2-a)}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leqslant \frac{7}{6}\frac{|t|^3}{\sqrt{n}\,\rho_3} e^{-\frac{t^2}{4}}. \qquad (23)$$

Повторяя рассуждения, которые мы использовали в § 2, получаем:

$$\int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\eta}{(P+1)^2}} \left(\frac{1}{P+1}\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right)^n e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{1}{P^2 n}\right). \qquad (24)$$

Итак, мы имеем:

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{(P+1)^n}{P^2 n}\right) +$$

$$+ O\left(\int\limits_{\frac{\eta}{(P+1)^2} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}} \left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2}\right|^n d\alpha\right). \qquad (25)$$

Разберем отдельно случай ограниченных P ($P \leqslant P_0$) и случай растущих P.

Пусть $P \leqslant P_0$. В этом случае производим следующую очевидную оценку:

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right| \leqslant |1 + e^{2\pi i a}| + P - 1 = P - 1 + 2\cos\pi\alpha \leqslant$$

$$\leqslant P - 1 + 2(1 - 2\alpha^2) = P + 1 - 4\frac{\eta}{(P+1)^2} = (P+1)\left(1 - \frac{C}{(P+1)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (P+1)\left(1 - \frac{C}{(P_0+1)^2}\right) = (P+1)\rho,$$

где ρ — постоянная, $0 < \rho < 1$. Это дает:

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{(P+1)^n}{nP^2}\right) + O\left((\rho(P+1))^n\right).$$

Вторым остаточным членом можно пренебречь, так что

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{n}\right). \tag{26}$$

Пусть P увеличивается с ростом n. Тогда можно считать, что при $n \geqslant n_0$ $P \geqslant P_0$. Положим $\tau = [K_0 P]$, где K_0 — константа, которую выберем потом. Разобьем $[0, 1)$ на дуги, сообразно ряду Фарея порядка τ. Эти дуги классифицируем следующим образом: $q = 1$ — главная дуга; $2 \leqslant q \leqslant P^{\frac{3}{4}}$ — большие дуги, $P^{\frac{3}{4}} < q \leqslant \tau$ — малые дуги. Объединение больших дуг обозначим через $\mathfrak{M}_1$, объединение малых дуг — через $\mathfrak{M}_2$.

Преобразуем формулу (25):

$$r_{n,P}(N) = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{(P+1)^n}{P^2 n}\right) +$$

$$+ O\left(\int\limits_{\frac{\eta}{(P+1)^2} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{\tau}} \left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right|^n d\alpha\right) +$$

$$+ O\left(\int\limits_{\mathfrak{M}_1} \left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right|^n d\alpha\right) + O\left(\int\limits_{\mathfrak{M}_2} \left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right|^n d\alpha\right). \tag{27}$$

Займемся оценкой величины $\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right|$, когда $\frac{\eta}{(P+1)^2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{\tau}$. Пусть $C \geqslant 4$ — постоянная величина. Разберем два случая:

1. Пусть $\frac{C}{(P+1)^2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{\tau}$. Положим $P_1 = \left[\frac{P+1}{\sqrt{C}}\right] - 1$. Тогда

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right| \leqslant P_1 + 1 + \left|\sum_{x=P_1+1}^{P} e^{2\pi i a x^2}\right|.$$

Применим оценку Кузьмина (4) $\left(\text{если } 0<\theta\leqslant f'(x)\leqslant 1-\theta \text{ при } a\leqslant x\leqslant b\right.$ и $f'(x)$ монотонна, то $\left.\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right|<\frac{1}{\theta}\right)$. Очевидно,

$$f'(x)=2\alpha x, \quad \frac{2C(P_1+1)}{(P+1)^2}\leqslant 2\alpha x\leqslant \frac{2}{\tau}P.$$

При $K_0>4$ $\frac{2}{\tau}P<\frac{1}{2}$. Значит,

$$\theta=\frac{2C(P_1+1)}{(P+1)^2}.$$

Итак,

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\right|\leqslant \frac{P+1}{\sqrt{C}}+\frac{(P+1)^2}{2C\frac{P+1}{\sqrt{C}}}\leqslant \frac{3}{4}(P+1).$$

2. Пусть $\frac{\eta}{(P+1)^2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{C}{(P+1)^2}$ и пусть $\alpha=\frac{\lambda}{(P+1)^2}$, λ — постоянная. По лемме Ван дер Корпута [см. (5), стр. 175],

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\right|\leqslant\left|\int_0^{P+1} e^{2\pi i\frac{\lambda}{(P+1)^2}x^2}dx\right|+3\leqslant(P+1)\left|\int_0^1 e^{2\pi i\lambda u^2}du\right|+3.$$

При $\lambda>0$

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i\lambda u^2}du\right|<1.$$

Поэтому при $P\geqslant P_0(\eta)$ и $\frac{\eta}{(P+1)^2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{C}{(P+1)^2}$

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\right|\leqslant(P+1)\rho,$$

где ρ строго меньше 1. Таким образом, при $\frac{\eta}{(P+1)^2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{\tau}$, $P\geqslant P_0$,

$$\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\right|\leqslant(P+1)\rho, \tag{28}$$

ρ строго меньше 1.

Оценим $\left|\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}\right|$, когда α принадлежит дуге дроби $\frac{a}{q}$ с $2\leqslant q\leqslant P^{\frac{3}{4}}$. Для этого воспользуемся следующей леммой, легко выводимой из леммы Ван дер Корпута.

ЛЕММА. *Если вещественная функция $f(y)$ при $0\leqslant y\leqslant P+1$ удовлетворяет условиям $0\leqslant f'(y)\leqslant\frac{1}{2}$, $f''(y)\geqslant 0$, то при любом постоянном $0\leqslant\beta\leqslant 1$*

$$\left|\sum_{y=0}^{P} e^{2\pi i f(y)}-\sum_{y=0}^{P} e^{2\pi i f(y+\beta)}\right|\leqslant 6. \tag{29}$$

Доказательство. По лемме Ван дер Корпута,

$$\sum_{y=0}^{P} e^{2\pi i f(y)} = \int_0^P e^{2\pi i f(y)}\,dy + 2\theta,$$

$$\sum_{y=0}^{P} e^{2\pi i f(y+\beta)} = \int_0^P e^{2\pi i f(y+\beta)}\,dy + 2\theta = \int_\beta^{P+\beta} e^{2\pi i f(y)}\,dy + 2\theta = \int_0^P e^{2\pi i f(y)}\,dy + 4\theta.$$

Сопоставление этих двух равенств устанавливает неравенство (29).

Положим $\alpha = \frac{a}{q} + z$, $|z| \leqslant \frac{1}{\tau q}$. Имеем:

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{P}{q}\right]} \sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \alpha (sq+t)^2} + O(q) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\left[\frac{P}{q}\right]} \sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q}+z\right)(sq+t)^2} + O(q) = \sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} t^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{P}{q}\right]} e^{2\pi i z (sq+t)^2} + O(q) =$$

$$= \sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} t^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{P}{q}\right]} e^{2\pi i z q^2 \left(s+\frac{t}{q}\right)^2} + O(q).$$

Обозначим

$$f(s) = |z| q^2 s^2.$$

Тогда

$$f'(s) = 2|z| q^2 s \leqslant 2 \frac{1}{\tau q} q^2 \frac{P}{q} \leqslant \frac{1}{2}$$

при достаточно большом K_0, а $f''(s) \geqslant 0$. Поэтому мы можем применить предыдущую лемму:

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} = \left(\sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} t^2} \right) \left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{P}{q}\right]} e^{2\pi i z q^2 s^2} \right) + O(q). \tag{30}$$

а) Если $q = 2$, то

$$\sum_{t=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} t^2} = 0,$$

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right| = O(1) \leqslant (P+1)\rho$$

при $P \geqslant P_0$, где $0 < \rho < 1$.

б) Если $q > 2$, то, как известно [см. (5), стр. 151],

$$\left| \sum_{t=0}^{P} e^{2\pi i \frac{a}{q} t^2} \right| \leqslant \sqrt{2q},$$

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right| \leqslant \sqrt{2q} \frac{P}{q} + O(q) = \sqrt{2} \frac{P}{\sqrt{q}} + O(P^{\frac{3}{4}}) \leqslant (P+1)\rho$$

при $P \geqslant P_0$, где $0 < \rho < 1$.

Итак, если $P \geqslant P_0$, то, когда $\alpha \in \mathfrak{M}_1$,

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right| \leqslant (P+1)\rho, \quad 0 < \rho < 1. \tag{31}$$

Оценим сумму

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2},$$

когда α принадлежит дуге дроби $\frac{a}{q}$ с $P^{\frac{3}{4}} < q \leqslant [K_0 P]$. Произведем преобразование Гаусса:

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right|^2 = \sum_{x_1=0}^{P} \sum_{x_2=0}^{P} e^{2\pi i \alpha \left(x_1^2 - x_2^2\right)} \leqslant$$

$$\leqslant P + 1 + \sum_{y=1}^{P} \left| \sum_{x_2=0}^{P-y} e^{2\pi i \alpha 2 x_2 y} \right| + \sum_{y=-P}^{-1} \left| \sum_{x_2=0}^{P} e^{2\pi i \alpha 2 x_2 y} \right| \leqslant$$

$$\leqslant P + 1 + 2 \sum_{y=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{(2 \| \alpha \| y)}\right).$$

Применяя к последней сумме оценку, изложенную в ([5]), стр. 170—171 (с $\Lambda = 1$):

$$\sum_{y=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{2 \| \alpha \| y}\right) \leqslant \left(\frac{P}{q} + 1\right)(5P + 5q \ln q),$$

получаем:

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right|^2 \leqslant C P^{2 - \frac{3}{4}},$$

или, при $P \geqslant P_0$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$:

$$\left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i \alpha x^2} \right| \leqslant C P^{\frac{5}{8}} < (P+1)\rho, \quad 0 < \rho < 1. \tag{32}$$

Собирая оценки (27), (28), (31), (32), получаем:

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{1}{P^{2n}}\right) + O(\rho^n) + O(\rho^n) + O(\rho^n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{1}{P^{2n}}\right) + O(\rho^n).$$

Если $P + 1 < K^n$, $K > 1$, то

$$(P+1)^2 < \frac{K'^n}{n}, \quad K' > 1.$$

Пусть $K' = \frac{1}{\rho}$; тогда $\rho^n < \frac{1}{n(P+1)^2}$. Итак,

$$\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}} + O\left(\frac{1}{(P+1)^{2n}}\right).$$

Это в сочетании с формулой (26) и требовалось доказать.

Автор благодарит С. Б. Стечкина за ценную консультацию.

Поступило
12. XII. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хинчин А. Я., Математические основания квантовой статистики, М.—Л., 1951.
[2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М.—Л., 1954.
[3] Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949.
[4] Landau E., Über das Vorzeichen der Gaussschen Summe, Nachr. Ges. der Wiss. zu Göttingen (1928), 19—20.
[5] Сегал Б. И., Тригонометрические суммы и некоторые их применения в теории чисел, Успехи матем. наук, 1, вып. 3—4 (1946), 147—193.
[6] Постников А. Г., Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, Доклады Ак. наук СССР, 108, № 3 (1956), 392.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 765—774

С. Б. СТЕЧКИН

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуется поведение верхней грани суммы $\sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p$, где $0 < p < 2$, $d_k \geqslant 0$ и верхняя грань распространяется на всевозможные многочлены $p_n(z)$ степени n, для которых $\max_{|z| \leqslant 1} |p_n(z)| \leqslant 1$. Полученные результаты прилагаются к изучению коэффициентов Тейлора функций $F(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

1. Постановка задачи. Пусть $0 < p < 2$ и последовательность $D \equiv \{d_n\}$ неотрицательна: $d_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Зафиксируем целое число $n \geqslant 0$ и положим

$$M_n^{(p)}[D] = \sup_{\|p_n(z)\| \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p, \tag{1}$$

где верхняя грань распространяется на всевозможные многочлены степени n

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

удовлетворяющие условию

$$\|p_n(z)\| = \max_{|z| \leqslant 1} |p_n(z)| \leqslant 1.$$

Требуется исследовать поведение последовательности $M_n^{(p)}[D]$ при фиксированном p и $n \to \infty$.

Мы покажем, что

$$M_n^{(p)}[D] \sim \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}}, \tag{2}$$

точнее, что существуют абсолютные положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \leqslant M_n^{(p)}[D] \leqslant C_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}}. \tag{3}$$

Поставленная задача рассматривалась ранее лишь для случая $p = 1$. Например, хорошо известно, что если $d_n \equiv 1$, то

$$M_n^{(1)}[1] \sim \sqrt{n+1} \tag{4}$$

[см. Харди и Литтльвуд ([1]), ([2]), а также С. Б. Стечкин ([6]), где подробно изложена история вопроса]. Для случая, когда $d_n \downarrow 0$ и последовательность D удовлетворяет некоторым дополнительным условиям правильности убывания, Салем ([5]) установил, что

$$M_n^{(1)}[D] \sim \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Здесь, используя совершенно другие методы, мы докажем, в частности, что эта формула справедлива для любой последовательности $d_n \geqslant 0$.

2. Результаты Палея и следствия из них. Р. Палей ([4]) рассмотрел следующую родственную экстремальную задачу: исследовать поведение верхней грани

$$P_n[D] = \sup_{\|F(z)\| \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} d_k |c_k|, \tag{6}$$

распространенной на всевозможные функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

аналитические в круге $|z| < 1$, непрерывные в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющие условию $\|F(z)\| \leqslant 1$.

Палей доказал, что всегда найдется функция $F(z)$, $F(z) \not\equiv 0$, для которой

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| \geqslant B \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|F(z)\|, \tag{7}$$

где B — абсолютная положительная константа. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$P_n[D] \sim \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Различие между нашей задачей для $p = 1$ и задачей Палея состоит в том, что у Палея верхняя грань берется по всевозможным непрерывным функциям, а у нас лишь по многочленам степени n. Поэтому, очевидно, $M_n^{(1)}[D] \leqslant P_n[D]$.

Мы покажем, что переход от одного случая к другому может быть осуществлен с помощью искусственного приема. Для этого прежде всего выведем из результатов Палея один вспомогательный факт.

ЛЕММА 1. *Для любой последовательности $d_n \geqslant 0$ и любого натурального N найдется многочлен степени $2N-1$*

$$P_{2N-1}(z) = \sum_{k=0}^{2N-1} c_k z^k \not\equiv 0,$$

для которого

$$\sum_{k=0}^{N} d_k |c_k| \geqslant B_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|P_{2N-1}(z)\|, \tag{9}$$

где B_1 — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Как хорошо известно [см., например, (3), § 1], если функция

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

регулярна в круге $|z|<1$ и

$$\sigma_n(z, F) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k z^k$$

есть ее сумма Фейера порядка n, то

$$\|\sigma_n(z, F)\| \leqslant \|F(z)\|.$$

Полагая

$$\tau_N(z, F) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k + 2 \sum_{k=N+1}^{2N-1} \left(1 - \frac{k}{2N}\right) c_k z^k = 2\sigma_{2N-1}(z, F) - \sigma_{N-1}(z, F),$$

выводим отсюда, что для любой функции $F(z)$

$$\|\tau_N(z, F)\| \leqslant 2\|\sigma_{2N-1}(z, F)\| + \|\sigma_{N-1}(z, F)\| \leqslant 3\|F(z)\|. \tag{10}$$

Пусть $F(z) = F_N(z)$ есть та функция, которая фигурирует в неравенстве (7) для $n = N$. Положим

$$P_{2N-1}(z) = \tau_N(z, F_N) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k + 2 \sum_{k=N+1}^{2N-1} \left(1 - \frac{k}{2N}\right) c_k z^k.$$

Тогда в силу (7) и (10) будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{N} d_k |c_k| \geqslant B \left\{\sum_{k=0}^{N} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|F(z)\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B}{3} \left\{\sum_{k=0}^{N} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|P_{2N-1}(z)\| = B_1 \left\{\sum_{k=0}^{N} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|P_{2N-1}(z)\|,$$

и лемма доказана с $B_1 = \frac{B}{3}$.

3. Основная лемма.

ЛЕММА 2. *Для любой последовательности $d_n \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant 0$ найдется многочлен*

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \not\equiv 0,$$

для которого

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| \geqslant B_2 \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n(z)\|, \tag{11}$$

где B_2 — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Случай $n \leqslant 2$ тривиален, так как тогда можно положить

$$p_n(z) = c_i z^i,$$

где $d_i = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} d_k$. Поэтому пусть $n \geqslant 3$. Положим

$$N = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

так что

$$2N - 1 \leqslant n \leqslant 2N. \tag{12}$$

Возможны два случая: либо

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} d_k^2, \tag{13}$$

либо

$$\sum_{k=N}^{n} d_k^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} d_k^2. \tag{14}$$

В первом случае мы можем, по лемме 1, найти многочлен $p_n(z) = P_{2N-3}(z)$ степени $2(N-1)-1 = 2N-3 \leqslant n$, для которого

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k |c_k| \geqslant B_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| P_{2N-3}(z) \| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B_1}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| P_{2N-3}(z) \| = B_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| p_n(z) \|.$$

Тем более,

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| \geqslant B_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| p_n(z) \|,$$

и, следовательно, многочлен $p_n(z)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Обратимся к рассмотрению второго случая, когда выполняется неравенство (14). Вновь используя лемму 1, получаем, что существует многочлен

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

степени $2(n-N)-1 \leqslant n-1 < n$, для которого

$$\sum_{k=0}^{n-N} d_{n-k} |c_k| \geqslant B_1 \left\{ \sum_{k=0}^{n-N} d_{n-k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| P_n(z) \| =$$

$$= B_1 \left\{ \sum_{k=N}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| P_n(z) \| \geqslant \frac{B_1}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| P_n(z) \|. \tag{15}$$

Но

$$\|P_n(z)\| = \Big\|\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\Big\| = \max_x \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k e^{-ikx}\Big| = \max_x \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k e^{i(n-k)x}\Big| = \Big\|\sum_{k=0}^{n} c_{n-k} z^k\Big\|. \quad (16)$$

Таким образом, полагая

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} c'_k z^k$$

и используя (15) и (16), получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c'_k| \geqslant \sum_{k=N}^{n} d_k |c'_k| = \sum_{k=0}^{n-N} d_{n-k} |c_k| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B_1}{\sqrt{2}} \left\{\sum_{k=0}^{r} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|P_n(z)\| = \frac{B_1}{\sqrt{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n(z)\| = B_2 \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n(z)\|,$$

и лемма полностью доказана.

Отметим, что так как неравенство (11) однородно, т. е. не нарушается от умножения $p_n(z)$ на константу, то в нем можно считать, что норма $\|p_n(z)\|$ равна любому наперед заданному положительному числу.

4. Решение задачи.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $0 < p < 2$ *и* $d_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. *Тогда*

$$M_n^{(p)}[D] \sim \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}}; \quad (17)$$

точнее, существуют абсолютные положительные константы C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$C_1 \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}} \leqslant M_n^p[D] \leqslant C_2 \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}}. \quad (18)$$

Доказательство. 1) *Оценка* $M_n^{(p)}[D]$ *сверху*. По неравенству Гельдера с показателями $\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{2-p}$ и $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{p}$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2\right\}^{\frac{p}{2}}.$$

Но, по равенству Парсеваля,

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqslant \|p_n(z)\|^2.$$

Поэтому для любого многочлена $p_n(z)$, для которого $\|p_n(z)\| \leqslant 1$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}} \|p_n(z)\|^p \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{n} d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$M_n^{(p)}[D] = \sup_{\|p_n(z)\| \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \tag{19}$$

2) *Оценка* $M_n^{(p)}[D]$ *снизу.* Случай $p = 1$ составляет содержание леммы 2. Остается рассмотреть случаи $0 < p < 1$ и $1 < p < 2$.

а) Случай $0 < p < 1$. По неравенству Гельдера с показателями $\frac{1}{\alpha} = 2 - p$ и $\frac{1}{\beta} = \frac{2-p}{1-p}$ получаем, что для любого многочлена $p_n(z)$

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| = \sum_{k=0}^{n} d_k |c_k|^{\frac{p}{2-p}} |c_k|^{2\frac{1-p}{2-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{2-p}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \right\}^{\frac{1-p}{2-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{2-p}} \|p_n(z)\|^{2\frac{1-p}{2-p}}.$$

Выберем, в частности, многочлен $p_n(z)$ так, чтобы выполнялось неравенство (11). Тогда будем иметь:

$$B_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n(z)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{2-p}} \|p_n(z)\|^{2\frac{1-p}{2-p}},$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \geqslant B_2^{2-p} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \|p_n(z)\|^p$$

и, следовательно,

$$M_n^{(p)}[D] \geqslant B^{2-p} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \qquad (0 < p < 1). \tag{20}$$

b) Случай $1 < p < 2$. В этом случае неравенство Гельдера надлежит применять несколько иначе. Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k |c_k| = \sum_{k=0}^{n} d_k^{\frac{2}{p'}} d_k^{\frac{2-p}{p}} |c_k| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В частности, если многочлен $p_n(z)$ удовлетворяет неравенству (11), то

$$B_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n(z)\| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$B_2^p \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \| p_n(z) \|^p \leqslant \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p$$

и

$$M_n^{(p)}[D] \geqslant B_2^p \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \qquad (1 < p < 2).$$

Сопоставляя это неравенство с (19), (11) и (20), выводим окончательно, что

$$M_n^{(p)}[D] \sim \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \qquad (0 < p < 2).$$

Так как, очевидно, $B_2 \leqslant 1$, то из полученных оценок вытекают также неравенства (18), причем в них можно положить

$$C_1 = B_2^2 \text{ и } C_2 = 1.$$

Теорема доказана.

5. Следствия. Отметим некоторые следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1.1. *Пусть* $0 < p < 2$ *и* $0 \leqslant m \leqslant n$. *Тогда для любой последовательности* $d_n \geqslant 0$ *найдется многочлен вида*

$$P(z) = \sum_{k=m}^{n} c_k z^k \not\equiv 0,$$

для которого

$$\sum_{k=m}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p \geqslant C_1 \left\{ \sum_{k=m}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \| P(z) \|^p, \tag{21}$$

где C_1 — *абсолютная положительная константа.*

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\| P(z) \| = \left\| \sum_{k=0}^{n-m} c_{n+k} z^k \right\|,$$

и воспользоваться теоремой 2.

Следствие 1.2. *Пусть* $0 < p < 2$ *и* $0 \leqslant m \leqslant n$. *Тогда для любой последовательности* $d_n \geqslant 0$ *найдется тригонометрический полином вида*

$$T(x) = \sum_{k=m}^{n} \rho_k \cos(kx - \alpha_k) \not\equiv 0 \qquad (\rho_k \geqslant 0),$$

для которого

$$\sum_{k=m}^{n} d_k^{2-p} \rho_k^p \geqslant C_1 \left\{ \sum_{k=m}^{n} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \max_x |T(x)|^p. \tag{22}$$

В самом деле, если положить

$$T(x) = \operatorname{Re} P(e^{ix}),$$

то будем иметь:

$$\rho_k = |c_k|, \quad \max_x |T(x)| \leqslant \|P(z)\|$$

и остается воспользоваться следствием 1.1.

6. Приложения. Воспользуемся полученными результатами для исследования коэффициентов Тейлора функций $F(z)$, регулярных в круге $|z|<1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $0<p<2$, $d_n \geqslant 0$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 = \infty. \tag{23}$$

Тогда существует функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярная в круге $|z|<1$ *и непрерывная в замкнутом круге* $|z|\leqslant 1$, *для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{2-p} |c_n|^p = \infty. \tag{24}$$

Доказательство. Зададим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_s\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s < \infty, \tag{25}$$

и построим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{N_s\}$, положив $N_0 = 0$ и выбрав N_s $(s = 1, 2,\ldots)$ из условия

$$\left\{\sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}} \geqslant \varepsilon_s^{-p} > \left\{\sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s-1} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}}. \tag{26}$$

Тогда, учитывая однородность неравенства (21), мы можем построить многочлен

$$P_s(z) = \sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s} c_k z^k,$$

для которого

$$\|P_s(z)\| = \varepsilon_s \tag{27}$$

и, в силу (26),

$$\sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s} d_k^{2-p} |c_k| \geqslant C_1 \left\{\sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s} d_k^2\right\}^{1-\frac{p}{2}} \|P_s(z)\|^p \geqslant C_1 \varepsilon_s^{-p} \cdot \varepsilon_s^p = C_1 > 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots). \tag{28}$$

Построим функцию

$$F(z)=\sum_{s=1}^{\infty}P_s(z) \tag{29}$$

и покажем, что она удовлетворяет всем требуемым условиям. Прежде всего, в силу (28), имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{2-p}\,|c_n|^p=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=N_{s-1}+1}^{N_s}d_k^{2-p}\,|c_k|^p\geqslant\sum_{s=1}^{\infty}C_1=\infty.$$

Далее, ряд многочленов (29) равномерно сходится в круге $|z|\leqslant 1$, так как в силу (25)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\|P_s(z)\|=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_s<\infty.$$

Отсюда вытекает, что функция $F(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Теорема доказана.

Отметим, что условие (23), очевидно, и необходимо для существования искомой функции $F(z)$.

Случай $p=1$ этой теоремы установлен Палеем (4).

В качестве непосредственного следствия получаем такое предложение о коэффициентах Фурье непрерывных периодических функций.

Следствие 2.1 *Пусть* $0<p<2$, $d_n\geqslant 0\ (n=0,1,2,\ldots)$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n^2=\infty$. *Тогда существует непрерывная периодическая функция*

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\cos(nx-\alpha_n)\quad(\rho_n\geqslant 0),$$

для которой

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{2-p}\,\rho_n^p=\infty. \tag{30}$$

Полагая здесь $p=1$, $d_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ и замечая, что при $0<r<2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\rho_n\leqslant\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{r'}{2}}\right\}^{\frac{1}{r'}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant C_r\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^r\right\}^{\frac{1}{r}},$$

получаем известную теорему Карлемана (7).

Нам неизвестно, всегда ли существует непрерывная периодическая функция $f(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье, для которой имеет место (30).

Математический институт
имени В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
10. 1. 1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some problems of Diophantine approximation. IV, The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions, Acta Math., 37 (1914), 193—239.

[2] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some problems of Diophantine approximation. V, A remarkable trigonometrical series, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2 (1916), 583—586.

[3] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., Berlin, 1929.

[4] Paley R. E. A. C., A note on power series, Journ. London Math. Soc., 7 (1932), 122—130.

[5] Salem R., Essais sur les séries trigonométriques, Act. Sc. et Industr., N 862, 1940.

[6] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 221—246.

[7] Carleman T., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Math., 41 (1918), 377—384.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 775—782

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(*Представлено академиком* **Н. И. Мусхелишвили**)

В работе даются некоторые условия, достаточные для того, чтобы функция указанного типа имела производную данного порядка.

§ 1

Пусть L — спрямляемый контур длиною l *; через $\mu(s)$ обозначим функцию дуговой координаты s, имеющую ограниченную вариацию на отрезке $[0, l]$.

Рассмотрим функцию $K(s)$ **, обладающую следующими свойствами:

1. $K(s)$ — нечетная функция;
2. $K(s)$ имеет особенность только при $s = 0$, причем

$$\int_0^a |K(x)|\,dx = \infty.$$

Рассмотрим функцию $v(\sigma)$, представляемую интегралом

$$v(\sigma) = \int_0^l K(s-\sigma)\,d\mu(s), \quad 0 < \sigma < l, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения; если ввести обозначение

$$v(\sigma, \varepsilon) = \int_0^{\sigma-\varepsilon} K(s-\sigma)\,d\mu(s) + \int_{\sigma+\varepsilon}^{l} K(s-\sigma)\,d\mu(s), \quad 0 < \sigma - \varepsilon < \sigma + \varepsilon < l, \tag{2}$$

то

$$v(\sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0} v(\sigma, \varepsilon), \tag{3}$$

если этот предел существует.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть на отрезке* $[s_1 - h,\ s_2 + h]$, *где*

$$0 < s_1 - h < s_2 + h < l, \quad h > 0, \tag{4}$$

функция $\mu(s)$ *имеет непрерывную производную* k*-го порядка, модуль непрерывности которой* $\omega_k(\delta)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^h \omega_k(x)\,|K(x)|\,dx < \infty; \tag{5}$$

---

* В случае бесконечного контура требуется спрямляемость каждой конечной его части.

** Обе функции $\mu(s)$, $K(s)$ в общем случае комплекснозначные.

пусть функция $K(s)$ имеет на отрезке $[\lambda, l]$, $\lambda > 0$, непрерывную производную k-го порядка; тогда функция $v(\sigma)$ имеет на отрезке $[s_1, s_2]$ ограниченную производную $(k-1)$-го порядка.

Отметим прежде всего существование интеграла

$$\int_0^a x\,|K(x)|\,dx < \infty; \tag{6}$$

действительно, при $x \to 0$ мы имеем:

$$\frac{\omega_k(x)}{x} \geqslant A > 0,$$

откуда следует:

$$\int_0^a x\,|K(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{A}\int_0^a \omega_k(x)\,|K(x)|\,dx < \infty.$$

Возьмем $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < h$ и составим разность

$$v(\sigma, \varepsilon_1) - v(\sigma, \varepsilon_2) = \int_{\sigma-\varepsilon_2}^{\sigma-\varepsilon_1} K(s-\sigma)\,d\mu(s) + \int_{\sigma+\varepsilon_1}^{\sigma+\varepsilon_2} K(s-\sigma)\,d\mu(s), \quad s_1 \leqslant \sigma \leqslant s_2;$$

так как оба промежутка интегрирования лежат внутри отрезка $[s_1 - h, s_2 + h]$, на котором функция $\mu(s)$ дифференцируема, то

$$v(\sigma, \varepsilon_1) - v(\sigma, \varepsilon_2) = \int_{\sigma-\varepsilon_2}^{\sigma-\varepsilon_1} K(s-\sigma)\,\mu'(s)\,ds + \int_{\sigma+\varepsilon_1}^{\sigma+\varepsilon_2} K(s-\sigma)\,\mu'(s)\,ds, \quad s_1 \leqslant \sigma \leqslant s_2.$$

Вводя $s - \sigma = t$ и пользуясь нечетностью функции $K(s)$, найдем:

$$v(\sigma, \varepsilon_1) - v(\sigma, \varepsilon_2) = \int_{-\varepsilon_2}^{-\varepsilon_1} K(t)\,\mu'(\sigma+t)\,dt + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t)\,\mu'(\sigma+t)\,dt =$$

$$= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t)\,[\mu'(\sigma+t) - \mu'(\sigma-t)]\,dt, \quad s_1 \leqslant \sigma \leqslant s_2. \tag{7}$$

§ 2

Пусть сперва $k = 1$; так как

$$|\mu'(\sigma+t) - \mu'(\sigma-t)| \leqslant \omega_1(2t) \leqslant 2\omega_1(t),$$

то мы имеем:

$$|v(\sigma, \varepsilon_1) - v(\sigma, \varepsilon_2)| \leqslant \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |K(t)|\,|\mu'(\sigma+t) - \mu'(\sigma-t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \omega_1(t)\,|K(t)|\,dt. \tag{8}$$

В силу условия (5) (при $k = 1$), получаем оценку

$$v(\sigma, \varepsilon_1) - v(\sigma, \varepsilon_2) = o(1), \quad s_1 \leqslant \sigma \leqslant s_2,$$

не зависящую от σ.

Таким образом, при $k=1$ *семейство функций* $\{v(\sigma,\varepsilon)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[s_1,s_2]$, *т. е. существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(\sigma,\varepsilon)=v(\sigma),\quad s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2. \tag{9}$$

Полагая в (7) $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=\lambda<h$, получим:

$$v(\sigma,\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{\lambda}K(t)\,[\mu'(\sigma+t)-\mu'(\sigma-t)]\,dt+v(\sigma,\lambda)=$$

$$=\int_{\varepsilon}^{\lambda}K(t)\,[\mu'(\sigma+t)-\mu'(\sigma-t)]\,dt+\int_{0}^{\sigma-\lambda}K(s-\sigma)\,d\mu(s)+$$

$$+\int_{\sigma+\lambda}^{l}K(s-\sigma)\,d\mu(s). \tag{10}$$

Из оценки (8) найдем:

$$|v(\sigma,\varepsilon)|\leqslant|v(\sigma,\lambda)|+\int_{\varepsilon}^{\lambda}|K(t)|\cdot|\mu'(\sigma+t)-\mu'(\sigma-t)|\,dt<$$

$$<\int_{0}^{\sigma-\lambda}|K(s-\sigma)|\,|d\mu(s)|+\int_{\sigma+\lambda}^{l}|K(s-\sigma)|\cdot|d\mu(s)|+2\int_{0}^{\lambda}|K(t)|\,\omega_1(t)\,dt.$$

Благодаря равномерной ограниченности функции $K(t)$ на отрезке $[\lambda,l]$ и ограниченности вариации функции $\mu(s)$, имеем на отрезке $[s_1,s_2]$ оценку:

$$|v(\sigma,\varepsilon)|\leqslant\max_{\lambda\leqslant t\leqslant l}|K(t)|\cdot\int_{0}^{l}|d\mu(s)|+2\int_{0}^{\lambda}|K(t)|\,\omega_1(t)\,dt=A, \tag{11}$$

не зависящую ни от ε, ни от σ. Поэтому, в силу (9), имеем:

$$|v(\sigma)|\leqslant A,\quad s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2. \tag{12}$$

§ 3

Пусть теперь $k=2$. В этом случае $\omega_1(x)\leqslant Cx$ и, следовательно, справедливы соотношения (9) и (12).

Для доказательства существования производной $v'(\sigma)$, $s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2$, рассмотрим второй интеграл соотношения (10) и применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$\int_{0}^{\sigma-\lambda}K(s-\sigma)\,d\mu(s)=K(-\lambda)\,\mu(\sigma-\lambda)-K(-\sigma)\,\mu(0)-\int_{0}^{\sigma-\lambda}K'(s-\sigma)\mu(s)\,ds=$$

$$=-K(\lambda)\,\mu(\sigma-\lambda)+K(\sigma)\,\mu(0)-\int_{0}^{\sigma-\lambda}K'(s-\sigma)\,\mu(s)\,ds.$$

Дифференцируя по σ, найдем:

$$\frac{d}{d\sigma}\int_{0}^{\sigma-\lambda}K(s-\sigma)\,d\mu(s)=-K(\lambda)\,\mu'(\sigma-\lambda)+K'(\sigma)\,\mu(0)-\mu(\sigma-\lambda)\,K'(-\lambda)-$$

$$-\int_{0}^{\sigma-\lambda}\mu(s)\,\frac{d}{d\sigma}K'(s-\sigma)\,ds.$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{d}{d\sigma}K'(s-\sigma)=-\frac{d}{ds}K'(s-\sigma),$$

получим:

$$\frac{d}{d\sigma}\int_0^{\sigma-\lambda}K(s-\sigma)\,d\mu(s)=K'(\sigma)\mu(0)-K(\lambda)\mu'(\sigma-\lambda)-K'(-\lambda)\mu(\sigma-\lambda)+$$
$$+K'(-\lambda)\mu(\sigma-\lambda)-K'(-\sigma)\mu(0)-\int_0^{\sigma-\lambda}K'(s-\sigma)\,d\mu(s).$$

Отсюда, в силу четности функции $K'(t)$, находим:

$$\frac{d}{d\sigma}\int_0^{\sigma-\lambda}K(s-\sigma)\,d\mu(s)=-K(\lambda)\mu'(\sigma-\lambda)-\int_0^{\sigma-\lambda}K'(s-\sigma)\,d\mu(s). \tag{13}$$

Применяя аналогичные рассуждения к третьему интегралу соотношения 10), находим окончательно:

$$v'(\sigma,\varepsilon)=\int_\varepsilon^{\lambda}K(t)[\mu'(\sigma+t)-\mu''(\sigma-t)]\,dt-\int_0^{\sigma-\lambda}K'(s-\sigma)\,d\mu(s)-$$
$$-\int_{\sigma+\lambda}^{l}K'(s-\sigma)\,d\mu(s)-K(\lambda)[\mu'(\sigma+\lambda)+\mu'(\sigma-\lambda)]. \tag{14}$$

Для $s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2$ мы получаем оценку:

$$|v'(\sigma,\varepsilon)|\leqslant 2\int_0^{\lambda}|K(t)|\,\omega_2(t)\,dt+\max_{\lambda\leqslant l\leqslant l}|K'(t)|\int_0^{l}|d\mu(s)|+$$
$$+2|K(\lambda)|\cdot\max_{s_1-h\leqslant s\leqslant s_2+h}|\mu'(s)|=B, \tag{15}$$

не зависящую от σ и ε.

Дифференцируя (7), находим:

$$v'(\sigma,\varepsilon_1)-v'(\sigma,\varepsilon_2)=\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}K(t)[\mu''(\sigma+t)-\mu''(\sigma-t)]\,dt,$$

откуда

$$|v'(\sigma,\varepsilon_1)-v'(\sigma,\varepsilon_2)|\leqslant 2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}|K(t)|\,\omega_2(t)\,dt=o(1),\quad s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2;$$

таким образом, семейство функций $\{v'(\sigma,\varepsilon)\}$ равномерно ограничено и равномерно сходится на отрезке $[s_1,s_2]$; так как, в силу (9) и (11), семейство функций $\{v(\sigma,\varepsilon)\}$ также обладает этими свойствами, то существует производная

$$v'(\sigma)=\lim_{\varepsilon\to 0}v'(\sigma,\varepsilon),\quad s_1\leqslant\sigma\leqslant s_2,$$

ограниченная на отрезке $[s_1,s_2]$, в силу оценки (15).

Мы доказали теорему 1 для $k=1$ и $k=2$; в случае $k\geqslant 3$ применяем метод математической индукции.

§ 4

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть $K(s)=\frac{1}{s}$; тогда условие (5) примет вид:

$$\int_0^a \frac{\omega_k(x)}{x}\,dx<\infty \tag{16}$$

и, в частности, будет выполняться, если функция $\mu^{(k)}(s)$ принадлежит классу Дини — Липшица D_α, $\alpha>1$, т. е.

$$\omega_k(\delta)\leqslant\frac{C}{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\alpha}\,,\quad \alpha>1. \tag{17}$$

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если на отрезке* $[s_1-h,\ s_2+h]$ *функция ограниченной вариации* $\mu(s)$ *имеет* k*-ю производную* $\mu^{(k)}(s)\in D_\alpha$, $\alpha>1$, *то главное значение интеграла типа Коши — Стильтьеса*

$$v(\sigma)=\int_L\frac{d\mu(s)}{s-\sigma},\quad 0<\sigma<l, \tag{18}$$

имеет на отрезке $[s_1, s_2]$ *ограниченную производную* $(k-1)$*-го порядка.*

Пусть, в частности, контуром L является вещественная ось и пусть функция $\mu(s)$ абсолютно непрерывна,

$$v(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)\,dx}{y-x}\,, \tag{19}$$

причем $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$; функции $u(x)$, $v(x)$ являются сопряженными в смысле М. Рисса [см. (3)], причем $v(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(y)\,dy}{y-x}\,. \tag{20}$$

Следовательно, *если на отрезке* $[a-h,\ b+h]$ *существует производная* $v^{(k)}(y)\in D_\alpha$, $\alpha>1$, *то сопряженная функция* (20) (*являющаяся решением сингулярного интегрального уравнения* (19) *с ядром Коши*) *имеет на отрезке* $[a, b]$ *ограниченную производную* k*-го порядка.*

Пусть теперь контуром L служит окружность $|z|=1$. Построим аналитическую функцию

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\mu(\theta)=u(z)+iv(z),\quad |z|<1, \tag{21}$$

где $\mu(\theta)$ — вещественная функция. Мы имеем:

$$f(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\theta)+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2r\sin(\varphi-\theta)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\theta),$$

откуда следует, что во всех точках, в которых существует производная $\mu'(\varphi)$,

$$f(e^{i\varphi}) = \lim_{r\to 1-0} f(re^{i\varphi}) = \mu'(\varphi) + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\, d\mu(\theta) = u(e^{i\varphi}) + iv(e^{i\varphi}).$$

Таким образом,

$$v(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\, d\mu(\theta). \tag{22}$$

В этом случае

$$K(t) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \tag{23}$$

и условие (5) снова переходит в условие (16).

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим ряд Фурье — Стильтьеса*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi),$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\theta\, d\mu(\theta), \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\theta\, d\mu(\theta) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Если на отрезке $[\alpha - h,\ \beta + h]$ *существует производная* $\mu^{(k)}(\theta) \in D_x$, $\alpha > 1$, *то функция* (22), *к которой равномерно сходится на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *сопряженный ряд* *

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin k\varphi - b_k\cos k\varphi), \tag{25}$$

имеет на этом отрезке ограниченную производную $(k-1)$*-го порядка. Аналитическая функция* (21) *имеет на дуге* $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$ *ограниченную производную* $(k-1)$*-го порядка.*

Последнее утверждение вытекает из того, что при $z = e^{i\theta}$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz} = -ie^{-i\theta}\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}. \tag{26}$$

Пусть, в частности, функция $\mu(\theta)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(\theta)\,d\theta, \quad |z|<1. \tag{27}$$

Тогда функция

$$v(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}u(\theta)\,d\theta \tag{28}$$

является сопряженной по отношению к функции $u(\varphi)$.

Пусть существует интеграл

$$\int_0^{2\pi}|u(\theta)|\log^+|u(\theta)|\,d\theta < \infty; \tag{29}$$

* См. (2), § 2.71.

тогда функция $v(\varphi)$ также суммируема [см. (2), § 7.24], и мы имеем:

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\, v(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\, d\theta. \tag{30}$$

ТЕОРЕМА 4. *Если суммируемая 2π-периодическая функция $u(\theta)$ имеет на отрезке $[\alpha-h,\ \beta+h]$ производную $u^{(k)}(\theta)\in D_\alpha$, $\alpha>1$, то сопряженная функция $v(\varphi)$ (являющаяся при условии (29) решением сингулярного интегрального уравнения (30) с ядром Гильберта) имеет на отрезке $[\alpha,\beta]$ ограниченную производную k-го порядка. Аналитическая функция (27) имеет на дуге $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$ ограниченную производную k-го порядка.*

Отсюда вытекает один частный случай, имеющий большое значение в теории ортогональных многочленов [см. (4), гл. X—XIII, и (1)].

Пусть $\mu(\theta)$ — вещественная, ограниченная, не убывающая на отрезке $[0,2\pi]$ функция и пусть существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \log \mu'(\theta)\, d\theta > -\infty. \tag{31}$$

Построим аналитическую функцию [см. (4), § 10.2]

$$D(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\mu'(\theta)d\theta\right\}, \quad |z|<1, \tag{32}$$

причем почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем:

$$\lim_{r\to 1-0} |D(re^{i\varphi})|^2 = |D(e^{i\varphi})|^2 = \mu'(\varphi); \tag{33}$$

в таком случае теорема 4 позволит сделать следующее заключение о дифференциальных свойствах функции $D(z)$ на некоторой дуге единичной окружности.

ТЕОРЕМА 4′. *Пусть на отрезке $[\alpha,\beta]$ функция $\mu(\theta)$ имеет непрерывную производную $\mu^{(k)}(\theta)\in D_\gamma$, $\gamma>1$, причем*

$$\mu'(\theta)\geqslant m>0, \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta; \tag{34}$$

тогда внутри дуги $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$ функция $D(z)$ имеет ограниченную производную $(k-1)$-го порядка.

Для доказательства сравним (32) с (27); мы имеем:

$$u(\theta) = \log\mu'(\theta), \quad f(z) = \log D(z).$$

В силу того, что $0<m\leqslant\mu'(\theta)\leqslant M$ на $[\alpha,\beta]$, находим:

$$|\log\mu'(\theta_1) - \log\mu'(\theta_2)| \leqslant \frac{1}{m}|\mu'(\theta_1)-\mu'(\theta_2)|, \quad \theta_1,\theta_2\in[\alpha,\beta], \tag{35}$$

и, таким образом, легко видеть, что обе функции $[\log\mu'(\theta)]^{(k-1)}$ и $\mu^{(k)}(\theta)$ имеют модули непрерывности одного порядка. Так как, по условию (33),

$$0<\frac{1}{\sqrt{M}}\leqslant|D(e^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

то производные $[\log D(e^{i\theta})]^{(k-1)}$ и $[D(e^{i\theta})]^{(k-1)}$ одновременно существуют и одновременно ограничены на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Поступило
3. II. 1956.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Геронимус Я. Л., Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения, Сообщ. Харьк. Математ. Об-ва, 19 (1948), 35—120.
[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939.
[3] Riesz M., Sur les fonctions conjugueés, Math. Zeitschr., 27 (1927), 218—244.
[4] Szegö G., Orthogonal polynomials, New York, 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 783—792

А. В. ШТРАУС

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

Рассматривается краевая задача второго порядка на полуоси. В отличие от обычной задачи Штурма — Лиувилля параметр входит также и в краевое условие. Устанавливается формула разложения по собственным функциям.

§ 1. Краевая задача и связь с теорией обобщенных резольвент

1. Пусть $l[y]$ — заданное на полуоси $[0, +\infty)$ самосопряженное дифференциальное выражение вида $l[y] = -(py')' + qy$, где функции $p(x)$ и $q(x)$ измеримы и вещественны, причем для любого $b > 0$

$$\int_0^b \frac{dx}{|p(x)|} < +\infty, \quad \int_0^b |q(x)|\,dx < +\infty.$$

Кроме того, во всем дальнейшем предполагается, что хотя бы одно решение уравнения $l[y] = 0$ не принадлежит гильбертову пространству $L^2(0, +\infty)$.

В настоящей работе рассматривается вопрос о разложении по собственным функциям следующей краевой задачи на полуоси $[0, +\infty)$:

$$l[y] - \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = \vartheta(\lambda)\, p(x)\, y'(x)|_{x=0} \text{ *}, \tag{1.2}$$

где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная мероморфная функция с неотрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости и вещественная на вещественной оси или же бесконечная константа.

Краевые задачи такого типа встречаются в теории колебаний **.

Заметим, что функция $\vartheta(\lambda)$ удовлетворяет, очевидно, условию

$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \overline{\vartheta(\lambda)},$$

так что мнимая часть в нижней полуплоскости неположительна. Легко

---

* Если для какого-либо λ $\vartheta(\lambda) = \infty$, то условие (1.2) заменяется следующим:

$$p(x)\, y'(x)|_{x=0} = 0.$$

** Так, например, в случае струны с грузом на конце появляется краевое условие (1.2) с функцией $\vartheta(\lambda) = -\frac{a}{\lambda}$, где $a > 0$ [см., например, (2), стр. 140—145]. Если груз в конце струны находится под действием упругой силы, то мы получим краевое условие (1.2) с функцией $\vartheta(\lambda) = \frac{a}{b - \lambda}$, где $a > 0$, $b > 0$.

также видеть, что все полюсы функции $\vartheta(\lambda)$ вещественные и простые *.

2. Пусть L — порожденный выражением $l[y]$ дифференциальный оператор с минимальной областью определения. В рассматриваемом здесь случае оператор L имеет индекс дефекта (1.1). Его область определения D_L состоит из всех функций $y(x) \in L^2(0, +\infty)$, для которых $l[y]$ имеет естественный смысл и также принадлежит $L^2(0, +\infty)$ и которые, кроме того, удовлетворяют граничным условиям: $y(0) = p(x)\, y'(x)|_{x=0} = 0$.

При любом комплексном λ рассмотрим квазисамосопряженное расширение $L_{\vartheta(\lambda)}$ оператора L, имеющее своей областью определения совокупность $D_{L_{\vartheta(\lambda)}}$ тех функций $y(x) \in L^2(0, +\infty)$, для которых $l[y] \in L^2(0, +\infty)$ и которые удовлетворяют граничному условию (1.2).

Так как функция $\vartheta(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости и имеет там неотрицательную мнимую часть, или же $\vartheta(\lambda) \equiv \infty$, то, согласно результатам работ ([3]) и ([4]), при любом невещественном λ для оператора $L_{\vartheta(\lambda)} - \lambda E$ существует ограниченный обратный и формулой

$$R_\lambda = (L_{\vartheta(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0) \tag{1.3}$$

определяется некоторая обобщенная резольвента R_λ оператора L **.

Обобщенной резольвенте R_λ соответствует спектральная функция E_t $(-\infty < t < +\infty)$ оператора L, связанная с ней формулой:

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0). \tag{1.4}$$

Условимся говорить, что эта спектральная функция E_t оператора L определяется функцией $\vartheta(\lambda)$.

В настоящей работе устанавливается, что, как естественно ожидать, связанное с функцией E_t разложение представляет собой разложение по собственным функциям краевой задачи (1.1), (1.2). Для этого достаточно будет лишь несколько преобразовать, учитывая свойства функции $\vartheta(\lambda)$, ту общую формулу спектральных функций оператора L, которая была получена в работе ([4]) ***.

§ 2. Формула разложения по собственным функциям краевой задачи

1. Напомним некоторые обозначения из работы ([4]), а также некоторые рассмотренные там факты.

---

* Всякая отличная от бесконечной константы функция $\vartheta(\lambda)$, принадлежащая рассматриваемому классу, допускает представление

$$\vartheta(\lambda) = \alpha + \mu\lambda + \sum_k \frac{1+\lambda_k\lambda}{\lambda_k - \lambda}\,\rho_k,$$

где λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — ее полюсы, а α, μ и ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$—вещественные постоянные, причем $\mu \geqslant 0$, $\rho_k > 0$ и $\sum_k \rho_k < +\infty$ [см., например, ([1]),•стр. 209].

** В работе ([4]) оператор $L_{\vartheta(\lambda)}$ был обозначен по-иному; E, как обычно, обозначает единичный оператор.

*** Отметим, что класс функций $\vartheta(\lambda)$, рассматриваемых в настоящей работе, у́же, чем в работе ([4]). Для этого более узкого класса функций и окажется возможным упомянутое преобразование формулы спектральных функций.

При любом комплексном λ $u_1(x;\lambda)$, $u_2(x;\lambda)$ суть решения уравнения (1.1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям:

$$u_1(0;\lambda)=1, \quad p(x)u_1'(x;\lambda)|_{x=0}=0,$$

$$u_2(0;\lambda)=0, \quad p(x)u_2'(x;\lambda)|_{x=0}=-1.$$

При любом невещественном λ $m(\lambda)$ определяется однозначно условием:

$$\psi(x;\lambda)=u_2(x;\lambda)+m(\lambda)u_1(x;\lambda)\in L^2(0,+\infty). \tag{2.1}$$

Функции $\Phi_{jk}(\lambda)$ $(j,k=1,2)$ невещественного параметра λ определяются формулами:

$$\Phi_{11}(\lambda)=\frac{m(\lambda)\vartheta(\lambda)}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)}, \quad \Phi_{22}(\lambda)=-\frac{1}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)},$$
$$\Phi_{12}(\lambda)=\Phi_{21}(\lambda)=-\frac{m(\lambda)}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)}. \tag{2.2}$$

Каковы бы ни были вещественные числа ξ_1, ξ_2, квадратичная форма $\sum_{j,k=1}^{2}\Phi_{jk}(\lambda)\xi_j\xi_k$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией параметра λ с неотрицательной мнимой частью *.

Функции $\rho_{jk}(t)$ $(j,k=1,2)$ вещественного параметра t $(-\infty<t<+\infty)$ определяются формулой:

$$\rho_{jk}(t)=\frac{1}{\pi}\lim_{\tau\to+0}\int_0^t \operatorname{Im}\Phi_{jk}(\sigma+i\tau)\,d\sigma \quad (j,k=1,2).$$

Для краткости записи при произвольных вещественных α и β введем обозначение:

$$E_{\alpha,\beta}=\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2},$$

где E_t $(-\infty<t<+\infty)$ — спектральная функция оператора L, определяемая рассматриваемой функцией $\vartheta(\lambda)$ **.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0,+\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Тогда имеет место формула

$$E_{\alpha,\beta}f=\int_\alpha^\beta \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x;\sigma)F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma), \tag{2.3}$$

где

$$F_k(f;\sigma)=\int_0^{+\infty} f(s)u_k(s;\sigma)\,ds \quad (k=1,2).$$

2. Для того чтобы преобразовать формулу (2.3), рассмотрим простые соотношения, связывающие функции $\rho_{jk}(t)$ $(j,k=1,2)$, если функция $\vartheta(\lambda)$ удовлетворяет указанным в § 1 условиям.

Пусть $[\alpha,\beta]$ — произвольный сегмент; при этом не исключается случай $\alpha\geqslant\beta$, т. е. имеется в виду ориентированный сегмент, а также допу-

* В работе [4] это свойство выражено в несколько иной, эквивалентной форме.

** Спектральная функция E_t $(-\infty<t<+\infty)$ предполагается непрерывной слева.

скается случай сегмента, вырождающегося в точку. Рассмотрим произвольный сегмент $\Delta = [\alpha, \sigma] \subset [\alpha, \beta]$. Введем обозначение

$$\rho_{jk}(\Delta) = \rho_{jk}(\sigma) - \rho_{jk}(\alpha) \quad (j, k = 1, 2).$$

Предположим сначала, что сегмент $[\alpha, \beta]$, а следовательно, и Δ не содержит полюсов функции $\vartheta(\lambda)$. Тогда, принимая во внимание формулы (2.2) и применяя лемму 5 работы автора ([4]), получим;

$$\rho_{12}(\Delta) = \rho_{21}(\Delta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} [\Phi_{12}(\sigma + i\tau) + 1]\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} \left[\frac{\vartheta(\sigma + i\tau)}{\vartheta(\sigma + i\tau) + m(\sigma + i\tau)} \right] d\sigma = -\int_{\alpha}^{\sigma} \vartheta(\sigma)\, d\rho_{22}(\sigma), \tag{2.4}$$

$$\rho_{11}(\Delta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} [\Phi_{11}(\sigma + i\tau) - \vartheta(\sigma + i\tau)]\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} \left[\frac{-\vartheta^2(\sigma + i\tau)}{\vartheta(\sigma + i\tau) + m(\sigma + i\tau)} \right] d\sigma = \int_{\alpha}^{\sigma} \vartheta^2(\sigma)\, d\rho_{22}(\sigma). \tag{2.5}$$

При помощи равенств (2.4) и (2.5) формула (2.3) преобразуется к виду:

$$E_{\alpha,\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} v(x; \sigma)\, \Phi(f; \sigma)\, d\rho_{22}(\sigma), \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} v(x; \sigma) &= u_2(x; \sigma) - \vartheta(\sigma)\, u_1(x; \sigma), \\ \Phi(f; \sigma) &= \int_{0}^{+\infty} f(s)\, v(s; \sigma)\, ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Аналогично рассматривается случай, когда сегмент $[\alpha, \beta]$ не содержит нулей функции $\vartheta(\lambda)$. В этом случае имеем:

$$\rho_{12}(\Delta) = \rho_{21}(\Delta) = -\int_{\alpha}^{\sigma} \frac{1}{\vartheta(\sigma)}\, d\rho_{11}(\sigma),$$

$$\rho_{22}(\Delta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} \left[\Phi_{22}(\sigma + i\tau) + \frac{1}{\vartheta(\sigma + i\tau)} \right] d\sigma = \int_{\alpha}^{\sigma} \frac{1}{\vartheta^2(\sigma)}\, d\rho_{11}(\sigma). \tag{2.8}$$

Формула (2.3) принимает теперь вид:

$$E_{\alpha,\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} y(x; \sigma)\, \Psi(f; \sigma)\, d\rho_{11}(\sigma), \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} y(x; \sigma) &= u_1(x; \sigma) - \frac{1}{\vartheta(\sigma)}\, u_2(x; \sigma), \\ \Psi(f; \sigma) &= \int_{0}^{+\infty} f(s)\, y(s; \sigma)\, ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Определенные формулами (2.7) и (2.10) функции $v(x; \sigma)$ и $y(x; \sigma)$ являются собственными функциями краевой задачи (1.1), (1.2), соответствующими значению $\lambda = \sigma$; при этом, говоря о собственных функциях этой краевой задачи, мы, разумеется, не требуем, чтобы они принадлежали пространству $L^2(0, +\infty)$. Таким образом, правые части формул (2.6) и (2.9) представляют собой разложения по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи. Поскольку числовую ось можно разбить на счетное множество сегментов, к каждому из которых применима хотя бы одна из формул (2.6), (2.9), отсюда следует, что функция $f(x)$ разлагается по собственным функциям краевой задачи (1.1), (1.2).

Впрочем, удобнее будет получить формулу разложения по собственным функциям, несколько отступая от только что намеченного пути.

Прежде всего, при помощи формул (2.6) и (2.9) легко получить формулу для оператора $E_{\alpha,\beta}$, не делая каких-либо предположений относительно отрезка $[\alpha, \beta]$. С этой целью представим рассматриваемую мероморфную функцию $\vartheta(\lambda)$ в виде

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\vartheta_1(\lambda)}{\vartheta_2(\lambda)},$$

где $\vartheta_1(\lambda)$ и $\vartheta_2(\lambda)$ — целые функции, не имеющие общих нулей.

Пусть t — произвольное вещественное число. Разобьем отрезок $[0, t]$ на конечное число частичных отрезков $\Delta_k = [\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1; \sigma_0 = 0, \sigma_n = t)$, каждый из которых не содержит нулей хотя бы одной из двух функций $\vartheta_1(\lambda)$, $\vartheta_2(\lambda)$ *. Положим

$$\rho(\Delta_k) = \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{\vartheta_2^2(\sigma)}\, d\rho_{22}(\sigma), \tag{2.11}$$

если при $\sigma \in \Delta_k$ $\vartheta_2(\sigma) \neq 0$, и

$$\rho(\Delta_k) = \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{\vartheta_1^2(\sigma)}\, d\rho_{11}(\sigma), \tag{2.12}$$

если при $\sigma \in \Delta_k$ $\vartheta_1(\sigma) \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Легко видеть, принимая во внимание (2.5) и (2.8), что если сегмент Δ_k не содержит нулей обеих функций $\vartheta_1(\lambda)$ и $\vartheta_2(\lambda)$, то правые части в формулах (2.11) и (2.12) совпадают.

Положим

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\Delta_k). \tag{2.13}$$

$\rho(t)$ не зависит, очевидно, от способа разбиения отрезка $[0, t]$ на частичные. Мы получаем, таким образом, неубывающую функцию $\rho(t)$, определенную на всей числовой оси; при этом $\rho(0) = 0$.

---

* Может случиться, что отрезок $[0, t]$ не потребуется разбивать.

Будем называть функцию $\rho(t)$ спектральной функцией распределения оператора L.

Принимая во внимание формулы (2.6), (2.9), а также определение функции $\rho(t)$, убеждаемся в том, что при любых вещественных α и β справедлива формула:

$$E_{\alpha,\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} u(x;\sigma)\, F(f;\sigma)\, d\rho(\sigma), \tag{2.14}$$

где

$$u(x;\sigma) = \vartheta_1(\sigma)\, u_1(x;\sigma) - \vartheta_2(\sigma)\, u_2(x;\sigma), \tag{2.15}$$

$$F(f;\sigma) = \int_{0}^{+\infty} f(s)\, u(s;\sigma)\, ds. \tag{2.16}$$

Переходя в равенстве (2.14) к пределу при $\alpha \to -\infty$ и $\beta \to +\infty$, получим:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x;\sigma)\, F(f;\sigma)\, d\rho(\sigma); \tag{2.17}$$

при этом интеграл справа сходится в смысле метрики пространства $L^2(0, +\infty)$.

Умножая скалярно обе части равенства (2.17) на $f(x)$, получаем уравнение замкнутости:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f;\sigma)|^2\, d\rho(\sigma). \tag{2.18}$$

Формулы (2.14), (2.17) и (2.18) установлены в предположении, что $f(x)$ есть функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Обычным путем убеждаемся в том, что они остаются в силе для произвольной функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$; при этом интеграл в формуле (2.16) сходится в смысле метрики пространства $L^2_\rho(-\infty, +\infty)$.

Таким образом, установлена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ имеет место разложение* (2.17) *по собственным функциям краевой задачи* (1.1), (1.2) *и справедливо уравнение замкнутости* (2.18). *При этом $\rho(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ есть неубывающая функция, которая задается формулами* (2.11), (2.12) *и* (2.13), *$F(f;\sigma)$ определяется формулой* (2.16), *а интегралы в правых частях формул* (2.17) *и* (2.16) *сходятся соответственно в смысле метрик пространств $L^2(0, +\infty)$ и $L^2_\rho(-\infty, +\infty)$.*

Для спектральной функции E_t оператора L, определяемой функцией $\vartheta(\lambda)$, имеет место формула (2.14).

§ 3. О собственных функциях краевой задачи, принадлежащих пространству $L^2(0, +\infty)$

Естественно возникает вопрос, для каких значений σ определенные формулой (2.15) собственные функции $u(x;\sigma)$ краевой задачи (1.1), (1.2) принадлежат пространству $L^2(0, +\infty)$, или, иными словами, для каких

вещественных значений параметра λ уравнение

$$L_{\vartheta(\lambda)}\, y - \lambda y = 0 \tag{3.1}$$

имеет ненулевое решение *.

В том частном случае, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная или бесконечная константа, т. е. когда соответствующая спектральная функция E_t ортогональна, ответ очевиден: множество таких значений σ совпадает с множеством точек разрыва спектральной функции E_t, или, что то же самое, с множеством точек разрыва спектральной функции распределения $\rho(t)$. Мы убедимся, что это верно и для любой функции $\vartheta(\lambda)$ из рассматриваемого в настоящей работе класса функций.

Установим сначала несложное вспомогательное предложение.

ЛЕММА. *Пусть* $F_t\,(-\infty < t < +\infty)$ — *обобщенное разложение единицы в гильбертовом пространстве* H *и* g — *некоторый элемент этого пространства* **. *Если векторная функция* $F_t g$ *параметра* t *непрерывна в точке* σ, *то при* $\tau \to 0$ $(\tau \neq 0)$

$$\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_t g}{t - \sigma + i\tau} \to 0$$

(*в смысле сильной сходимости*).

Доказательство. При доказательстве леммы можно, очевидно, ограничиться случаем, когда $\|g\| = 1$.

Для краткости записи введем обозначение:

$$g_{\alpha,\beta}(\tau) = \tau \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF_t g}{t - \sigma + i\tau} \qquad (-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty.$$

При любом положительном δ имеем:

$$g_{-\infty,\,+\infty}(\tau) = g_{-\infty,\,\sigma-\delta}(\tau) + g_{\sigma-\delta,\,\sigma+\delta}(\tau) + g_{\sigma+\delta,\,+\infty}(\tau). \tag{3.2}$$

Для того чтобы оценить нормы слагаемых в правой части равенства 3.2), заметим, что для любой непрерывной и ограниченной в промежутке (α, β) функции $\varphi(t)$ имеет место неравенство:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, dF_t g \right\| \leqslant M \sqrt{((F_\beta - F_\alpha)\, g, g)}. \quad *** \tag{3.3}$$

где $M = \sup\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant} |\varphi(t)|$.

Действительно, неравенство (3.3), очевидно, справедливо в случае ортогонального разложения единицы. Это позволяет убедиться в справед-

---

* При невещественном λ уравнение (3.1) не имеет ненулевых решений, так как для оператора $L_{\vartheta(\lambda)} - \lambda E$ существует обратный.

** По поводу обобщенного разложения единицы и упоминаемой далее теоремы М. А. Наймарка см., например, (1), стр. 359—366.

*** Неравенство (3.3) имеет место и для более обширного класса функций.

ливости неравенства (3.3) и в общем случае неортогонального разложения единицы F_t, если воспользоваться теоремой М. А. Наймарка, согласно которой при любом $f \in H$ и любом вещественном t $F_t f = P \widetilde{F}_t f$, где $\widetilde{F}_t$ $(-\infty < t < +\infty)$ — ортогональное разложение единицы в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supset H$, а P — оператор проектирования в $\widetilde{H}$ на H.

Применяя неравенство (3.3), легко получаем следующие оценки:

$$\| g_{+\infty,\ \sigma-\delta}(\tau) \| \leqslant \frac{|\tau|}{\delta} \sqrt{(F_{\sigma-\delta} g, g)} \leqslant \frac{|\tau|}{\delta}, \tag{3.4}$$

$$\| g_{\sigma+\delta,\ +\infty}(\tau) \| \leqslant \frac{|\tau|}{\delta} \sqrt{((E - F_{\sigma+\delta}) g, g)} \leqslant \frac{\tau|}{\delta}, \tag{3.5}$$

$$\| g_{\sigma-\delta,\ \sigma+\delta}(\tau) \| \leqslant \sqrt{((F_{\sigma+\delta} - F_{\sigma-\delta}) g, g}\,. \tag{3.6}$$

Принимая во внимание неравенство (3.6) и непрерывность векторной функции $F_t g$ в точке σ, заключаем, что при достаточно малом положительном δ

$$\| g_{\sigma-\delta,\ \sigma+\delta}(\tau) \| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Зафиксируем такое значение δ. Тогда при любом τ, удовлетворяющем условию

$$|\tau| < \frac{\varepsilon\delta}{3} \quad (\tau \neq 0), \tag{3.8}$$

в силу (3.4) и (3.5) имеют место неравенства:

$$\| g_{-\infty,\ \sigma-\delta}(\tau) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.9}$$

$$\| g_{\sigma+\delta,\ +\infty}(\tau) \| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.10}$$

Итак, принимая во внимание формулу (3.2) и неравенства (3.7), (3.9), (3.10), убеждаемся в том, что при любом τ, удовлетворяющем условию (3.8),

$$\| g_{-\infty,\ +\infty}(\tau) \| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы уравнение* (3.1) *имело при каком-либо вещественном значении* $\lambda = \sigma$ *ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы спектральная функция* E_t *оператора* L, *определяемая функцией* $\vartheta(\lambda)$, *имела в точке* σ *разрыв.*

Доказательство. Достаточность устанавливается весьма просто. Действительно, если точка σ является точкой разрыва спектральной функции E_t, а следовательно, и функции распределения $\rho(t)$, то, как показывает формула (2.14), многообразие элементов $(E_{\sigma+0} - E_\sigma) f$, где $f \in L^2(0, +\infty)$, состоит из функций $cu(x; \sigma)$, где c — произвольная постоянная. Отсюда следует, что $u(x; \sigma) \in L^2(0, +\infty)$. Ясно, что функция $u(x; \sigma)$, как элемент пространства $L^2(0, +\infty)$, является ненулевым решением уравнения (3.1) при $\lambda = \sigma$.

Переходя к доказательству необходимости, предположим, что при $\lambda = \sigma$ уравнение (3.1) имеет ненулевое решение. Это означает, что определяемая формулой (2.15) функция $u(x; \sigma)$ принадлежит пространству $L^2(0, +\infty)$. Вводя обозначение $u_\sigma = u(x; \sigma)$, имеем:

$$u_\sigma \in D_{L_{\vartheta(\sigma)}} \tag{3.11}$$

и

$$L_{\vartheta(\sigma)} u_\sigma - \sigma u_\sigma = 0. \tag{3.12}$$

При невещественном μ положим $\psi_\mu = \psi(x; \mu)$, где функция $\psi(x; \mu)$ определяется соотношением (2.1).

Как показано в работе ([4]) *, область определения $D_{L_{\vartheta(\lambda)}}$ оператора $L_{\vartheta(\lambda)}$ при любом невещественном λ из верхней полуплоскости можно охарактеризовать следующим образом: $D_{L_{\vartheta(\lambda)}}$ есть совокупность элементов g вида

$$g = f + [\omega(\lambda)\psi_i - \psi_{-i}]\, c, \tag{3.13}$$

где $f \in D_L$, c — произвольная постоянная, а $\omega(\lambda)$ — функция, регулярная в верхней полуплоскости, не превосходящая там единицы по норме и связанная с функцией $\vartheta(\lambda)$ формулой:

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\omega(\lambda)\, m(i) - m(-i)}{1 - \omega(\lambda)}.$$

Отсюда находим:

$$\omega(\lambda) = \frac{\vartheta(\lambda) + m(-i)}{\vartheta(\lambda) + m(i)}.$$

Определяя функцию $\omega(\lambda)$ при помощи последней формулы во всей комплексной плоскости, видим, что $\omega(\lambda)$ есть мероморфная функция, все полюсы которой расположены в нижней полуплоскости; при этом на вещественной оси $|\omega(\lambda)| = 1$.

Анализируя выкладки в работе ([4]), легко обнаружить, что формулой (3.13) задается область определения $D_{L_{\vartheta(\lambda)}}$ оператора $L_{\vartheta(\lambda)}$ не только в верхней полуплоскости, но и для всех комплексных значений λ, отличных от полюсов функции $\omega(\lambda)$.

В силу (3.11), u_σ допускает теперь представление

$$u_\sigma = f_0 + [\omega(\sigma)\psi_i - \psi_{-i}]\, c_0, \tag{3.14}$$

где $f_0 \in D_L$ и c_0 — некоторая постоянная.

Введем в рассмотрение векторную функцию g_λ комплексного параметра λ, полагая

$$g_\lambda = f_0 + [\omega(\lambda)\psi_i - \psi_{-i}]\, c_0. \tag{3.15}$$

Заметим, что, согласно формулам (3.14) и (3.15),

$$g_\sigma = u_\sigma \tag{3.16}$$

и

$$g_\lambda \to u_\sigma \tag{3.17}$$

при $\lambda \to \sigma$.

---

* См. ([4]), стр. 204, 205. Еще раз напомним, что обозначение оператора $L_{\vartheta(\lambda)}$ в указанной работе несколько иное ($L_{F(\lambda)}$).

Очевидно, что при любом λ, отличном от полюсов функции $\omega(\lambda)$, $g_\lambda \in D_{L_{\vartheta(\lambda)}}$ и

$$L_{\vartheta(\lambda)} g_\lambda = Lf_0 + i[\omega(\lambda)\psi_i + \psi_{-i}]c_0. \tag{3.18}$$

Рассмотрим векторную функцию

$$h_\lambda = L_{\vartheta(\lambda)} g_\lambda - \lambda g_\lambda. \tag{3.19}$$

Формулы (3.15), (3.18) показывают, что g_λ и $L_{\vartheta(\lambda)} g_\lambda$, а следовательно, и h_λ являются регулярными векторными функциями параметра λ во всей комплексной плоскости, за исключением полюсов функции $\omega(\lambda)$. В частности, векторная функция h_λ регулярна в точке σ. Так как, кроме того, согласно (3.12), (3.16) и (3.19), $h_\sigma = 0$, то h_λ допускает представление

$$h_\lambda = (\lambda - \sigma) e_\lambda, \tag{3.20}$$

где e_λ — векторная функция, регулярная в точке σ.

Рассмотрим обобщенную резольвенту R_λ оператора L, определяемую формулой (1.3). При любом невещественном λ, отличном от полюсов функции $\omega(\lambda)$, согласно (3.19) и (1.3), имеет место формула

$$g_\lambda = R_\lambda h_\lambda. \tag{3.21}$$

Теперь легко завершить доказательство необходимости указанного в теореме условия. Будем вести доказательство от противного, т. е. допустим, что спектральная функция E_t непрерывна в точке σ. Поскольку обобщенная резольвента R_λ связана со спектральной функцией E_t формулой (1.4), то, согласно лемме, для любого элемента $g \in L^2(0, +\infty)$

$$\tau R_{\sigma - i\tau} g \to 0 \tag{3.22}$$

при $\tau \to 0$ $(\tau \neq 0)$.

Принимая во внимание формулы (3.17) и (3.21), имеем:

$$(u_\sigma, u_\sigma) = \lim_{\tau \to 0} (g_{\tau + i\sigma}, u_\sigma) = \lim_{\tau \to 0} (R_{\sigma + i\tau} h_{\sigma + i\tau}, u_\sigma) = \lim_{\tau \to 0} (h_{\sigma + i\tau}, R_{\sigma - i\tau} u_\sigma).$$

В силу соотношений (3.20) и (3.22), отсюда следует; $(u_\sigma, u_\sigma) = 0$, что, однако, невозможно, так как u_σ есть ненулевое решение уравнения (3.1) при $\lambda = \sigma$.

Полученное противоречие показывает, что спектральная функция E_t имеет в точке σ разрыв.

Теорема доказана.

Поступило
2. XI. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950.

[2] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, М.—Л., 1951.

[3] Штраус А. В., Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 51—86.

[4] Штраус А. В., О спектральных функциях дифференциальных операторов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 201—220.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 793—818

В. К. ИВАНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДАННОМУ

(*Представлено академиком* В. И. Смирновым)

В работе дается решение обратной задачи потенциала в предположении, что внешний потенциал искомого тела близок к внешнему потенциалу данного тела, при условии, что данное тело звездно относительно внутренней точки и его граница является достаточно гладкой.

Введение

1. Под обратной задачей потенциала мы понимаем здесь задачу о нахождении формы тела по его внешнему потенциалу, предполагая, что это тело заполнено веществом с заданной постоянной плотностью, которую мы всюду в дальнейшем будем считать равной единице.

П. С. Новиков ([9]), А. Н. Тихонов ([12]) и Л. Н. Сретенский ([11]) установили условия единственности и устойчивости этой задачи.

Гораздо меньше изучены вопросы существования решения и его фактического нахождения.

Для нахождения тела T_1, возбуждающего данный внешний потенциал V_1, можно было бы поступить следующим образом: возьмем какое-нибудь тело T_0 простой формы с внешним потенциалом V_0 и введем однопараметрическое семейство потенциалов

$$V(\lambda) = V_0 + \lambda (V_1 - V_0), \tag{1.1}$$

где λ — вещественный параметр, изменяющийся от 0 до 1.

Рассмотрим две следующие частные задачи:

А) *Данное тело* $T(\lambda_0)$ $(0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 1)$ *имеет внешний потенциал* $V(\lambda_0)$. *Требуется найти тело* $T(\lambda)$, *внешний потенциал которого известен и равен* $V(\lambda)$, *при условии, что* $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, *где* ε — *достаточно малое положительное число.*

В) *Найти, когда число* ε *задачи* А) *может быть выбрано независимо от* λ_0.

Эти две задачи равносильны обратной задаче для потенциала V_1, так как, решая задачу А) для последовательных значений параметра

$$\lambda = 0, \ \frac{1}{n}, \ \frac{2}{n}, \ \ldots, \ \frac{n-1}{n}, \ 1,$$

где $\frac{1}{n} < \varepsilon$, можно, исходя из тела T_0, конечным числом шагов добраться до тела T_1.

Подобный прием был успешно использован С. Н. Бернштейном в его известных исследованиях по решению задачи Дирихле для дифференциальных уравнений эллиптического типа [см. ([1])].

2. В настоящей работе мы исследуем задачу А) в несколько более общей постановке. Именно, мы будем искать тело T_1, зная его внешний потенциал V_1, если известно, что V_1 близок в смысле некоторой функциональной метрики к внешнему потенциалу заданного тела T. Такую задачу мы и называем обратной задачей потенциала для тела, близкого к данному. Путем уточнения оценок можно надеяться в будущем подойти к решению и задачи В). Для случая, когда заданным телом T является шар, рассматриваемая нами задача была решена Л. Н. Сретенским ([10]). Мы даем здесь ее решение, предполагая, что тело T является звездным относительно некоторой внутренней точки, что функции параметрического представления его границы S дважды дифференцируемы и их вторые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda < 1$ (поверхность класса Bh по Л. Лихтенштейну; см. ([4]), стр. 186—187).

Для функции, определяющей границу искомого тела, мы составляем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, следуя схеме Л. Лихтенштейна в теории фигур равновесия вращающейся жидкости [см. ([3]), стр. 36—49].

Однако буквальное применение рассуждений, принятых в теории фигур равновесия, приводит к интегральному уравнению первого рода. Для тела, близкого к шару, решение подобного уравнения дано Л. Н. Сретенским на основе методов А. М. Ляпунова ([10]). В рассматриваемом нами общем случае этого сделать не удается, поэтому вместо потенциала мы пользуемся его нормальной производной, что дает уравнение второго рода, но зато увеличивает степень сингулярности подынтегрального выражения и сильно усложняет решение полученного уравнения. Это решение мы проводим методом последовательных приближений. При доказательстве сходимости приходится опираться на оценки граничных значений потенциала и его производных и развитую Л. Лихтенштейном теорию дифференцируемых отображений с введением комплексного параметра.

В работе доказывается существование и единственность решения в рассматриваемом классе и дается способ его фактического построения.

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Смирнову за ряд ценных советов.

Глава 1. Постановка задачи

3. Введем некоторые определения, аналогичные тем, которые были даны в работе ([2]) (стр. 118—122). Функции точки, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ:

$$|f(M) - f(P)| \leqslant A\,|MP|^{\lambda},$$

будем называть принадлежащими классу $H(0, \lambda)$. Если функция $f(M)$ непрерывно дифференцируема по координатам точки k раз и все ее частные производные k-го порядка удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ, то будем говорить, что эта функция принадлежит классу $H(k, \lambda)$. Показатель λ будем считать везде в дальнейшем раз навсегда фиксированным положительным числом, меньшим единицы.

Изложим некоторые геометрические факты, следуя работе ([7]) (стр. 105—106).

Пусть S есть замкнутая поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова, ограничивающая односвязную область T. Известно, что S может быть разбита на конечное число таких кусков, каждый из которых определяется векторным уравнением

$$\vec{R} = \vec{R}(\xi, \eta), \tag{3.1}$$

где $\vec{R}(\xi, \eta)$ — непрерывно дифференцируемая векторная функция, определенная в некоторой области плоскости ξ, η и удовлетворяющая условию

$$[\vec{R}_\xi, \vec{R}_\eta] \neq 0. \tag{3.2}$$

Если, сверх того, все три компоненты векторной функции $\vec{R}(\xi, \eta)$ принадлежат классу $H(k, \lambda)$, то будем говорить, что поверхность принадлежит классу $\Lambda(k, \lambda)$. В частности, поверхности Ляпунова без дополнительных требований гладкости образуют класс $\Lambda(1, \lambda)$.

Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что S принадлежит классу $\Lambda(2, \lambda)$ [класс Bh в терминологии Л. Лихтенштейна; см. ([4])].

Пусть P — точка поверхности S, определяемая радиусом-вектором $\vec{R} = \vec{R}(\xi, \eta)$, Q — точка пространства, определяемая радиусом-вектором

$$\vec{R}_Q = \vec{R}_P + \nu\vec{n}, \tag{3.3}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точке P. Числа ξ, η, ν можно рассматривать как криволинейные координаты точки Q.

Вычисления показывают, что якобиан преобразования криволинейных координат в прямоугольные декартовы равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \nu)} = (1 - H\nu + K\nu^2)\sqrt{EG - F^2}, \tag{3.4}$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы, H — средняя и K — полная кривизны поверхности S. Из (3.4) видно, что при достаточно малых ν различным точкам отвечают различные тройки чисел ξ, η, ν и наоборот. Будем считать, что это условие выполнено для $|\nu| \leqslant \varepsilon_0$; только такие значения ν мы и будем рассматривать.

4. Обозначим через R_2 множество непрерывно дифференцируемых функций

$$\zeta(P) = \zeta(\xi, \eta),$$

определенных на поверхности S, первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$ (т. е. принадлежащих классу $H(1, \lambda)$). На множестве R_2 можно ввести норму, считая ее равной наибольшему из чисел

$$4\max|\zeta(P)|, \quad 4\max|\zeta_\xi(P)|, \quad 4\max|\zeta_\eta(P)|,$$

$$4\sup\frac{|\zeta_\xi(P) - \zeta_\xi(M)|}{|MP|^\lambda}, \quad 4\sup\frac{|\zeta_\eta(P) - \zeta_\eta(M)|}{|MP|^\lambda}.$$

Коэффициент 4 введен из желания иметь для нормы произведения неравенство

$$\|\zeta_1\zeta_2\| \leqslant \|\zeta_1\| \cdot \|\zeta_2\| \tag{4.1}$$

(множество R_2 замкнуто относительно произведения). Известно, что пространство с такой нормой является полным.

Задача, которой мы будем заниматься, ставится следующим образом. Обозначим через V внешний потенциал тела T, ограниченного поверхностью S, при заполнении его веществом с плотностью единица. Вне S определена гармоническая функция V_1, регулярная в бесконечности, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r\to\infty} V_1 r > 0$$

и продолжимая через S внутрь T на положительное расстояние d.

Предельные значения на S извне производных

$$\frac{\partial V}{\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2},\quad \frac{\partial V_1}{\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2}$$

суть функции, принадлежащие пространству R_2 [см. (7), стр. 123]. Предполагая нормы

$$\|V_1 - V\|,\quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu}\right\|,\quad \left\|\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right\|$$

(для производных от V берутся предельные значения извне) достаточно малыми, требуется найти тело T_1, ограниченное поверхностью S_1, внешний потенциал которого равен V_1.

Глава II. Вывод интегро-дифференциального уравнения

5. Пусть уравнение искомой поверхности S_1 в криволинейной системе координат есть

$$\nu = \zeta(P) = \zeta(\xi, \eta). \tag{5.1}$$

В этой главе мы выводим интегро-дифференциальное уравнение для $\zeta(\xi, \eta)$. Желая получить уравнение второго рода, мы рассматриваем вместо потенциала его производную по ν.

Введем между S и S_1 однопараметрическое семейство поверхностей S_t, зависящих от параметра t и определяемых уравнением:

$$\nu = t\zeta(\xi, \eta) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{5.2}$$

Область, ограниченную поверхностью S_t, обозначим через T_t. Введем точки

$$P(\xi, \eta, 0),\quad P_t(\xi, \eta, t\zeta),\quad Q_t(\xi, \eta, t\zeta + \varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$, координаты — криволинейные). Радиусы-векторы этих точек связаны соотношениями:

$$\vec{R}(P_t) = \vec{R}(P) + t\zeta\vec{n},\quad \vec{R}(Q_t) = \vec{R}(P) + (t\zeta + \varepsilon)\vec{n}. \tag{5.3}$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке P. Переменную точку, лежащую внутри $T_t + S_t$, обозначим через M', а ее радиус-вектор — через $\vec{R}'$.

Положим

$$\vec{r} = \vec{R}'(M') - \vec{R}(P), \qquad \vec{r}_t = \vec{R}'(M') - \vec{R}(P_t).$$

Тогда

$$\vec{Q}_t M' = \vec{r}_t - \varepsilon\vec{n}.$$

Потенциал тела T_t на точку Q_t равен

$$V_t(Q_t) = \int_{T_t} \frac{d\tau'}{|\vec{r}_t - \varepsilon\vec{n}|}. \tag{5.4}$$

Производная потенциала по ν

$$U_t^\varepsilon(Q_t) = \frac{\partial V_t}{\partial \nu} = -\int_{T_t} \frac{\cos\theta_t^\varepsilon}{|\vec{r}_t - \varepsilon\vec{n}|^2}\, d\tau', \tag{5.5}$$

где

$$\cos\theta_t^\varepsilon = \cos(\vec{n}, \hat{Q}_t\vec{M}').$$

Интеграл (5.5) можно преобразовать в интеграл по поверхности [см. (7), стр. 112, формула (104)]:

$$U_t^\varepsilon = -\iint_{S_t} \frac{1}{|\vec{r}_t - \varepsilon\vec{n}|^2}(\vec{n}, \vec{n}_t')\, d\sigma_t'. \tag{5.6}$$

Здесь $\vec{n}_t'$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_t в точке интегрирования. U_t^ε можно рассматривать как функцию параметра t. Вычисляя производную

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \lim_{h\to 0} \frac{U_{t+h}^\varepsilon - U_t^\varepsilon}{h}$$

с учетом того, что в (5.5) и (5.6) от t зависят как подынтегральное выражение, так и область интегрирования, и применяя те же преобразования, что в (3) или в (7), приходим к соотношению:

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} U_t^\varepsilon + \iint_{S_t} \frac{\cos\theta_t^\varepsilon}{|\vec{r}_t - \varepsilon\vec{n}|^2}(\vec{n}', \vec{n}_t')\zeta'\, d\sigma_t'. \tag{5.7}$$

Если для U_t^ε использовать (5.6), то получится:

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \iint_{S_t} \frac{\cos\theta_t^\varepsilon}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|^2}(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})\vec{n}_t'\, d\sigma_t'. \tag{5.8}$$

Здесь штрих показывает, что значение соответствующей функции берется в точке интегрирования.

6. В выражении (5.8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла. При $\varepsilon = 0$ интеграл превращается в несобственный, так как при $M' = P_t$ подынтегральная функция в нем обращается в бесконечность. Вследствие присутствия множителя $(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})$ эта бесконечность будет

иметь первый порядок и для обоснования законности перехода к пределу можно применить обычный прием, состоящий в выделении особенности при помощи круга малого радиуса с центром в точке P_t с последующим сжатием этого круга в точку.

Таким образом, мы можем считать, что равенство (5.8) имеет место при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, если положить

$$\frac{\partial U_t^0}{\partial t} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t}.$$

7. Наша ближайшая задача состоит в разложении $\dfrac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t}$ в ряд по степеням t.

Для этого мы разложим в ряд подынтегральную функцию в (5.8) и проинтегрируем его почленно.

В соответствии с предположением в конце п. 3 о малости ε_0 при достаточно малых ε имеет место оценка:

$$\frac{r}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|} \leqslant C_1 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0), \tag{7.1}$$

где C_1 — постоянная, зависящая только от формы тела T и числа ε_0

ЛЕММА. *Существует такая постоянная $A \geqslant 0$, определяемая лишь видом тела T и числом ε_0, что при*

$$|\zeta| \leqslant \delta_0, \quad |\zeta_\xi| \leqslant \delta_0, \quad |\zeta_\eta| \leqslant \delta_0, \quad \delta_0 \leqslant \varepsilon_0$$

на всей поверхности S имеет место оценка:

$$\frac{|\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n}|}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|} \leqslant A\delta_0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0). \tag{7.2}$$

Доказательство. Можно написать:

$$\frac{|\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n}|}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|} = \frac{|\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n}|}{r} \cdot \frac{r}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|}. \tag{7.3}$$

Пользуясь (7.1), мы можем ограничиться оценкой первого множителя. В силу того, что числитель в нем ограничен, достаточно рассмотреть случай, когда точка M' близка к P, т. е. r мало.

Введем прямоугольную декартову систему координат, приняв точку P за начало и направив ось z по внешней нормали. В этой системе координат уравнение поверхности вблизи P имеет вид $z = f(x, y)$, а радиус-вектор PM' равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть составляющие вектора $\vec{n}$ суть a, b, c. По теореме о среднем значении,

$$\frac{\zeta'a' - \zeta a}{r} = (\zeta a)_x^* \frac{x}{r} + (\zeta a)_y^* \frac{y}{r},$$

где $(\zeta a)_x^*$ и $(\zeta a)_y^*$ — значения частных производных в точке между P и M'. В силу условий леммы, $(\zeta a)_x$ и $(\zeta a)_y$ относительно положения точки на S

равномерно ограничены, поэтому существует такая постоянная C_2, что равномерно на всей поверхности S

$$\frac{|\zeta' a' - \zeta a|}{r} \leqslant C_2 \delta_0.$$

Аналогично,

$$\frac{|\zeta' b' - \zeta b|}{r} \leqslant C_2 \delta_0, \quad \frac{|\zeta' c' - \zeta c|}{r} \leqslant C_2 \delta_0 \tag{7.4}$$

и

$$\frac{|\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n}|}{r} \leqslant \sqrt{3} C_2 \delta_0.$$

Из (7.1), (7.3) и (7.4) и вытекает (7.2).

8. ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие* $\delta_0 > 0$, $t_0 > 1$, $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $|\zeta| \leqslant \delta_0$, $|\zeta_\xi| \leqslant \delta_0$, $|\zeta_\eta| \leqslant \delta_0$, $|t| < t_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *функция* $\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t}$ *разлагается в ряд по степеням* t, *сходящийся равномерно относительно* ε *и положения точки* P *на* S.

Доказательство. Учитывая, что

$$\cos \theta_t^\varepsilon = \frac{(\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n})\, \vec{n}}{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|},$$

мы сможем переписать (5.8) следующим образом:

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \iint\limits_{S_t} \frac{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|\, \vec{n}}{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|^3} \cdot (\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n})\, \vec{n}_t'\, d\sigma_t'. \tag{8.1}$$

Если ввести векторы внешней нормали

$$\vec{N}_t = \left[\frac{\partial \vec{R}_t}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{R}_t}{\partial \eta}\right], \quad \vec{N} = \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta}\right], \tag{8.2}$$

то можно перейти к интегрированию по поверхности S:

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \iint\limits_{S} \frac{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|\, \vec{n}}{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|^3} \cdot (\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n}) \frac{\vec{N}_t'}{N'}\, d\sigma'. \tag{8.3}$$

Обозначим

$$\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n} = \vec{r}_\varepsilon;$$

тогда

$$\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n} = \vec{r}_\varepsilon + (\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n})\, t,$$

$$\frac{1}{|\vec{r}_t - \varepsilon \vec{n}|} = \frac{1}{r_\varepsilon} \left(1 + 2 \frac{\vec{r}_\varepsilon (\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n})}{r_\varepsilon^2} t + \frac{(\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n})^2}{r_\varepsilon^2} t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{8.4}$$

Если $|\zeta| \leqslant \delta_0$, $|\zeta_\xi| \leqslant \delta_0$, $|\zeta_\eta| \leqslant \delta_0$ и постоянная δ_0 достаточно мала, то, согласно лемме п. 7, существует такая постоянная A, что

$$\frac{|\zeta' \vec{n}' - \zeta \vec{n}|}{r_\varepsilon} \leqslant A \delta_0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0).$$

Перепишем подынтегральную функцию в (8.3) следующим образом:

$$\left(\frac{\vec{r}_\varepsilon \vec{n}}{r_\varepsilon} + \frac{(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})\,\vec{n}}{r_\varepsilon}\,t\right) \cdot \frac{(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})\,N'_t}{r_\varepsilon N'} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + 2\,\frac{\vec{r}_\varepsilon(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})}{r_\varepsilon}\,t + \frac{(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})^2}{r_\varepsilon^2}\,t^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{r_\varepsilon}. \tag{8.5}$$

На основании (8.2) и (5.3), вектор $\frac{\vec{N}_t}{N}$ имеет вид:

$$\vec{P}_0 + 2\vec{P}_1 t + \vec{P}_2 t^2,$$

где $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ — определенные на поверхности S непрерывные векторные функции и поэтому их модули ограничены некоторым положительным числом B_1:

$$|\vec{P}_0| \leqslant B_1, \quad |\vec{P}_1| \leqslant B_1, \quad |\vec{P}_2| \leqslant B_1.$$

Подкоренное выражение в (8.4) может быть разложено на множители:

$$1 + 2\,\frac{\vec{r}_\varepsilon(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})}{r_\varepsilon^2}\,t + \frac{(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})^2}{r_\varepsilon^2}\,t^2 = (1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t),$$

где α_1 и α_2 — ограниченные функции точек P и M' на S и числа $\varepsilon\,(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$:

$$|\alpha_1| \leqslant B_2\,\delta_0, \quad |\alpha_2| \leqslant B_2\,\delta_0.$$

Из всего сказанного следует, что степенной ряд для функции (8.5) будет мажорироваться степенным рядом для функции

$$\frac{(1 + A\delta_0 t)\,A\delta_0 B_1\,(1 + t)^2}{r_\varepsilon\,(1 - B_2\delta_0 t)^3} = \frac{1}{r_\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n, \tag{8.6}$$

где D_n — положительные числа.

Ряд (8.6) сходится при

$$|t| < \frac{1}{B_2\delta_0} = t_0.$$

Если взять $\delta_0 < \frac{1}{B_2}$, то будет $t_0 > 1$. Отсюда видно, что при $|t| < t_0$ ряд по степеням t для функции (8.5) сходится равномерно относительно положения точки M' на поверхности S и поэтому может быть почленно проинтегрирован по поверхности S. Произведя такое интегрирование, получим разложение:

$$\frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} = \mathfrak{A}_0^\varepsilon + \mathfrak{A}_1^\varepsilon t + \cdots + \mathfrak{A}_n^\varepsilon t^n + \cdots. \tag{8.7}$$

Ряд (8.7) мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \iint_S \frac{d\sigma'}{r_\varepsilon}\,t^n, \tag{8.8}$$

который получается почленным интегрированием по поверхности S ряда (8.6). Интеграл

$$\iint_S \frac{d\sigma'}{r_\varepsilon} = \iint_S \frac{d\sigma'}{|\vec{R}' - \vec{R} - \varepsilon\vec{n}|}$$

равен значению в точке $\vec{R} + \varepsilon\vec{n}$ потенциала простого слоя, распределенного по поверхности S с единичной плотностью, и поэтому равномерно относительно ε ограничен:

$$\iint_S \frac{d\sigma'}{r_\varepsilon} \leqslant M, \quad M > 0, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Таким образом, в условиях теоремы ряд (8.7) мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} M D_n t^n$$

с постоянными положительными коэффициентами и поэтому при $|t| < t_0$ $(t_0 > 1)$ сходится равномерно относительно положения точки P на S и числа ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$.

9. Интегрируя ряд (8.7) по t от 0 до 1, находим:

$$U_1^\varepsilon - U_0^\varepsilon = \mathfrak{U}_0^\varepsilon + \frac{1}{2}\mathfrak{U}_1^\varepsilon + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathfrak{U}_n^\varepsilon + \cdots. \tag{9.1}$$

Пользуясь равномерностью этого разложения, можно перейти почленно к пределу при $\varepsilon \to 0$. Осуществляя такой предельный переход и обозначая

$$U_1 = \lim_{\varepsilon \to +0} U_1^\varepsilon, \quad U_0 = \lim_{\varepsilon \to +0} U_0^\varepsilon, \quad \mathfrak{U}_{n+1} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{n+1}\mathfrak{U}_n^\varepsilon,$$

приходим к соотношению:

$$U_1 = U_0 + \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \cdots + \mathfrak{U}_n + \cdots. \tag{9.2}$$

Здесь каждое $\mathfrak{U}_n$ есть интегро-степенная форма n-й степени относительно ζ, ζ_ξ, ζ_η. Найдем выражение для $\mathfrak{U}_1$. Имеем:

$$\mathfrak{U}_1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \mathfrak{U}_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

Подставив вместо $\dfrac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t}$ его выражение из (5.7), получим:

$$\mathfrak{U}_1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\zeta \frac{\partial U_t^\varepsilon}{\partial t} + \iint_S \frac{\cos\theta_0^\varepsilon}{|\vec{r} - \varepsilon\vec{n}|^2} \zeta' \, d\sigma' \right) = \zeta \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\bigg|_{\nu=0} - 2\pi\zeta + \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2} \zeta' \, d\sigma', \tag{9.3}$$

где

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\bigg|_{\nu=0} = \lim_{Q \to P} \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial \nu^2} \tag{9.4}$$

$$(P \in S, \quad Q - \text{вне } S, \quad \cos\theta = \cos(\vec{n}, \vec{r})).$$

Заметим также, что

$$U_0 = \frac{\partial V}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0} = \lim_{Q \to P} \frac{\partial V(Q)}{\partial \nu} \quad (P \in S', \quad Q - \text{вне } S). \tag{9.5}$$

Значение U_1, определяемое формулой (9.2), должно совпадать со значением в точке $P_1(\xi, \eta, \zeta)$ производной $\frac{\partial V_1}{\partial \nu}$ заданной гармонической функции V_1. Точка $P_1(\xi, \eta, \zeta)$, в которой берется значение $\frac{\partial V_1}{\partial \nu}$, лежит на неизвестной поверхности S_1.

Подставляя в левую часть равенства

$$U_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta}$$

разложение (8.2), полагая

$$\frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta} = \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0} + \zeta \frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=0} - \Phi(\zeta),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0} + \zeta \frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=0} - \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta}, \tag{9.6}$$

и учитывая (9.3) и (9.5), получим после преобразований:

$$\iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}\zeta'\, d\sigma' - 2\pi\zeta = \frac{\partial (V_1 - V)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0} + \zeta \frac{\partial^2 (V_1 - V)}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=0} - \Phi(\zeta) - \sum_{n=2}^{\infty} \mathfrak{U}_n. \tag{9.7}$$

Введя обозначения:

$$f = -\frac{\partial (V_1 - V)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0}, \qquad g = -\frac{\partial^2 (V_1 - V)}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=0}, \qquad \Psi(\zeta) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathfrak{U}_n, \tag{9.8}$$

мы сможем переписать (8.7) следующим образом:

$$2\pi\zeta - \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}\zeta'\, d\sigma' = f + g\zeta + \Phi(\zeta) + \Psi(\zeta). \tag{9.9}$$

Это есть основное интегро-дифференциальное уравнение задачи.

Глава III. Об эквивалентности интегро-дифференциального уравнения и рассматриваемой задачи

10. В главе II мы показали, что всякое достаточно малое решение поставленной в п. 4 задачи удовлетворяет уравнению (9.9). В этой главе мы покажем, что всякое достаточно малое решение уравнения (9.9) дает решение нашей задачи.

Пусть ζ есть функция, определенная на поверхности S и удовлетворяющая уравнению (9.9). Будем считать, что $|\zeta| < d$, где d — расстояние, на которое может быть продолжен потенциал V_1 внутрь тела T. Тогда $V_1|_{\nu=\zeta}$ будет иметь смысл.

Отложим значения ζ по внешней нормали к поверхности S и обозначим полученную таким образом поверхность через $\hat{S}_1$, тело, ограниченное этой поверхностью, — через $\hat{T}_1$ и внешний потенциал, возбуждаемый веществом, заполняющим тело $\hat{T}_1$ с плотностью единица, — через $\hat{V}_1$. Нам надо показать, что

$$\hat{V}_1 = V_1. \tag{10.1}$$

Проведя для функции ζ рассуждения пп. 7—9, мы обнаружим, что

$$\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta} = \hat{U}_1 = \frac{\partial V}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0} + \zeta \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=0} - 2\pi\zeta + \iint\limits_S \frac{\cos\theta}{r^2}\,\zeta'\,d\sigma' + \Psi(\zeta). \quad (10.2)$$

Подставив это в уравнение (9.9) и учитывая (9.6) и (9.8), получим:

$$\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta} = \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta}. \quad (10.3)$$

Таким образом, на поверхности $\hat{S}_1$ производные по направлению ν от внешнего потенциала $\hat{V}_1$ полученного нами тела $\hat{T}_1$ и заданного потенциала V_1 равны между собой. Отсюда мы должны заключить о равенстве этих потенциалов вне $\hat{S}_1$, что сводится к доказательству единственности решения внешней задачи о косой производной (направление ν не совпадает с направлением нормали к $\hat{S}_1$). В следующем пункте мы покажем, что при достаточно малых ζ единственность имеет место.

11. ТЕОРЕМА 2. *Пусть W есть функция, гармоническая вне поверхности $\hat{S}_1$* (см. п. 10), *регулярная на бесконечности и удовлетворяющая на $\hat{S}_1$ условию*

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta} = 0. \quad (11.1)$$

Если функция ζ, определяющая поверхность $\hat{S}_1$, достаточно мала, то W тождественно равна нулю.

Доказательство. Обозначим, как и в п. 5, радиусы-векторы точек на S и $\hat{S}_1$ соответственно через $\vec{R}$ и $\vec{R}_1$, единичные векторы внешней нормали — через $\vec{n}$ и $\vec{n}_1$; точки интегрирования будем отмечать штрихами. Тогда

$$\vec{R}_1 = \vec{R} + \zeta\vec{n}$$

и

$$\vec{r} = \vec{R}' - \vec{R}, \quad \vec{r}_1 = \vec{R}_1' - \vec{R}_1 = \vec{r} + (\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n}). \quad (11.2)$$

Разместим на $\hat{S}_1$ простой слой плотности μ, для которого W является внешним потенциалом. Известно, что μ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$2\pi(\vec{n}\vec{n}_1)\mu + \iint\limits_{\hat{S}_1} \mu' \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1' = -\frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\zeta} = 0. \quad (11.3)$$

[см. ([8]), стр. 110, уравнение (1)]. Учитывая (11.2), уравнение (11.3) можно переписать следующим образом:

$$(\vec{n}\vec{n}_1)\mu - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\hat{S}_1} \frac{\mu'}{r_1^3}\{\vec{n}\vec{r} + \vec{n}(\zeta'\vec{n}' - \zeta\vec{n})\}\,d\sigma'. \quad (11.4)$$

Если ζ достаточно мало, то каждой точке M поверхности S, определяемой радиусом-вектором $\vec{R}$, отвечает одна и только одна точка M_1 поверхности $\hat{S}_1$, определяемая радиусом-вектором $\vec{R}_1 = \vec{R} + \zeta\vec{n}$, поэтому каждой

функции, определенной на поверхности $\hat{S}_1$, отвечает функция, определенная на поверхности S:

$$f_1(M_1) = f(M), \quad M_1 \in \hat{S}_1, \quad M \in S.$$

Сохраняя для функций, определенных на S, такие же обозначения, как и для соответствующих им функций, определенных на $\hat{S}_1$, мы сможем в (11.4) перейти к интегрированию по S:

$$(\vec{n}\vec{n}_1)\mu - \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\mu'}{r_1^3}\{\vec{n}\vec{r} + \vec{n}(\vec{\zeta}'\vec{n}' - \vec{\zeta}\vec{n})\}\frac{N_1'}{N'}\,d\sigma' = 0, \tag{11.5}$$

где N_1 и N — длины векторов нормалей к поверхностям $\hat{S}_1$ и S.

Рассмотрим гильбертово пространство L_2 функций с суммируемым квадратом, определенных на поверхности S. Введем в этом пространстве операторы

$$\left.\begin{aligned} B_1 f &= (\vec{n}\vec{n}_1 - 1)f, \quad B_2 f = \frac{1}{2\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r_1^3}\frac{N_1'}{N'} - \frac{1}{r^3}\right)(\vec{n}\vec{r})f'\,d\sigma', \\ B_3 f &= \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\vec{n}(\vec{\zeta}'\vec{n}' - \vec{\zeta}\vec{n})}{r_1^3}\frac{N_1'}{N'}f'\,d\sigma', \\ Tf &= \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{(\vec{n}\vec{r})}{r^3}f'\,d\sigma', \quad B = B_1 - B_2 - B_3. \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Уравнение (11.5) может быть записано следующим образом:

$$\mu + T\mu + B\mu = 0. \tag{11.7}$$

Операторы B_2 и T в (11.6) вполне непрерывны, так как это — интегральные операторы, ядра которых регуляризуемы; непрерывность оператора B_1 видна непосредственно; оператор B_3 — сингулярный интегральный оператор, а такой оператор также является непрерывным в L_2 [см. (8)]. Таким образом, в уравнении (11.7) оператор B непрерывен, а оператор T вполне непрерывен.

Согласно классическим результатам теории потенциала (единственность решения внешней задачи Неймана), оператор $E - T$ имеет ограниченный обратный. Норма оператора $(E-T)^{-1}$ положительна и не зависит от ζ.

Как видно из (11.6), оператор B непрерывен и его норма непрерывно зависит от ζ в следующем смысле: для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $|\zeta| < \delta$ на всей поверхности S, то $\|B\| < \varepsilon$.

Переписав уравнение (11.7) в форме

$$\mu + (E-T)^{-1}B\mu = 0$$

и взяв ζ столь малым, чтобы было

$$\|(E-T)^{-1}\| \cdot \|B\| < 1,$$

мы найдем, что оператор $E + (E-T)^{-1}B$ будет иметь ограниченный обратный. Но тогда уравнение (11.7) имеет единственное решение $\mu \equiv 0$.

Если положить

$$\hat{V}_1 - V_1 = W,$$

то W есть гармоническая вне $\hat{S}_1$ и регулярная на бесконечности функция, удовлетворяющая на $\hat{S}_1$ условию (11.1). По теореме 2, $W \equiv 0$ и поэтому

$$\hat{V}_1 \equiv V_1. \tag{11.8}$$

Таким образом, справедливо

Следствие. *Если ζ — достаточно малое решение уравнения* (9.9), *то имеет место* (11.8), *т. е. тело T_1, ограниченное поверхностью $\nu = \zeta(\xi, \eta)$, имеет своим внешним потенциалом V_1.*

Глава IV. Решение интегро-дифференциального уравнения

12. Мы будем рассматривать уравнение (9.9) в функциональном пространстве R_2, введенном нами в п. 4. В символической форме это уравнение можно записать следующим образом:

$$A\zeta = f + g\zeta + P(\zeta), \tag{12.1}$$

где

$$A\zeta = \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}\zeta'\, d\sigma' - 2\pi\zeta, \quad P(\zeta) = \Phi(\zeta) + \Psi(\zeta). \tag{12.2}$$

Если $\zeta \in R_2$ и норма ζ достаточно мала, то все члены в (12.1) принадлежат R_2. Для f и g это вытекает из определений (9.6) и (9.8) и сказанного в п. 4. Пространство R_2 является кольцом, где умножение понимается в обычном смысле, поэтому $g\zeta \in R_2$. $A\zeta$ есть предельное значение извне нормальной производной потенциала простого слоя, распределенного на S с плотностью ζ. Из условий гладкости поверхности S (принадлежность к классу Bh в смысле Л. Лихтенштейна) и того, что ζ имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера, следует, на основании теорем теории потенциала [см. (4), стр. 202], что у функции $A\zeta$ первые производные по ξ и η удовлетворяют λ-условию Гельдера и, следовательно, эта функция принадлежит R_2. Принадлежность $\Phi(\zeta)$ к R_2 при $\zeta \in R_2$ следует из соотношения (9.6), в правой части которого каждое слагаемое принадлежит R_2. Принадлежность $\Psi(\zeta)$ к R_2 будет установлена в п. 19.

Оператор A имеет в пространстве R_2 непрерывный обратный, поэтому уравнение (12.1) может быть записано в форме:

$$\zeta = A^{-1}f + A^{-1}(g\zeta) + A^{-1}P(\zeta). \tag{12.3}$$

Уравнение (12.3) можно решить методом последовательных приближений, пользуясь известной схемой Л. Лихтенштейна [см. (7), гл. 1]. Доказательство сходимости основывается на следующих свойствах оператора $P(\zeta)$.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие положительные постоянные a, b, d, что для положительного ω, не превосходящего d, и при любых функциях ζ и $\hat{\zeta}$ из R_2, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|\zeta\| \leqslant \omega, \quad \|\hat{\zeta}\| \leqslant \omega, \tag{12.4}$$

будет:

$$\|P(\zeta)\| \leqslant a\omega^2, \tag{12.5}$$

$$\|P(\zeta) - P(\hat{\zeta})\| \leqslant b\omega\|\zeta - \hat{\zeta}\|. \tag{12.6}$$

Соотношения (12.5) и (12.6) соответствуют неравенствам (8) и (11) работы (7) (стр. 4). В силу (12.2), $P(\zeta)$ разлагается на сумму $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, поэтому неравенство вида (12.5) или (12.6) достаточно установить для каждого из операторов $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$. На основании (9.6), $\Phi(\zeta)$ может быть записано следующим образом:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\Big|_{v=\theta\zeta}, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда следует существование таких положительных постоянных a_1 и b_1, что при выполнении (12.4) будет:

$$\|\Phi(\zeta)\| \leqslant a_1\omega^2, \tag{12.7}$$

$$\|\Phi(\zeta) - \Phi(\hat{\zeta})\| \leqslant b_1\omega\|\zeta - \hat{\zeta}\|. \tag{12.8}$$

Таким образом, теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что при выполнении (12.4) имеют место неравенства:

$$\|\Psi(\zeta)\| \leqslant a_2\omega^2, \tag{12.9}$$

$$\|\Psi(\zeta) - \Psi(\hat{\zeta})\| \leqslant b_2\omega\|\zeta - \hat{\zeta}\| \tag{12.10}$$

(первое и второе неравенства Лихтенштейна).

13. Доказательству неравенств (12.9) и (12.10), что составляет главную трудность решаемой нами задачи, посвящена глава V. Здесь же мы дадим решение уравнения (12.3), предполагая теорему 3 доказанной и применяя к нашему случаю известный способ рассуждений [см. (7)].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* ω *— положительное число, удовлетворяющее неравенствам*:

$$\omega \leqslant d, \quad \omega(1 + b\|A^{-1}\|) < 1, \quad \omega^2 - 2(1 + 2a\|A^{-1}\|)\omega + 1 > 0, \tag{13.1}$$

где d *и* b *— числа теоремы* 3. *Если нормы функций* f *и* g *в уравнении* (12.3) *имеют оценки*

$$\|f\| \leqslant \frac{\omega}{\|A^{-1}\|}, \quad \|g\| \leqslant \frac{\omega}{\|A^{-1}\|}, \tag{13.2}$$

то это уравнение имеет единственное решение ζ, *удовлетворяющее условию*

$$\|\zeta\| \leqslant d, \tag{13.3}$$

которое может быть найдено методом последовательных приближений:

$$\zeta_1 = A^{-1}f,$$

$$\zeta_{n+1} = A^{-1}f + A^{-1}(f\zeta_n) + A^{-1}P(\zeta) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13.4}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\tau = \omega + \omega\tau + \|A^{-1}\|a\tau^2, \tag{13.5}$$

где a — число неравенства (12.5) теоремы 3. Обозначим наименьший положительный корень этого уравнения через τ_1 (при выполнении (13.1) оба корня уравнения положительны). Покажем, что для всех приближений (13.4) будет:

$$\|\zeta_n\| \leqslant \tau_1. \tag{13.6}$$

Для ζ_1 это следует из (13.4) и (13.2), так как, на основании (13.5), $\omega < \tau_1$.

Пусть неравенство (13.6) выполняется для ζ_n. Тогда, в силу (12.3).

$$\|\zeta_{n+1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|g\| \cdot \|\zeta_n\| + \|A^{-1}\| \cdot \|P(\zeta_n)\| + \|A^{-1}\| \cdot \|f\| \leqslant$$
$$\leqslant \omega + \omega\tau_1 + \|A^{-1}\| a \tau_1^2 = \tau_1.$$

При $\omega \to 0$ также $\tau_1 \to 0$, поэтому можно считать, что $\tau_1 < d$.

Рассмотрим оператор

$$Q(\zeta) = A^{-1} g + A^{-1}(g\zeta) + A^{-1} P(\zeta) \tag{13.7}$$

для ζ, удовлетворяющих (13.3). Пусть ζ и $\hat{\zeta}$ — две функции, для которых выполняется (12.4). Имеем:

$$Q(\zeta) - Q(\hat{\zeta}) = A^{-1}[g(\zeta - \hat{\zeta}) + P(\zeta) - P(\hat{\zeta})].$$

Для нормы $\|Q(\zeta) - Q(\hat{\zeta})\|$, учитывая (13.2) и (12.6), получаем:

$$\|Q(\zeta) - Q(\hat{\zeta})\| \leqslant \omega \|\zeta - \hat{\zeta}\| + \|A^{-1}\| b\omega \|\zeta - \hat{\zeta}\|.$$

Если обозначить $\omega(1 + \|A^{-1}\| b) = k$, то полученное нами неравенство можно записать в виде:

$$\|Q(\zeta) - Q(\hat{\zeta})\| \leqslant k \|\zeta - \hat{\zeta}\|, \tag{13.8}$$

причем, на основании (13.1), $k < 1$.

Таким образом, $Q(\zeta)$ есть оператор сближения, и утверждение теоремы следует из принципа сжатых отображений.

Глава V. Исследование оператора $\Psi(\zeta)$

14. В предыдущей главе было дано решение основного интегро-дифференциального уравнения (9.9) в предположении, что оператор $\Psi(\zeta)$ переводит всякую функцию ζ из R_2 снова в функцию из R_2 и что для него в условиях теоремы 2 справедливы неравенства (12.9) и (12.10). В настоящей главе дается доказательство этих неравенств в предположении звездности тела T относительно некоторой внутренней точки.

В основу рассуждений положена принадлежащая Л. Лихтенштейну идея дифференцируемых отображений одной области на другую с введением комплексного параметра [см. (7), стр. 122—127, а также (5) и (6)].

Предположим, что тело T лежит внутри некоторой ограниченной выпуклой области D, причем расстояние от границы тела T до границы области D положительно. Введем для сокращения следующее обозначение:

$$|f|_\lambda = \sup \frac{f(M) - f(P)}{|MP|^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1).$$

Пусть в области D заданы три функции: $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$, принадлежащие классу $H(1, \lambda)$ $(0 < \lambda < 1)$ и удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} &|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leqslant \Pi, \\ &\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right| \leqslant \Pi, \\ &\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|_\lambda \left|\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right|_\lambda \leqslant \Pi, \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

где Π — положительное число. При достаточно малых α, β, γ система функций

$$\hat{x} = x + \alpha(x, y, z), \quad \hat{y} = y + \beta(x, y, z), \quad \hat{z} = z + \gamma(x, y, z) \tag{14.2}$$

осуществляет взаимно однозначное дифференцируемое отображение области D на некоторую область $\hat{D}$. Тело $T + S$ перейдет в тело $\hat{T} + \hat{S}$, лежащее в $\hat{D}$ (поверхность $\hat{S}$ принадлежит классу Λ $(1, \lambda)$.

Введем в области $\hat{D}$ потенциал

$$\hat{V}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{T}} \frac{d\hat{\tau}}{\hat{r}}, \quad \hat{r}^2 = (\hat{x}' - \hat{x})^2 + (\hat{y}' - \hat{y})^2 + (\hat{z}' - \hat{z})^2. \tag{14.3}$$

Потенциал $\hat{V}$ и его частные производные первого и второго порядка по $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ можно рассматривать, в силу взаимной однозначности отображений (14.2), как функции координат x, y, z, определенные в области $D - T$; при этом значения его вторых производных на S принимаются как предельные значения извне.

Будем в дальнейшем обозначать через $c_1, c_2, \ldots$ постоянные, зависящие лишь от вида области T и числа Π. Известно [см. (7)], что в $D - T$ имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &|\hat{V}|, \left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}}\right|, \left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}}\right|, \left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{z}}\right| \leqslant c_1, \\ &\left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}\,\partial \hat{y}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{z}^2}\right| \leqslant c_1, \\ &\left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}\right|_\lambda, \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}\,\partial \hat{y}}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{z}^2}\right|_\lambda \leqslant c_1. \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

Здесь и всюду в дальнейшем в аналогичных случаях предполагается, что (14.3) сначала дифференцируется по координатам $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, а потом в полученное выражение подставляются функции (14.2).

15. Введем однопараметрическое семейство отображений

$$x_t = x + \frac{t}{\Pi}\alpha, \quad y_t = y + \frac{t}{\Pi}\beta, \quad z_t = z + \frac{t}{\Pi}\gamma. \tag{15.1}$$

Здесь t — вещественный параметр, α, β, γ — функции п. 14. Эти отображения переводят D в D_t, $T + S$ — в $T_t + S_t$. При $t = 0$ тело $T_t + S_t$ совпадает с $T + S$, при $t = \Pi$ — с $\hat{T} + \hat{S}$. Для каждого значения t из сегмента $[0, \Pi]$ существует потенциал

$$V_t = \int_{T_t} \frac{d\tau'}{r_t}, \quad r_t^2 = (x_t' - x_t)^2 + (y_t' - y_t)^2 + (z_t' - z_t)^2. \tag{15.2}$$

В дальнейшем нам придется рассматривать V_t и для комплексных t. Интеграл (15.2) для этого использован быть не может, так как в нем область интегрирования T_t зависит от t. Чтобы избавиться от этого затруднения, перейдем к интегрированию по области T, для чего произведем замену переменных по формулам (15.1):

$$V_t = \int_T \frac{1}{r_t} \frac{D(x_t', y_t', z_t')}{D(x', y', z')}\, d\tau'. \tag{15.3}$$

Для производных потенциала находим аналогичные выражения, например:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \int \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{1}{r_t}\right)\frac{D(x_t', y_t', z_t')}{D(x', y', z')}\,d\tau',$$

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2} = \int_T \frac{\partial^2}{\partial x_t^2}\left(\frac{1}{r_t}\right)\frac{D(x_t', y_t', z_t')}{D(x', y', z')}\,d\tau' \qquad (15.4)$$

[ср. формулы (26) и (27), соответствующие потенциалу простого слоя, на стр. 78 в ([5])]. Здесь вторые производные V_t имеют на поверхности S предельные значения извне, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ.

Везде в этой главе мы считаем, что потенциал и его производные определены в области $D - T$, под значениями его вторых производных на поверхности S понимаются их предельные значения извне.

Выражения (15.3) и (15.4) имеют смысл и при комплексных значениях t, если только t достаточно мало по модулю. Этот факт основывается на следующей лемме:

ЛЕММА. *При* $|t| < \frac{1}{3}$ *функция* $\frac{1}{r_t}$, *где* r_t *определяется формулой* (15.2), *разлагается в ряд по степеням* t, *сходящийся равномерно относительно* x', y', z'.

Доказательство. Положим

$$\vec{R} = \{x, y, z\}, \quad \vec{R}_t = \{x_t, y_t, z_t\}, \quad \vec{\rho} = \{\alpha, \beta, \gamma\};$$

тогда

$$\vec{r}_t = \vec{R}_t' - \vec{R}_t, \quad \vec{r} = \vec{R}' - \vec{R}. \qquad (15.5)$$

Соотношения (12.1) можно записать следующим образом:

$$\vec{R}_t = \vec{R} + \frac{t}{\Pi}\vec{\rho}.$$

Написав такое же соотношение для векторов со штрихом и вычитая одно из другого, получим:

$$\vec{r}_t = r + \frac{t}{\Pi}(\vec{\rho}' - \vec{\rho}). \qquad (15.6)$$

Оценим

$$|\vec{\rho}' - \vec{\rho}| = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2}.$$

По теореме о среднем значении,

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= a_1(x' - x) + a_2(y' - y) + a_3(z' - z) = \vec{a}\,\vec{r}, \\ \beta' - \beta &= b_1(x' - x) + b_2(y' - y) + b_3(z' - z) = \vec{b}\,\vec{r}, \\ \gamma' - \gamma &= c_1(x' - x) + c_2(y' - y) + c_3(z' - z) = \vec{c}\,\vec{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.7)$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, c_3$ — значения частных производных α, β, γ по x, y, z, например:

$$a_1 = \alpha_x[x + \theta_1(x' - x),\ y + \theta_1(y' - y),\ z + \theta_1(z' - z)], \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

По неравенству Буняковского — Шварца,

$$(\alpha' - \alpha)^2 \leqslant a^2 r^2, \quad (\beta' - \beta)^2 \leqslant b^2 r^2, \quad (\gamma' - \gamma)^2 \leqslant c^2 r^2.$$

Отсюда следует:

$$(\vec{\rho}' - \vec{\rho})^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2) r^2. \tag{15.8}$$

В силу условий (11.1),

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |c_3| \leqslant \Pi,$$

поэтому

$$a^2 \leqslant 3\Pi^2, \quad b^2 \leqslant 3\Pi^2, \quad c^2 \leqslant 3\Pi^2$$

и, следовательно,

$$|\vec{\rho}' - \vec{\rho}| \leqslant 3\Pi r. \tag{15.9}$$

Как видно из (12.6), функция $\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{r_t}$ при

$$\frac{t}{\Pi} |\vec{\rho}' - \vec{\rho}| < r \tag{15.10}$$

разлагается в ряд по степеням t. На основании (15.9) при $|t| < \frac{1}{3\Pi}$, неравенство (15.10) будет выполняться и дробь $\frac{1}{r_t}$ разложится в ряд по степеням t, сходящийся равномерно относительно пространственных координат.

Следствие. *При* $|t| < \frac{1}{3\Pi}$ *выражения* V_t, $\frac{\partial V_t}{\partial x_t}, \ldots, \frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *являются аналитическими функциями комплексной переменной* t.

Для доказательства достаточно подставить разложение по степеням t в соотношения (12.3) — (12.4) и проинтегрировать почленно (якобиан $\frac{D(x_t', y_t', z_t')}{D(x', y', z')}$ является многочленом относительно t).

16. Л. Лихтенштейном было показано, что оценки вида (14.4) имеют место и для производных V_t по x_t, y_t, z_t при достаточно малых по модулю комплексных t [см. (7), стр. 125—126, или (6)]. Будем считать, что они имеют место при $|t| \leqslant \Pi_0$, где $\Pi_0 \leqslant \frac{1}{3}$. Выпишем их для внешнего потенциала и его производных по x_t:

$$|V_t|, \left|\frac{\partial V_t}{\partial x_t}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}\right|_\lambda \leqslant c_2, \quad |t| \leqslant \Pi_0. \tag{16.1}$$

Точно такие же неравенства имеют место и для остальных производных. Они соответствуют неравенствам (171) и (175) работы (7) (стр. 125—126) или неравенству (28) работы (5) (стр. 78). Постоянная c_2, стоящая в правой части (16.1), зависит от числа Π. Но при уменьшении Π она может лишь уменьшиться. Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что

$$0 < \Pi \leqslant \frac{1}{2}\Pi_0, \quad \Pi_0 < \frac{1}{3}. \tag{16.2}$$

Если бы это было не так, то мы могли бы, сохраняя Π_0 и c_2, уменьшить Π (уменьшив в такое же число раз и функции α, β, γ п. 14). Будем предполагать условие (16.2) выполненным.

Пользуясь аналитичностью по t, оценим вторые производные по t:

$$\left|\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial V_t}{\partial x_t}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial z_t^2}\right|_\lambda$$

при $|t|\leqslant\Pi$. Обозначим через Γ окружность радиуса $\frac{1}{2}\Pi_0$ с центром в точке t, предполагая $|t|\leqslant\Pi$. В силу условия (16.2), окружность Γ лежит целиком внутри области $|t|\leqslant\Pi_0$ и поэтому на ней имеют место оценки (16.1). По формуле Коши,

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{(\tau-t)^3}V_\tau\,d\tau,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial z_t^2}=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{(\tau-t)^3}\frac{\partial^2 V_\tau}{\partial z_\tau^2}\,d\tau.\end{gathered}\tag{16.3}$$

Учитывая, что на Γ имеют место неравенства (16.1), из (16.3) найдем:

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial V_t}{\partial x_t}\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial z_t^2}\right|_\lambda\leqslant\frac{8c_2}{\Pi_0^2},\\ |t|\leqslant\Pi,\quad (x,y,z)\in D-T.\end{gathered}\tag{16.4}$$

Мы выписали неравенства лишь для производных по x_t. Аналогичные неравенства имеют место и для других производных.

При $|t|\leqslant\Pi_0$ имеет место разложение:

$$V_t=V+\left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0}t+\cdots+\left.\frac{\partial^m V_t}{\partial t^m}\right|_{t=0}\frac{t^m}{m!}+\cdots$$

Полагая $t=\Pi$ и учитывая, что на основании (15.1) $V_t|_{t=\Pi}=\hat{V}$, найдем:

$$\hat{V}=V+\left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0}\Pi+\cdots+\frac{\partial^m V_t}{\partial t^m}\frac{\Pi^m}{m!}+\cdots.\tag{16.5}$$

17. Зададим на поверхности S данного тела T функцию ζ, принадлежащую пространству R_2 п. 4 и имеющую достаточно малую норму. Отложив значения ζ по внешней нормали к S, мы получим поверхность $\hat{S}$, ограничивающую тело $\hat{T}$. Если вблизи поверхности S ввести систему криволинейных координат $(\xi,\ \eta,\ \nu)$ п. 3, то уравнение поверхности $\hat{S}$ будет иметь вид:

$$\nu=\zeta(\xi,\ \eta).\tag{17.1}$$

Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая $T+S$ и $\hat{T}+\hat{S}$. Важным моментом в использовании результатов п. 14—16 для дальнейшего является вопрос о существовании такого взаимно однозначного

отображения области D на другую область $\hat{D}$, которое имело бы вид (14.2), удовлетворяло бы условиям гладкости п. 14 и переводило бы $T+S$ в $\hat{T}+\hat{S}$ (если считать, что $T+S\subset D$, $\hat{T}+\hat{S}\subset\hat{D}$). В тех случаях, когда такое отображение существует, результаты последующих пунктов позволяют доказать неравенства (12.9) и (12.10) для оператора $\Psi(\zeta)$ и этим завершить решение поставленной нами задачи.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть тело T звездно относительно своей внутренней точки O, $\hat{T}$ — тело, ограниченное поверхностью $\hat{S}$, которая в криволинейных координатах (ξ, η, ν) определяется уравнением* (17.1), *D — выпуклая область, содержащая $T+S$ и $\hat{T}+\hat{S}$. Существуют такие положительные числа Ω и K, зависящие лишь от формы тела T, что при $\|\zeta\|_{H^{(1,\lambda)}}\leqslant\Omega$ можно построить топологическое отображение вида*

$$\hat{x}=x+\alpha(x,y,z),\quad \hat{y}=y+\beta(x,y,z),\quad \hat{z}=z+\gamma(x,y,z) \tag{17.2}$$

области D на некоторую область $\hat{D}$, которое переводит $T+S$ в $\hat{T}+\hat{S}$ и в котором функции α, β, γ удовлетворяют условиям п.14. Число Π в формулах (14.1) *может быть взято равным*

$$\Pi\geqslant K\|\zeta\|_{H^{(1,\lambda)}}. \tag{17.3}$$

Доказательство. Введем сферическую систему координат (r, ξ, η) с центром в точке O, принимая за криволинейные координаты на поверхности S сферические углы ξ, η. Пусть $M(r, \xi, \eta)$ — произвольная точка области D. Луч OM пересекает поверхность S в некоторой точке $M_0(R, \xi, \eta)$. Определим в D векторную функцию

$$\vec{\rho}(M)=\frac{r^2(M)}{R^2(M_0)}\zeta(M_0)\vec{n}(M_0), \tag{17.4}$$

где $\vec{n}(M_0)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке M_0. Если S принадлежит классу $\Lambda(2,\lambda)$, а ζ — классу $H(1,\lambda)$, то составляющие вектора $\vec{\rho}$ принадлежат классу $H(1,\lambda)$. Отображение

$$\hat{\vec{r}}=\vec{r}+\vec{\rho}, \tag{17.5}$$

ставящее в соответствие точке $M(\vec{r})$ точку $\hat{M}(\hat{\vec{r}})$, и есть отображение, обладающее требуемыми свойствами. За функции α, β, γ можно принять составляющие вектора $\vec{\rho}$.

Следствие. *Если в условиях теоремы T_t есть тело, граница которого S_t определяется уравнением*

$$\nu=\frac{t}{\Pi}\zeta(\xi,\eta),$$

то отображение

$$\hat{\vec{r}}=\vec{r}+\frac{t}{\Pi}\vec{\rho} \tag{17.6}$$

переводит взаимно однозначно $T+S$ в T_t+S_t.

18. Так же как и в п. 17, каждой функции $\zeta \in R_2$ с достаточно малой нормой сопоставим поверхность $\hat{S}$, определяемую уравнением $\nu = \zeta(\xi, \eta)$, и поверхность S_t, определяемую уравнением $\nu = \frac{t}{\Pi}\zeta(\xi, \eta)$. Тела, ограниченные этими поверхностями, обозначим соответственно через T, $\hat{T}$ и T_t.

Везде в дальнейшем мы будем предполагать выполненным утверждение теоремы 5 о существовании топологического отображения (17.2), удовлетворяющего условиям п. 14, и считать справедливой оценку (17.3) для числа Π. Как показывает теорема 5, для случая звездного T такие предположения всегда могут быть сделаны. Пусть параметрические уравнения поверхности S имеют вид:

$$x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta). \tag{18.1}$$

Криволинейные координаты ξ, η, ν связаны с декартовыми формулами:

$$x = X(\xi, \eta) + \nu a(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta) + \nu b(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta) + \nu c(\xi, \eta), \tag{18.2}$$

где a, b, c — составляющие единичного вектора внешней нормали к поверхности S. Покажем, что оценки типа (16.4) имеют место для производных внешнего потенциала по криволинейным координатам. Для этого будем рассматривать тела T, $\hat{T}$, T_t как лежащие в одном и том же пространстве и истолковывать преобразования (15.1) как деформирующие D при неизменной системе координат. Для тела T_t числа x_t, y_t, z_t будут обычными декартовыми координатами и их связь с криволинейными будет определяться формулами:

$$x_t = X(\xi, \eta) + \nu a(\xi, \eta), \quad y_t = Y(\xi, \eta) + \nu b(\xi, \eta), \quad z_t = Z(\xi, \eta) + \nu c(\xi, \eta). \tag{18.3}$$

Производные внешнего потенциала V_t по криволинейным координатам

$$\frac{\partial V_t}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \eta}$$

являются линейными комбинациями производных

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t}, \ldots, \frac{\partial^2 V_t}{\partial x_t^2}, \ldots, \frac{\partial^2 V_t}{\partial z_t^2}$$

с коэффициентами, зависящими от первых и вторых производных функций x_t, y_t, z_t, определяемых (18.3), по ξ, η, ν, т. е. с коэффициентами, зависящими лишь от формы тела T. Учитывая это обстоятельство, а также то, что функция (18.3), в силу условий п. 3, принадлежит классу $H(1, \lambda)$, и, принимая во внимание оценки (16.4), мы приходим к следующим неравенствам:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial V_t}{\partial \nu}\right|, \ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \xi}\right|_\lambda, \ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \eta}\right|, \ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \eta}\right|_\lambda \leqslant \frac{c_3}{\Pi_0^2},$$
$$|t| \leqslant \Pi \leqslant \frac{1}{2}\Pi_0, \quad \Pi_0 \leqslant \frac{1}{3}, \quad (x, y, z) \in D - T. \tag{18.4}$$

19. Обозначим совокупность членов порядка выше первого в разложении (16.5) внешнего потенциала $\hat{V}$ через W:

$$W = V_1 - V_0 - \frac{\partial V_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \Pi, \quad (x, y, z) \in D - T. \tag{19.1}$$

Здесь мы положим $V_1 = \hat{V}$. Функция W может быть записана следующим образом:

$$W = \int_0^{\Pi} du \int_0^{u} \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\, dt\,. \tag{19.2}$$

Производные

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \eta}$$

могут быть получены путем дифференцирования под знаком интеграла, например:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \xi} = \int_0^{\Pi} du \int_0^{u} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial \nu \partial \xi}\, dt\,.$$

Производя такие дифференцирования и применяя оценки (18.4), мы приходим к следующим неравенствам:

$$\left|\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \xi}\right|_{\lambda}, \ \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \eta}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \nu \partial \eta}\right|_{\lambda} \leqslant \frac{c_3}{2\Pi^2}\Pi_0^2. \tag{19.3}$$

Обозначим через

$$V^e, \quad \frac{\partial V^e}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 V^e}{\partial \nu \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 V^e}{\partial \nu \partial \eta}$$

предельные значения потенциала и его производных при $\nu \to +0$. Согласно обозначениям п. 8,

$$\frac{\partial V_1^e}{\partial \nu} = U_1, \quad \frac{\partial V_0^e}{\partial \nu} = U_0.$$

По определению функции W и на основании равенства (8.2),

$$\sum_{m=2}^{\infty} \mathfrak{U}_m = \lim_{\nu \to +0} \frac{\partial W}{\partial \nu} = \frac{\partial W^e}{\partial \nu}.$$

Принимая во внимание (8.8), находим:

$$\Psi(\zeta) = \lim_{\nu \to +0} \frac{\partial W}{\partial \nu} = \frac{\partial W^e}{\partial \nu}. \tag{19.4}$$

Из (19.3) и (19.4) получим неравенства, справедливые при достаточно малой норме $\|\zeta\|$:

$$|\Psi(\zeta)|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\Psi(\zeta)\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\Psi(\zeta)\right|_{\lambda}, \ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\Psi(\zeta)\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\Psi(\zeta)\right|_{\lambda} \leqslant \frac{c_3}{2\Pi_0^2}\Pi^2. \tag{19.5}$$

Из (19.5) следует, что для $\zeta \in R_2$ $\Psi(\zeta)$ также принадлежит R_2.

ТЕОРЕМА 6. *Существуют такие постоянные* a_2, d, *зависящие лишь от тела* T, *что при* $\|\zeta\| \leqslant \omega$, *где* $\omega \leqslant d$, *будет:*

$$\|\Psi(\zeta)\| \leqslant a_2 \omega^2. \tag{19.6}$$

Доказательство. Обозначим $c_4 = \max\{1, K\}$. Зафиксируем положительное число $\Pi_0 < \frac{1}{3}$ и положим

$$d = \min\left\{\frac{\Pi_0}{2c_4};\ \Omega\right\},$$

где K и Ω — числа теоремы 5. Для каждого положительного $\omega \leqslant d$ введем

$$\Pi = c_4\omega. \tag{19.7}$$

Тогда будут выполнены неравенства (16.2) и (17.3) и поэтому

$$0 \leqslant \omega \leqslant \Pi \leqslant \frac{1}{2}\Pi_0.$$

В этих условиях справедливы неравенства (19.5), которые могут быть записаны в такой форме:

$$\|\Psi(\zeta)\| \leqslant \frac{2c_3}{\Pi_0^2}\Pi^2 \tag{19.8}$$

(см. определенные нормы в п. 4). Полагая в (19.8)

$$a_2 = \frac{2c_3c_4^2}{\Pi_0^2}$$

и подставляя в (19.7), мы приходим к (19.6).

20. Для доказательства второго неравенства Лихтенштейна (9.10) используем метод, изложенный на стр. 117—118 или 124—127 в работе ([7]). Пусть $\dot{\xi}$ и $\hat{\zeta}$ — две функции, определенные на поверхности S, принадлежащие пространству R_2 и удовлетворяющие соотношениям

$$\|\dot{\xi}\| \leqslant \omega, \quad \|\hat{\zeta}\| \leqslant \omega, \tag{20.1}$$

где ω — заданное положительное число. Введем положительные числа Π и Π_0 и будем предполагать, что Π, Π_0 и ω удовлетворяют всем условиям п. 19. Положим

$$\|\dot{\zeta} - \dot{\zeta}\| = \omega_1.$$

Из неравенств (20.1) видно, что $\omega_1 \leqslant 2\omega$. Будем считать, что $\omega_1 \leqslant \frac{1}{2}\omega$; в дальнейшем мы освободимся от этого ограничения.

Введем семейство функций, зависящих от параметра t:

$$\zeta_t = \dot{\zeta} + \frac{t}{\omega_1}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta}) \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega_1). \tag{20.2}$$

Каждому значению параметра t при $0 \leqslant t \leqslant \omega_1$ отвечает поверхность S_t, определяемая в координатах ξ, η, ν уравнением $\nu = \zeta_t(\xi, \eta)$, и тело T_t, ограниченное поверхностью S_t. К телу T_t можно применить все рассуждения предыдущих пунктов.

Согласно следствию из леммы п. 15, потенциал V_t тела T_t и его производные по координатам x_t, y_t, z_t будут при $|t|<\frac{1}{3}$ аналитическими функциями t. Обозначим

$$W_t = V_t - V_0 - \frac{\partial V_\tau}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Тогда

$$W_t = \int_0^t du \int_0^u \frac{\partial^2 V_\tau}{\partial \tau^2}\, d\tau \tag{20.3}$$

и аналогично для производных $\frac{\partial W_t}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 W_t}{\partial \nu \partial \xi}$, $\frac{\partial^2 W_t}{\partial \nu \partial x_t}$. При $|t|\leqslant \Pi$ для W_t и его производных будут иметь место оценки (19.3) (с W_t вместо W).

Обозначим через Γ окружность радиуса $\frac{1}{2}\omega$ с центром в комплексной точке t, предполагая, что $|t|\leqslant\omega_1$. Если τ — точка на окружности Γ, то для нее, в силу принятого нами условия $\omega_1\leqslant\frac{1}{2}\omega$, будет:

$$|\tau|\leqslant|\tau-t|+|t|\leqslant\tfrac{1}{2}\omega+\omega_1\leqslant\omega. \tag{20.4}$$

Согласно (19.7), $\omega\leqslant\Pi$, так как $c_4\geqslant 1$, поэтому для всех точек окружности Γ $|\tau|\leqslant\Pi$ и, следовательно, на Γ удовлетворяются неравенства (19.3).

По формулам Коши,

$$\frac{\partial^2 W_t}{\partial t\partial \nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial W_\tau}{\partial \nu}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}, \qquad \frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^2 W_\tau}{\partial \nu\partial \xi}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2},$$
$$\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^2 W_t}{\partial \nu\partial \eta}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}. \tag{20.5}$$

Из (19.3) и (20.5) находим:

$$\left|\frac{\partial^2 W_t}{\partial t\partial \nu}\right|, \left|\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \xi}\Big|_\lambda\right|, \left|\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \eta}\right|, \left|\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \eta}\Big|_\lambda\right| \leqslant \frac{c_5}{2\Pi_0^2}\omega,$$
$$|t|\leqslant\omega, \quad (x,\ y,\ z)\in D-T. \tag{20.6}$$

21. При $t=0$ функция ζ_t превращается в $\dot\zeta$, при $t=\omega_1$ — в $\hat\zeta$, поэтому

$$\frac{\partial \hat W}{\partial \nu} - \frac{\partial \dot W}{\partial \nu} = \int_0^{\omega_1}\frac{\partial^2 W_t}{\partial t\partial \nu}\, dt,$$
$$\frac{\partial^2 \hat W}{\partial \nu\partial \xi} - \frac{\partial^2 \dot W}{\partial \nu\partial \xi} = \int_0^{\omega_1}\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \xi}\, dt, \qquad \frac{\partial^2 \hat W}{\partial \nu\partial \eta} - \frac{\partial^2 \dot W}{\partial \nu\partial \eta} = \int_0^{\omega_1}\frac{\partial^3 W_t}{\partial t\partial \nu\partial \eta}\, dt. \tag{21.1}$$

Из (21.1) и (20.6) получаются оценки:

$$\left|\frac{\partial\hat{W}}{\partial\nu}-\frac{\partial\dot{W}}{\partial\nu}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial\nu\partial\xi}-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial\nu\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial\nu\partial\xi}-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial\nu\partial\xi}\right|_\lambda,$$
$$\left|\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial\nu\partial\eta}-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial\nu\partial\eta}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial\nu\partial\eta}-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial\nu\partial\eta}\right|_\lambda\leqslant\frac{c_5}{2\Pi_0^2}\,\omega\,\omega_1. \tag{21.2}$$

Переходя к пределу при $\nu\to+0$ и учитывая (19.4), находим:

$$|\Psi(\hat{\zeta})-\Psi(\dot{\zeta})|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi(\hat{\zeta})-\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi(\zeta)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi(\hat{\zeta})-\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi(\dot{\zeta})\right|_\lambda,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Psi(\hat{\zeta})-\frac{\partial}{\partial\eta}\Psi(\dot{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Psi(\hat{\zeta})-\frac{\partial}{\partial\eta}\Psi(\dot{\zeta})\right|_\lambda\leqslant\frac{c_5}{2\Pi_0^2}\,\omega\,\omega_1. \tag{21.3}$$

Положив $\frac{c_5}{2\Pi_0^2}=\frac{b_2}{4}$, мы приходим к неравенству:

$$\|\Psi(\hat{\zeta})-\Psi(\dot{\zeta})\|\leqslant\frac{b_2}{4}\,\omega\,\omega_1. \tag{21.4}$$

Для того чтобы избавиться от ограничения $\omega_1\leqslant\frac{1}{2}\omega$, вставим между $\dot{\zeta}$ и $\hat{\zeta}$ функции:

$$\zeta_{\frac{1}{4}}=\dot{\zeta}+\frac{1}{4}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta}),\quad \zeta_{\frac{1}{2}}=\dot{\zeta}+\frac{1}{2}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta}),\quad \zeta_{\frac{3}{4}}=\dot{\zeta}+\frac{3}{4}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})$$

[см. (7), стр. 126]. Используя то, что $\omega_1\leqslant 2\omega$, найдем, что расстояние по норме между каждой из двух соседних функций в цепочке $\dot{\zeta}$, $\zeta_{\frac{1}{4}}$, $\zeta_{\frac{1}{2}}$, $\zeta_{\frac{3}{4}}$, $\hat{\zeta}$ не превышает $\frac{1}{2}$ и поэтому для каждой такой пары будет выполняться неравенство вида (21.4). Складывая такие неравенства, мы приходим к неравенству

$$\|\Psi(\hat{\zeta})-\Psi(\dot{\zeta})\|\leqslant b_2\,\omega\,\omega_1,$$

или, заменяя ω_1,

$$\|\Psi(\hat{\zeta})-\Psi(\dot{\zeta})\|\leqslant b_2\,\omega\,\|\hat{\zeta}-\dot{\zeta}\|. \tag{21.5}$$

Это и есть второе неравенство Лихтенштейна (12.10).

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Если $\hat{\zeta}$ и $\dot{\zeta}$ — две функции, определенные на поверхности S, принадлежащие пространству R_2 и удовлетворяющие* (20.1), *где $\omega\leqslant d$ — числа теоремы* 6, *то имеет место неравенство* (21.5).

Теорема 7 завершает решение задачи, поставленной в п. 4.

Поступило
4.XI 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н. и Петровский И. Г., О первой краевой задаче для уравнений эллиптического типа, Успехи мат. наук, вып. VIII (1941), 8—31.

[2] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Москва, 1953.

[3] Lichtenstein L., Gleichgewichtsfiguren der rotierender Flüssigkeiten, Berlin, 1933.

[6] Lichtenstein L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie, Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften. II c. 3, 177—377.
[8] Lichtenstein L., Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I, Math. Zeitschrift, 23 (1925), 72—88.
[6] Lichtenstein L., Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. IV, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, 82 (1931), 265—344.
[7] Lichtenstein L., Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen, Berlin, 1931.
[8] Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. III, вып. 3 (25) (1948), 27—112.
[9] Новиков П. С., О единственности решения обратной задачи потенциала, Доклады Ак. наук СССР, 18 (1938), 165—168.
[10] Сретенский Л. Н., Об одной обратной задаче теории потенциала, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 2 (1938), 551—570.
[11] Сретенский Л. Н., О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала, Доклады Ак. наук СССР, 99 (1954), 21—22.
[12] Тихонов А. Н., Об устойчивости обратных задач, Доклады Ак. наук СССР, 39 (1943), 195—198.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 819—842

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе рассматривается задача о нахождении гармонической функции внутри ограниченной области по ее значениям и значениям ее нормальной производной на куске границы области, т. е. задача Коши для уравнения Лапласа.

Введение

Как известно, решение задачи Коши для уравнения Лапласа единственно, но неустойчиво. Можно подобрать гармонические функции со сколь угодно малыми данными Коши на куске границы области, которые будут сколь угодно велики внутри области (пример Адамара). Для того чтобы постановка задачи была корректной, необходимо сузить класс рассматриваемых решений. Устойчивость плоской задачи в классе ограниченных решений впервые доказал Карлеман (1). Из результатов Карлемана непосредственно следуют оценки, характеризующие эту устойчивость. Оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи в классе ограниченных решений, впервые были получены автором для гармонических функций, заданных в прямом цилиндре и обращающихся в нуль на образующих. Данные Коши брались на основании цилиндра. Немного позже аналогичные оценки были получены С. Н. Мергеляном для функций внутри сферы и автором — для произвольной пространственной области с достаточно гладкой границей [см. (3)]. Примерно в то же время Е. М. Ландис получил оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи для произвольного эллиптического уравнения.

После того, как установлена корректность постановки, естественно встает вопрос о создании эффективного метода решения задачи. Под эффективным методом решения задачи мы понимаем такой алгоритм, который дает возможность вычислить значения функции с некоторой гарантированной степенью точности по приближенным данным Коши для нее.

Описание гармонической функции в области D по заданным значениям u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на участке S есть по существу задача вычислительной математики. Функции $\varphi = u|_S$ и $\psi = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$ не могут быть заданы точно. Вместо φ и ψ мы будем задавать систему приближенных значений φ_n и ψ_n с задачной точностью:

$$\|\varphi_n - u\|_S \leqslant \alpha_n, \quad \left\|\psi_n - \frac{\partial u}{\partial n}\right\|_S \leqslant \beta_n,$$

где $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, на S мы будем считать заданной систему окрестностей функций φ и ψ. Иначе говоря, под эффективным методом понимается алгоритм, дающий возможность решить следующую задачу.

Постановка I. Пусть гармоническая функция u, определенная в ограниченной области D (плоской или пространственной), удовлетворяет в D неравенству:

$$\|u\| \leqslant M. \tag{0.1}$$

Пусть, кроме того, на некотором куске S границы D известны последовательности функций φ_n и ψ_n (определенных только на S) и чисел α_n и β_n, стремящихся к нулю, таких, что на поверхности S

$$\|u - \varphi_n\| \leqslant \alpha_n, \tag{0.2}$$

$$\left\|\psi_n - \frac{\partial u}{\partial \nu}\right\| \leqslant \beta_n, \tag{0.3}$$

где ν — нормаль к поверхности S.

Требуется, исходя только из функций φ_n и ψ_n, построить последовательность функций u_n, определенных в области D и сходящихся к функции u с некоторой гарантированной скоростью.

В неравенствах (0.2), (0.3) норма может быть различной, и в дальнейшем каждый раз будет указано, о какой норме идет речь.

Во всем дальнейшем задача создания эффективного метода решения будет рассматриваться именно в такой постановке.

Некоторые вопросы математической физики (например, обратная задача теории потенциала) приводят именно к такой постановке.

В упомянутой работе Карлемана получена формула для определения аналитической функции комплексного переменного по ее значениям на некотором куске дуги. Однако эта формула неустойчива и поэтому не может быть прямо использована в качестве эффективного метода. Первые результаты, относящиеся к построению эффективного алгоритма для решения задачи, насколько известно автору, опубликованы одновременно в работе Carlo Pucci [см. (2)] и автора [см. (3)].

В настоящей работе изложены результаты Карлемана по устойчивости плоской задачи и результаты автора по устойчивости плоской и пространственной задач. Кроме того, в работе предложен ряд методов эффективного решения задачи.

В первой главе настоящей работы рассматривается плоская задача. В первом параграфе первой главы изложены результаты Карлемана и предложен первый метод эффективного решения задачи, полученный из формулы Карлемана. Во втором параграфе доказывается устойчивость плоской задачи в другой метрике и предлагается второй метод приближенного решения задачи.

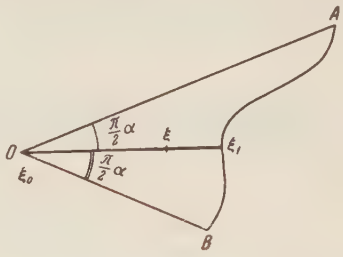
Во второй главе работы рассматривается пространственная задача. В этой главе получены оценки, характеризующие устойчивость задачи в классе ограниченных решений, и предложен метод эффективного решения пространственной задачи, который годен и для решения плоской задачи и поэтому может быть назван третьим методом решения плоской задачи.

Глава I. Плоская задача

Решение плоской задачи по сравнению с пространственной облегчается двумя обстоятельствами. Во-первых, плоская задача нахождения гармонической функции по данным Коши для нее на некоторой кривой эквивалентна задаче нахождения аналитической функции комплексного переменного по ее значениям на том же куске кривой. Во-вторых, на плоскости существуют конформные отображения, относительно которых оператор Лапласа инвариантен. Это второе обстоятельство позволяет переносить свойства гармонических функций, определенных в какой-либо одной области (например, в прямоугольнике), на гармонические функции, определенные в любой другой области.

Указанные соображения делают возможным применение первых двух методов эффективного решения.

§ 1. В работе Карлемана [1] рассматривается следующая задача: определить в ограниченной области D аналитическую функцию $f(z)$, регулярную в D, по ее значениям на куске границы D. К этой задаче легко сводится плоская задача Коши для уравнения Лапласа. Действительно, рассмотрим аналитическую функцию $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, равную $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $v(x, y)$ — функция, сопряженная к функции $u(x, y)$. Зная на куске границы D нормальную производную функции $u(x, y)$, мы можем из известных соотношений определить на этом же куске границы функцию $v(x, y)$ и, следовательно, $f(z)$.



Перейдем к изложению результатов Карлемана.

ЛЕММА КАРЛЕМАНА. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая и регулярная в области D. Область D* (см. рисунок) *ограничена прямыми OB и OA и непрерывной кривой AB, лежащей внутри угла AOB.*

Пусть ξ_0 — комплексное число, соответствующее точке O, ξ — точка, лежащая на биссектрисе угла AOB, и ξ_1 — точка пересечения этой биссектрисы с кривой AB. Величина угла AOB равна $\pi\alpha$. Тогда если выполняются неравенства:

$$|f(z)| \leqslant M \text{ всюду в } D, \tag{1}$$

$$|f(z)| \leqslant m \text{ на кривой } AB, \tag{2}$$

то справедливо и неравенство:

$$|f(\xi)| \leqslant M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{3}$$

где r — расстояние от точки ξ до точки ξ_0, а R — максимальное расстояние от точки ξ_0 до дуги AB.

Для доказательства рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z)\, e^{\sigma\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

где α — положительное число. Из (1) и (2) следует, что модуль функции $F(z)$ на границе D удовлетворяет неравенствам:

$$|F(z)| \leqslant M \qquad \text{на прямых } OB \text{ и } OA,$$

$$|F(z)| \leqslant m e^{\sigma\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad \text{на кривой } AB.$$

Из принципа максимума следует, что модуль $F(z)$ не превосходит наибольшего из чисел

$$M, \quad m e^{\sigma\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Значит, модуль $f(\xi)$ не превосходит наибольшего из чисел

$$M e^{-\sigma}, \quad m e^{\sigma\left[\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]}. \tag{4}$$

Очевидно, что наилучшая оценка для модуля $f(\xi)$ получается в случае, когда

$$M e^{-\sigma} = m e^{\sigma\left[\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]},$$

или

$$\sigma = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \ln \frac{M}{m}. \tag{5}$$

Подставляя выражение для σ из равенства (5) в (4), мы получим доказываемое неравенство (3).

Из леммы Карлемана непосредственно следуют оценки, характеризующие устойчивость задачи Коши для уравнения Лапласа в классе функций с ограниченным градиентом. Действительно, пусть на некотором гладком куске S границы ограниченной области данные Коши гармонической функции $u(x, y)$ меньше m, а во всей области модуль градиента u меньше M. Тогда модуль аналитической функции $f(z) = u + iv$ (при соответствующем подборе постоянной, с точностью до которой определена функция v) будет на S меньше $m(1 + l)$, где l — длина кривой S, а во всей области будет меньше $M(1 + d)$, где d — диаметр области. Пользуясь леммой Карлемана, модуль функции $f(z)$ (а значит, и $u(x, y)$) можно оценить в точках области, из которых кривая S видна под конечным углом. Затем, зная оценку в этих точках и выбирая новые кривые S, можно получить оценки в более широкой области и т. д. Таким образом можно получить оценку для модуля функции u в любой точке области.

Для того чтобы из леммы Карлемана получить оценки, характеризующие устойчивость задачи в классе ограниченных функций, можно воспользоваться следующим известным свойством гармонических функций:

если в замкнутой области D гармоническая функция $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству:

$$|u(x, y)| \leqslant M,$$

то сопряженная к ней функция $v(x, y)$, при соответствующем подборе постоянной, внутри D удовлетворяет неравенству:

$$|v(x, y)| < CM \ln \frac{M}{\rho(x, y)},$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние от точки (x, y) до границы области D, а C — постоянная, зависящая от области D.

Как было указано выше, в плоском случае задача Коши для уравнения Лапласа эквивалентна задаче нахождения аналитической функции комплексного переменного по ее значениям на куске границы области.

Таким образом, в плоском случае постановка I с нормой в метрике C эквивалентна следующей постановке.

Постановка II. Пусть аналитическая функция $f(z)$, определенная в ограниченной области D, удовлетворяет в этой области неравенству:

$$|f(z)| \leqslant M. \tag{6}$$

Пусть, кроме того, на куске S границы D нам известна последовательность функций $\varphi_n(z)$ (определенных только на S), равномерно сходящаяся к функции $f(z)$ на S так, что

$$|f(z) - \varphi_n(z)| \leqslant \alpha_n,$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Требуется, исходя из функций $\varphi_n(z)$, построить последовательность функций $f_n(z)$, определенных в области D и сходящихся к функции $f(z)$ в области D возможно быстрее.

Предположим дополнительно, что функции $\varphi_n(z)$ и $f(z)$ непрерывны на кривой S. Если кривая S — вся граница области D, то одно из возможных решений задачи есть интегралы типа Коши от функций $\varphi_n(z)$. Если же S — только кусок границы D, то интегралы типа Коши не дают решения задачи. Более того, если про функцию $f(z)$ заранее ничего неизвестно (кроме регулярности), т. е. если не задаваться неравенством (6), то принципиально невозможно, исходя только из функций $\varphi_n(z)$, построить последовательность функций, сходящуюся к $f(z)$ с гарантированной скоростью. Условие же (6) дает возможность построить такую последовательность. Принципиальная возможность построения такой последовательности следует из вышеизложенных результатов Карлемана.

Сейчас мы непосредственно рассмотрим случай, когда D — область из леммы Карлемана, S — кривая AB и требуется построить последовательность чисел, сходящуюся к значению $f(z)$ на некоторой точке ξ биссектрисы угла AOB. Решив задачу в таком частном случае, мы, очевидно, сможем получить последовательность функций, сходящуюся к функции $f(z)$ в тех точках произвольной области D, из которых кривая S видна под ненулевым углом (весь угол лежит внутри D). Затем, рассматривая новые кривые, на которых нам уже будет известна последовательность

функций, сходящихся к $f(z)$, мы сможем тем же методом построить последовательность функций, сходящуюся к $f(z)$ во всей области D.

Таким образом, общая постановка II плоской задачи сводится к следующей постановке.

Постановка III. Пусть $f(z)$ — неизвестная функция, определенная в области D из леммы Карлемана и удовлетворяющая неравенству (1) леммы. Пусть, кроме того, на кривой AB нам известна последовательность непрерывных функций $\varphi_n(z)$, равномерно сходящихся к функции $f(z)$ на этой кривой так, что

$$|f(z)-\varphi_n(z)|\leqslant\alpha_n,$$

где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Требуется, исходя только из функций $\varphi_n(z)$, построить последовательность чисел, сходящуюся к значению функции $f(z)$ в точке ξ, лежащей на биссектрисе угла AOB, возможно быстрее.

Положим

$$f_n(\xi)=\frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i}\int\limits_{AB}\varphi_n(z)e^{\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{z-\xi}\,dz \tag{7}$$

и оценим по модулю разность $w_n(\xi)=f(\xi)-f_n(\xi)$.

Преобразуем функцию $f(z)$, используя интегральную формулу Коши:

$$f(z)=e^{-\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}e^{\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}f(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}e^{-\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\int\limits_{AOBA}f(z_1)e^{\sigma_n\left(\frac{z_1-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dz_1}{z-z_1}.$$

Значит, в точке ξ функция $f(z)$ равна:

$$f(\xi)=\frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i}\int\limits_{AOBA}f(z)e^{\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dz}{\xi-z}=$$

$$=\frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i}\int\limits_{AB}f(z)e^{\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dz}{z-\xi}+$$

$$+\frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i}\int\limits_{AOB}f(z)e^{\sigma_n\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dz}{\xi-z}. \tag{8}$$

Если в равенстве (8) перейти к пределу при $\sigma_n\to\infty$, то мы получим формулу Карлемана. Эта формула выражает значение аналитической функции через ее значения на некоторой кривой S в точке, из которой кривая S видна под ненулевым углом.

Действительно, в пределе при $\sigma_n\to\infty$ второй член в правой части равенства (8) равен нулю и, значит,

$$f(\xi)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma}}{2\pi i}\int\limits_{AB}f(z)\,e^{\sigma\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dz}{z-\xi}. \tag{9}$$

Формула (9) заведомо неустойчива, так как при ее получении не делается никаких предположений относительно функции $f(z)$, кроме регулярности. Поэтому она не может быть прямо использована в качестве эффективного метода решения задачи.

Рассмотрим разность $f(\xi) - f_n(\xi) = w_n(\xi)$:

$$w_n(\xi) = \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{AB} [f(z) - f_n(z)]\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{z-\xi} +$$

$$+ \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{AO} f(z)\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{\xi - z} + \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{OB} f(z)\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{\xi - z}. \qquad (10)$$

Легко видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\left| \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{AB} [f - f_n]\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{z-\xi} \right| \leqslant \frac{\alpha_n}{2\pi} L_{AB} \frac{1}{|\xi - \xi_3|} e^{\sigma_n \left[\mathrm{Re}\left(\frac{\xi_2-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right]},$$

где L_{AB} — длина кривой AB, ξ_3 — точка на кривой AB, ближайшая к точке ξ, ξ_2 — точка кривой AB, на которой достигает максимума действительная часть выражения $\left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$\left| \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{AO} f(z)\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{\xi - z} \right| \leqslant \frac{M}{2\pi} e^{-\sigma_n} \frac{1}{|\xi - \xi_0|} \frac{1}{\cos\alpha} |\xi_0 - \xi_A|,$$

где ξ_A — комплексное число, соответствующее точке A,

$$\left| \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{OB} f(z)\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{\xi - z} \right| \leqslant \frac{M}{2\pi} e^{-\sigma_n} \frac{1}{|\xi - \xi_0|} \frac{1}{\cos\alpha} |\xi_0 - \xi_B|,$$

где ξ_B — комплексное число, соответствующее точке B.

Следовательно, модуль оцениваемой разности удовлетворяет неравенству:

$$|w_n(\xi)| \leqslant \frac{M}{2\pi} e^{-\sigma_n} \frac{|\xi_0 - \xi_B| + |\xi_0 - \xi_A|}{|\xi - \xi_0| \cos\alpha} + \frac{\alpha_n}{2\pi} L_{AB} \cdot \frac{1}{|\xi - \xi_3|} \cdot e^{\sigma_n(\rho - 1)}, \qquad (11)$$

где

$$\rho = \mathrm{Re}\left(\frac{\xi_2 - \xi_0}{\xi - \xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Полагая в (11)

$$\sigma_n = \frac{1}{\rho} \ln \frac{M \cdot (|\xi_0 - \xi_B| + |\xi_0 - \xi_A|) \cdot |\xi - \xi_3|}{|\xi - \xi_0| \cdot \cos\alpha \cdot \alpha_n L_{AB}}, \qquad (12)$$

получим:

$$|w_n(\xi)| < \frac{1}{\pi} \cdot \left[M \frac{|\xi_0 - \xi_B| + |\xi_0 - \xi_A|}{|\xi - \xi_0| \cdot \cos\alpha} \right]^{1 - \frac{1}{\rho}} \cdot \left[L_{AB} \frac{\alpha_n}{|\xi - \xi_3|} \right]^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (13)$$

Сформулируем полученный результат.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, определенная в области D из леммы Карлемана и удовлетворяющая неравенству (1) леммы. Пусть, кроме того, $\varphi_n(z)$ — последовательность непрерывных функций, определенных на кривой AB и равномерно сходящихся к функции $f(z)$ на этой кривой так, что

$$|\varphi_n(z) - f(z)| \leqslant \alpha_n,$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда последовательность чисел

$$f_n(\xi) = \frac{e^{-\sigma_n}}{2\pi i} \int_{AB} \varphi_n(z)\, e^{\sigma_n \left(\frac{z-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{dz}{z-\xi}$$

сходится к значению функции $f(z)$ в точке ξ, причем скорость сходимости оценивается неравенством (13) (числа σ_n определяются из равенства (12)).

Итак, первый метод решения плоской задачи в постановке I заключается в следующем:

1) По известным на кривой S действительным функциям φ_n и ψ_n строим на S комплексные функции

$$f_n(z) = \varphi_n + i \int_{z_0}^{z} \psi_n\, ds$$

(интеграл берется по кривой S, z_0 — один из концов S).

2) По функциям $f_n(z)$, заданным на кривой S, строится по формуле (7) последовательность функций $f_n(\xi)$ в тех точках области D, из которых кривую S видно под конечным углом. Как показано выше, такая последовательность функций сходится к функции $f(\xi)$ со скоростью, оцениваемой неравенством (13).

3) Исходя из найденных в части D значений функций $f_n(z)$, получаем таким же образом значения функций $f_n(z)$ в большей части D, и т. д. Указанным способом можно определить последовательность функций $f_n(z)$ всюду внутри D.

§ 2. Легко видеть, что плоскую задачу в постановке I для односвязной области D можно свести при помощи конформных отображений и решения хорошо исследованной задачи Дирихле для уравнения Лапласа к следующей постановке IV.

Постановка IV. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, определенная в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$u(x, 0) = u(\pi, y) = u(0, y) = 0, \quad \|u\| \leqslant M. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, нам известна последовательность функций φ_n, определенных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и сходящихся к функции $\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0)$ так, что

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| \leqslant \alpha_n,$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Требуется, исходя из функций $\varphi_n(x)$, построить последовательность функций, сходящуюся к функции $u(x, y)$ возможно быстрее.

В настоящем параграфе задача будет рассматриваться именно в такой постановке. При этом под нормой функции u будет пониматься норма функции $u(x, y)$ как функции от x при фиксированном y в метрике L_2.

Очевидно, что функцию $u(x, y)$ можно в рассматриваемом случае аналитически продолжить на всю полосу $0 \leqslant y \leqslant 1$. Определенная таким образом во всей полосе функция $u(x, y)$ будет нечетной и периодической по x с периодом 2π.

Прежде чем приступить к изложению второго метода эффективного решения задачи, докажем теорему, характеризующую устойчивость постановки IV в классе ограниченных решений.

ТЕОРЕМА. *Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, определенная и регулярная в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$, удовлетворяющая соотношениям* (1), *периодическая по x с периодом 2π и нечетная. Пусть, кроме того, выполняются неравенства*:

$$\int_0^{\pi} u^2(x, 1)\, dx \leqslant M^2, \tag{2}$$

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(x)\, dx \leqslant m^2, \tag{3}$$

где $\varphi(x) = u_y(x, 0)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx \leqslant M^{2y} \cdot m^{2(1-y)} \cdot y^2. \tag{4}$$

Предварительно установим два вспомогательных предложения. Во-первых, пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — положительные и дважды дифференцируемые функции t. Тогда, если выполняются неравенства:

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln f_1(t) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad f_1'' \cdot f_1 - f_1'^2 \geqslant 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln f_2(t) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad f_2'' \cdot f_2 - f_2'^2 \geqslant 0,$$

то выполняется и неравенство

$$\frac{d^2}{dt^2} \{\ln [f_1(t) + f_2(t)]\} \geqslant 0$$

или

$$(f_1'' + f_2'')(f_1 + f_2) - (f_1' + f_2')^2 \geqslant 0.$$

Действительно,

$$(f_1'' + f_2'')(f_1 + f_2) - (f_1' + f_2')^2 = f_1'' f_1 - f_1'^2 + f_2'' f_2 - f_2'^2 + f_1'' f_2 + f_2'' f_1 -$$
$$- 2 f_1' f_2' \geqslant f_1'' f_2 + f_2'' f_1 - 2 f_1' f_2' \geqslant 2 [\sqrt{f_1'' f_{11}''} f_2 - f_1' f_2] \geqslant 0.$$

Легко видеть, что аналогичное свойство имеет место в случае любого числа слагаемых функций.

Во-вторых, функция

$$f(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 at}{t^2}$$

при любом a удовлетворяет неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) \geqslant 0.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) = -\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 at} + \frac{1}{t^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 at - a^2 t^2}{\operatorname{sh}^2 at t^2} \geqslant 0.$$

Приступим к доказательству теоремы. Разлагая функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье, получим:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Тогда, как нетрудно показать, функция $u(x, y)$ будет равна

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx \operatorname{sh} ky. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что

$$\int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 ky. \tag{6}$$

В силу установленных предложений и равенства (6), справедливо следующее неравенство:

$$\frac{d^2}{dy^2} \ln \left[\frac{1}{y^2} \int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx \right] \geqslant 0. \tag{7}$$

Из (3) следует, что в пределе при $y \to 0$ функция

$$I(y) = \frac{1}{y^2} \int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx$$

удовлетворяет неравенству:

$$I(0) \leqslant m^2. \tag{8}$$

Из (2) следует, что

$$I(1) \leqslant M^2. \tag{9}$$

Так как, согласно (7), функция $I(y)$ логарифмически выпукла, то, значит, из неравенств (8) и (9) следует неравенство:

$$I(y) \leqslant M^{2y} m^{2(1-y)},$$

или

$$\int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx \leqslant y^2 M^{2y} m^{2(1-y)},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема, так же как и лемма Карлемана, характеризует устойчивость плоской задачи Коши для уравнения Лапласа в классе ограниченных решений. Оценки, полученные в метрике L_2, существенно

сильнее, чем оценки в лемме Карлемана, так как в теореме требуется ограниченность только самой функции $u(x, y)$, а у Карлемана требуется ограниченность и сопряженной функции.

Теорему легко распространить на следующий частный случай гармонических функций в пространстве: гармоническая функция $u(x, y, z)$ определена в прямом цилиндре и равна нулю на образующих цилиндра. Из-за отсутствия конформных отображений в пространстве из наличия оценок в областях указанного вида не следует наличие аналогичных оценок в областях произвольного вида.

Теперь изложим второй метод эффективного решения плоской задачи. Итак, пусть гармоническая функция $u(x, y)$, определенная в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$, периодическая по x с периодом 2π и нечетная, удовлетворяет соотношениям (1) и неравенству (2). Пусть, кроме того, нам известна последовательность функций $\varphi_n(x)$, сходящаяся в среднем к функции $\varphi(x) = u_y(x, 0)$ так, что

$$\int_0^{\pi} [\varphi(x) - \varphi_n(x)]^2 \, dx \leqslant \alpha_n^2, \tag{10}$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, функции $\varphi_n(x)$ — нечетные периодические с периодом 2π и равны нулю при $x = k\pi$.

Требуется, исходя из функций $\varphi_n(x)$, построить последовательность функций, сходящуюся к функции $u(x, y)$ возможно быстрее.

Разлагая функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье, получим:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sin kx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Как было указано выше, функция $u(x, y)$ равна:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \operatorname{sh} ky \sin kx,$$

причем из неравенства (2) следует, что:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 k \leqslant M^2. \tag{11}$$

Предположим сначала, что числа $a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots$ удовлетворяют неравенству (11). Тогда обозначим:

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \frac{\operatorname{sh} ky}{k} \sin kx. \tag{12}$$

Оценим разность

$$w_n(x, y) = u(x, y) - u_n(x, y).$$

В силу (10), функции w_n удовлетворяют неравенству:

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial y} w_n(x, 0)\right]^2 dx \leqslant \alpha_n^2;$$

в силу же нашего предположения и соотношения (11), функции w_n удовлетворяют неравенству:

$$\int_0^\pi w_n^2(x, 1)\, dx \leqslant 4M^2.$$

Применяя к функциям w_n теорему, получим:

$$\int_0^\pi w_n^2(x, y)\, dx \leqslant y^2 (2M)^{2\nu} \cdot \alpha_n^{2(1-\nu)}, \tag{13}$$

т. е. последовательность функций $u_n(x, y)$ сходится в среднем по x при фиксированном y к функции $u(x, y)$. Скорость сходимости определяется неравенством (13).

Таким образом, если числа $a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots$ удовлетворяют неравенству (11), то за искомую последовательность можно принять последовательность функций $u_n(x, y)$, определенных равенством (12).

Пусть теперь числа a_{nk} не удовлетворяют неравенству (11). Обозначим координаты проекции точки $(a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$ бесконечномерного линейного пространства на многообразие Q этого пространства, определяемое неравенством (11), через $\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots$ (под проекцией понимается точка множества, ближайшая к проектируемой точке).

Легко видеть, что многообразие Q выпукло, т. е. отрезок, соединяющий две любые точки многообразия Q, целиком принадлежит многообразию.

Из выпуклости множества Q и из того, что точка $(a_1, \ldots, a_k, \ldots)$, в силу (11), принадлежит Q, а точка $(\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots)$ является проекцией точки $(a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$ на множество Q, следует справедливость неравенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \bar{a}_{nk})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{nk})^2$$

и, значит, в силу (10):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \bar{a}_{nk})^2 \leqslant \alpha_n^2. \tag{14}$$

По определению, числа $\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots$ удовлетворяют неравенству:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{nk}^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 k \leqslant M^2$$

и, следовательно, справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (a_k - \bar{a}_{nk})^2 \leqslant 4M^2. \tag{15}$$

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{nk}}{k} \operatorname{sh} ky \sin kx = \bar{u}_n(x, y).$$

Неравенство (15) означает, что

$$\int_0^{\pi} [u(x, 1) - \bar{u}_n(x, 1)]^2 \, dx \leqslant 4M^2.$$

Применяя к разности функций $\bar{w}_n = u(x, y) - \bar{u}(x, y)$ теорему, получим:

$$\int_0^{\pi} \bar{w}_n^2(x, y) \, dx \leqslant (2M)^{2y} \cdot \alpha_n^{2(1-y)} \cdot y^2, \tag{16}$$

т. е. последовательность функций $\bar{u}_n(x, y)$ сходится в среднем по x при любом фиксированном $0 \leqslant y < 1$ к функции $u(x, y)$.

Таким образом, если числа $a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots$ не удовлетворяют неравенству (11), то за искомую последовательность можно принять последовательность функций $\bar{u}_n(x, y)$.

Укажем метод определения чисел $\bar{a}_{nk}$ и, следовательно, функций $\bar{u}_n(x, y)$.

По определению, числа $\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots$ есть координаты проекции точки $(a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$ бесконечномерного линейного пространства на многообразие, определяемое неравенством:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 k \leqslant M^2.$$

Очевидно, что точка $(\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots)$ лежит на границе многообразия, т. е. справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{nk}^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 k = M^2. \tag{17}$$

Формула (17) определяет поверхность в бесконечномерном линейном пространстве. Из того, что точка $(\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots)$ есть проекция точки $(a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$ на поверхность, следует, что вектор $(a_{n1} - \bar{a}_{n1}, \ldots, a_{nk} - \bar{a}_{nk}, \ldots)$ должен быть коллинеарен нормали к этой поверхности, и, значит, должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{a_{n1} - \bar{a}_{n1}}{\bar{a}_{n1} \operatorname{sh}^2 1} = \ldots = \frac{a_{nk} - \bar{a}_{nk}}{\bar{a}_{nk} \operatorname{sh}^2 k} k^2 = \ldots. \tag{18}$$

Из геометрических соображений ясно, что существуют только две точки бесконечномерного пространства, координаты которых удовлетворяют соотношениям (18) и равенству (17). Одна из этих точек будет, очевидно, искомой проекцией, другая же точка будет точкой множества Q, наиболее удаленной от точки $(a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$.

Преобразуем равенство (17) к более удобному для определения чисел $\bar{a}_{n1}, \ldots, \bar{a}_{nk}, \ldots$ виду. Для этого введем обозначение:

$$z = \frac{a_{nk} - \bar{a}_{nk}}{a_{nk} \operatorname{sh}^2 k} \cdot k^2.$$

Выражая $\bar{a}_{nk}$ через числа a_{nk} и z, получим:

$$\bar{a}_{nk} = \frac{a_{nk}}{1 + z \dfrac{\operatorname{sh}^2 k}{k^2}}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим следующее уравнение для числа z:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}^2 \operatorname{sh}^2 k}{\left(1 + z \dfrac{\operatorname{sh}^2 k}{k^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{k^2} = M^2. \tag{20}$$

Из уравнения (20) число z можно определить методом последовательных приближений со сколь угодно большой степенью точности. Укажем такой метод. Возьмем некоторое число $z_1 > 0$ и рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}^2 \operatorname{sh}^2 k}{\left(1 + z_1 \dfrac{\operatorname{sh}^2 k}{k^2}\right)^2 \cdot k^2} = N_1^2.$$

В случае, если $N_1^2 > M^2$, положим

$$z_2 = 2 z_1.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}^2 \operatorname{sh}^2 k}{\left(1 + z_2 \dfrac{\operatorname{sh}^2 k}{k^2}\right)^2 \cdot k^2} = N_2$$

и сравним ее с числами M и N_1. В случае, если $N_1^2 < M^2 < N_2^2$ или $N_1^2 > M^2 > N_2^2$, положим

$$z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

и т. д. Продолжая указанный процесс, мы получим последовательность чисел $z_1, \ldots, z_m, \ldots$, которая будет стремиться к числу z — решению уравнения (20). Легко видеть, что при положительных $z_1, \ldots, z_m, \ldots$ и, следовательно, $z = \lim\limits_{m \to \infty} z_m$, числа $\bar{a}_{nk}$, определенные из соотношения (19), будут координатами искомой проекции.

Таким образом, второй метод эффективного решения плоской задачи заключается в следующем:

1) при помощи конформных отображений и решения задачи Дирихле сводим постановку I к постановке IV.

2) Определяем коэффициенты Фурье для функций $\varphi_n(x)$, т. е. числа $a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots$.

3) Методом последовательных приближений определяем число z.

4) По формулам (19) определяем числа $\bar{a}_{nk}$.

5) Строим последовательность функций:

$$\bar{u}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{nk}}{k} \operatorname{sh} ky \sin kx.$$

Как показано выше, последовательность функций $\overline{u}_n(x, y)$ сходится к функции $u(x, y)$ в среднем по x при фиксированном $y < 1$. Скорость сходимости оценивается неравенством (16).

Если числа a_{nk} удовлетворяют неравенству (11), то числа $\overline{a}_{nk}$ вычислять не нужно, и к функции $u(x, y)$ сходится последовательность функций

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{k} \operatorname{sh} ky \sin kx$$

с такой же скоростью сходимости.

Предложенный метод легко распространить на тот же частный случай гармонических функций в пространстве, на который распространяется теорема, если считать известными собственные функции и значения уравнения $\Delta u = \lambda u$ на дне цилиндра при краевом условии $u_\gamma = 0$ (γ — граница дна цилиндра).

Глава II. Пространственная задача

§ 3. Докажем теорему, характеризующую устойчивость пространственной задачи Коши для уравнения Лапласа.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\varphi(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная и положительная внутри ограниченной односвязной области S плоскости x, y и равная нулю на границе S. Обозначим через D область, ограниченную поверхностью*

$$z = -\varphi(x, y) \qquad (\Sigma)$$

и плоскостью x, y, через S_t — проекцию сечения области D плоскостью $z = t$ на плоскость x, y и через γ_t — границу S_t.

При этих условиях, если гармоническая функция $u(x, y, z)$, правильная в D и равная нулю на поверхности Σ, удовлетворяет неравенствам:

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{grad}^2 u(x, y, z)\, d\sigma \leqslant \varepsilon, \qquad (1)$$

$$\iint_{S} u^2(x, y, 0)\, dx\, dy \leqslant M, \qquad (2)$$

то при любом t, $0 \geqslant t \geqslant -\varphi_0 = -\max \varphi(x, y)$, имеет место неравенство:

$$\iint_{S_t} u^2(x, y, t)\, dx\, dy \leqslant cM^{\frac{\varphi_0 + t}{\varphi_0}} \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{\varphi_0}}.$$

Обозначим оцениваемый интеграл через $f(t)$:

$$f(t) = \iint_{S_t} u^2(x, y, t)\, dx\, dy.$$

Дифференцируя функцию $f(t)$, в силу условия $u|_{\gamma_t} = 0$, получим:

$$f'(t) = 2\iint_{S_t} uu_z\, dx\, dy, \quad f''(t) = 2\iint_{S_t} u_z^2 dx\, dy + 2\iint_{S_t} uu_{zz}\, dx\, dy.$$

Преобразуем второй интеграл в правой части последнего равенства:

$$\iint\limits_{S_t} uu_{zz}\,dx\,dy = -\iint\limits_{S_t} u\,(u_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy = \iint\limits_{S_t} (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy.$$

Далее, рассмотрим функции:

$$p(t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_t} u_z^2\,dx\,dy,$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_t} (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy.$$

Дифференцируя функции $p(t)$ и $q(t)$, получим:

$$p'(t) = \iint\limits_{S_t} u_z u_{zz}\,dx\,dy,$$

$$q'(t) = \iint\limits_{S_t} (u_x u_{xz}+u_y u_{yz})\,dx\,dy.$$

Преобразуем разность $p'(t) - q'(t)$:

$$p'(t)-q'(t) = \iint\limits_{S_t} u_z u_{zz}\,dx\,dy - \iint\limits_{S_t} (u_x u_{xz}+u_y u_{yz})\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_t} u_z\,(u_{zz}+u_{xx}+u_{yy})\,dxdy - \int\limits_{\gamma_t} u_x u_z dy + u_y u_z dx =$$

$$= -\int\limits_{\gamma_t} u_z\,(u_x dy + u_y dx). \tag{3}$$

Из (3) следует, что функция $q(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$q(t) \geqslant p(t) - 2\iint\limits_{S_t} (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,d\sigma \geqslant p(t) - 2\varepsilon$$

и, значит,

$$f''(t) \geqslant 4\iint\limits_{S_t} u_z^2\,dx\,dy - 2\varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $F(t)$:

$$F(t) = \ln[f(t)+2\varepsilon].$$

Преобразуем вторую производную функции $F(t)$:

$$F''(t) = \frac{f''(t)\,[f(t)+2\varepsilon] - f'^2(t)}{[f(t)+2\varepsilon]^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(4\iint u_z^2 dx\,dy - 2\varepsilon\right)\left(\iint u^2 dxdy + 2\varepsilon\right) - 4\left(\iint uu_z dx\,dy\right)^2}{[f(t)+2\varepsilon]^2} \geqslant$$

$$\geqslant 2\varepsilon\,\frac{4\iint u_z^2 dx\,dy - \iint u^2 dx\,dy - 2\varepsilon}{\left[\iint u^2 dx\,dy + 2\varepsilon\right]^2} \geqslant -1.$$

Таким образом, мы получили, что функция $F(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$F''(t)+1\geqslant 0.$$

Кроме того, из условий теоремы следует, что

$$F(-\varphi_0)\leqslant \ln 2\varepsilon,$$

$$F(0)\leqslant \ln 2M \quad \left(\varepsilon<\frac{M}{2}\right).$$

Следовательно, функция $F(t)$ не превосходит решения дифференциального уравнения

$$F''(t)+1=0, \tag{4}$$

удовлетворяющего условиям:

$$F(-\varphi_0)=\ln 2\varepsilon, \quad F(0)=\ln 2M. \tag{5}$$

Выпишем решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5):

$$F(t)=-\frac{1}{2}t^2+\left(-\frac{1}{2}\varphi_0^2+\ln 2M-\ln 2\varepsilon\right)\frac{t}{\varphi_0}+\ln 2M=$$

$$=\ln C+\frac{\varphi_0+t}{\varphi_0}\ln M-\frac{t}{\varphi_0}\ln\varepsilon$$

(C — постоянная, зависящая от функции $\varphi(x, y)$).

Значит, функция

$$f(t)=\iint\limits_{S_t} u^2dx\,dy$$

удовлетворяет неравенству:

$$f(t)\leqslant CM^{\frac{\varphi_0+t}{\varphi_0}}\varepsilon^{-\frac{t}{\varphi_0}},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 при помощи формулы Грина нетрудно получить оценки как для модуля самой функции u, так и для модуля градиента функции u.

Теорема 1 непосредственно характеризует устойчивость задачи Коши для уравнения Лапласа в классе ограниченных функций для областей указанного вида и когда данные Коши задаются на поверхности Σ (условие $u|_\Sigma=0$ не существенно).

Покажем, как с помощью теоремы 1 получить оценки, характеризующие устойчивость решения задачи в произвольной области. Итак, пусть D — произвольная односвязная область с гладкой границей S и S' — кусок поверхности S. Пусть, далее, гармоническая в D функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет неравенствам:

$$|u|<M \quad \text{всюду в } D,$$

$$u=0, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leqslant\varepsilon \quad \text{на поверхности } S'.$$

Теорема 1 дает возможность оценить как самое функцию u, так и ее градиент в области D_1, ограниченной поверхностью S_1 и какой-либо

плоскостью, пересекающей S_1. Для того чтобы оценить функцию u в любой точке P, из которой область D_1 видна под конечным углом, проведем прямой круговой цилиндр с осью, проходящей через P, и одно из оснований которого лежит внутри D_1. Оценить функцию u в любой точке D можно, последовательно расширяя области, в которых известна оценка для u.

Будем оценивать функцию $u(x, y, z)$ на оси цилиндра, исходя из следующих условий:

$$|u| \leqslant M \quad \text{во всем цилиндре,}$$
$$u = 0, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{на основании цилиндра.}$$

(Общий случай можно свести к случаю, когда $u(x, y, z) = 0$ на основании цилиндра, решением задачи Дирихле.)

Очевидно, что значение функции u на оси цилиндра, максимум функции u на границе цилиндра и максимум данных Коши на основании цилиндра не изменятся, если осереднить функцию u по всем окружностям с центрами на оси, плоскости которых параллельны основаниям цилиндра.

Таким образом, для оценки можно считать, что функция u обладает осевой симметрией.

Для удобства положим, что ось цилиндра совпадает с осью z.

Итак, пусть $u(r, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

удовлетворяющее неравенствам:

$$|u| \leqslant M \quad (r \leqslant R_0, \quad 0 \leqslant z \leqslant l),$$
$$u = 0, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \varepsilon \quad (z = 0).$$

Сначала оценим функцию u в прямоугольнике $0 \leqslant z \leqslant l$, $r_0 \leqslant r \leqslant R$ (функцию u при $r = 0$ нетрудно оценить через ее значения при $r = r_0$, используя формулу Грина).

Рассмотрим функцию

$$v(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} u(r, z).$$

Функция $v(r, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{r^2} v = 0. \tag{6}$$

Таким образом, оценка функции u сведена к оценке функции v, удовлетворяющей уравнению (6) и соответствующим неравенствам на границе. Сформулируем теорему, из которой нетрудно получить нужные нам оценки для функции v.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(x, y) u = 0, \tag{7}$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ *обращается в нуль при* $y = 0$ *и на боковых сторонах прямоугольника. Пусть, далее, функция* $\varphi(x, y)$ *непрерывна и не превосходит некоторой постоянной* φ_0 *в рассматриваемом прямоугольнике. Тогда если выполняются неравенства:*

$$\int_0^a u^2(x, b)\,dx \leqslant M,$$

$$\int_0^a u_y^2(x, 0)\,dx \leqslant \varepsilon,$$

то имеет место и неравенство:

$$\int_0^a u^2(x, y)\,dx \leqslant CM^{\frac{1-e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda b}}}\varepsilon^{\frac{e^{-\lambda y}-e^{-\lambda b}}{1-e^{-\lambda b}}},$$

где постоянные C, λ *зависят только от чисел* φ_0 *и* b.

Легко видеть, что задача Коши для уравнения (6) в прямоугольнике $0 \leqslant z \leqslant l$, $r_0 \leqslant r \leqslant R$ сводится к случаю, рассмотренному в теореме 2, при помощи конформных отображений.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Обозначим оцениваемый интеграл через $f(y)$:

$$f(y) = \int_0^a u^2(x, y)\,dx.$$

Дифференцируя функцию $f(y)$, получим:

$$f'(y) = 2\int_0^a uu_y dx,$$

$$f''(y) = 2\int_0^a u_y^2 dx + 2\int_0^a uu_{yy} dx.$$

Преобразуем второй интеграл правой части последнего равенства:

$$\int_0^a uu_{yy} dx = -\int_0^a uu_{xx} dx - \int_0^a u^2\varphi\,dx = \int_0^a u_x^2\,dx - \int_0^a u^2\varphi dx \geqslant \int u_x^2\,dx - \varphi_0 f(y).$$

Далее, рассмотрим функции:

$$p(y) = \frac{1}{2}\int_0^a u_y^2 dx,$$

$$q(y) = \frac{1}{2}\int_0^a u_x^2 dx.$$

Дифференцируя функции $p(y)$ и $q(y)$, получим:

$$p'(y) = \int_0^a u_y u_{yy}\,dx,$$

$$q'(y) = \int_0^a u_x u_{xy}\,dx.$$

Преобразуем разность $p'(y) - q'(y)$:

$$p'(y) - q'(y) = \int_0^a u_y u_{yy}\,dx - \int_0^a u_x u_{xy}dx = \int_0^a (u_y u_{yy} + u_y u_{xx})\,dx = \int_0^a u_y u\varphi\,dx.$$

Из равенства

$$f''(t) = 2\int_0^a u_y^2 dx + 2\int_0^a u_x^2\,dx - \int_0^a u^2\varphi\,dx$$

легко получить следующее неравенство:

$$\int_0^a u u_{y\gamma}\,dx \leqslant \lambda_1 f''(y) + \lambda_2 f'(y),$$

откуда следует:

$$q'(y) \geqslant p'(y) - \lambda_1 f''(y) - \lambda_2 f'(y). \tag{8}$$

Из неравенства (8) получим:

$$q(y) \geqslant p(y) - \lambda_1 f'(y) - \lambda_2 f(y) - \varepsilon.$$

Из полученных неравенств следует, что функция $f''(y)$ удовлетворяет неравенству:

$$f''(y) \geqslant 4\int_0^a u_y^2 dx - \lambda_1 f'(y) - \lambda_2 f(y) - \varepsilon,$$

где λ_1, λ_2 — некоторые постоянные.

Рассмотрим функцию $F(y) = \ln[f(y) + \varepsilon]$ и преобразуем ее вторую производную

$$F''(y) = \frac{f''(y)[f(y)+\varepsilon] - [f'(y)]^2}{[f(y)+\varepsilon]^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left[4\int u_y^2 dx - \lambda_1 f'(y) - \lambda_2 f(y) - \varepsilon\right][f(y)+\varepsilon] - \left(\int u u_y dx\right)^2}{[f(y)+\varepsilon]^2} \geqslant -\lambda_1 F'(y) - (\lambda_2 + 1).$$

Из условий теоремы следует, что функция $F(y)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$F(0) \leqslant \ln\varepsilon, \quad F(b) \leqslant \ln M.$$

Следовательно, функция $F(y)$ не превосходит решения уравнения:

$$F''(y) + \lambda_1 F'(y) + \lambda_2 + 1 = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющего условиям:

$$F(0) = \ln\varepsilon, \quad F(b) = \ln M. \tag{10}$$

Выписывая решения уравнения (9), удовлетворяющие условиям (10), получим:

$$F(y) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda_1 y}}{1 - e^{-\lambda_1 b}}\left(\ln\frac{M}{\varepsilon} + \frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1}\,b\right) + \frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1}\,y + \ln\varepsilon =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda_1 y}}{1 - e^{-\lambda_1 b}}\ln M + \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_1 b}}{1 - e^{-\lambda_1 b}}\ln\varepsilon + \ln C,$$

откуда следует:

$$f(y) \leqslant CM^{\frac{1-e^{-\lambda_1 y}}{1-e^{-\lambda_1 b}}} \varepsilon^{\frac{e^{-\lambda_1 y}-e^{-\lambda_1 b}}{1-e^{-\lambda_1 b}}},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Перейдем к изложению метода эффективного решения задачи. Из-за отсутствия аппарата аналитических функций и из-за отсутствия конформных отображений для пространственной задачи не годятся изложенные в главе I методы получения оценок Карлемана и методы эффективного решения. Однако и в пространстве при помощи решения задачи Дирихле можно близко свести общую постановку I к несколько более простой постановке V.

Пусть гармоническая функция u, определенная в ограниченной пространственной области D, удовлетворяет следующим соотношениям:

1) $\| u \| \leqslant M$,

2) $u = 0$ на некотором куске S границы D.

Пусть, кроме того, нам известна на поверхности S последовательность функций $\psi_n(x, y, z)$, сходящаяся к нормальной производной функции u на этой поверхности так, что

$$\left\| \varphi_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\| \leqslant \alpha_n,$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ (ν — нормаль к поверхности S).

Требуется, исходя только из функций φ_n, построить последовательность функций, определенных в D и сходящихся к функции u с гарантированной скоростью.

Именно в такой постановке мы и будем сейчас решать задачу. Под нормой мы будем понимать интеграл от квадрата функции или квадрата градиента функции по данному куску поверхности.

Метод, который сейчас будет предложен, относится к тому частному случаю, когда область D ограничена поверхностями:

$$z = -\varphi(x, y), \qquad (S_1)$$

$$z = \varphi(x, y), \qquad (S_2)$$

а функция $\varphi(x, y)$ определена в односвязной ограниченной области σ плоскости x, y, обращается в нуль на границе σ, положительна внутри σ и непрерывно дифференцируема в замкнутой области σ. φ_0 — максимум функции $\varphi(x, y)$.

Итак, пусть гармоническая функция $u(x, y, z)$, определенная в области D, ограниченной указанными выше поверхностями S_1 и S_2, удовлетворяет соотношениям:

$$\iint_{S_2} u^2(x, y, z)\, d\sigma_2 \leqslant M^2, \qquad (11)$$

$$\iint_{S_1} u^2(x, y, z)\, d\sigma_1 = 0. \qquad (12)$$

Пусть, кроме того, на поверхности S_1 известна последовательность функций $f_n(x, y, z)$, сходящаяся в среднем к нормальной производной

функции u на этой поверхности так, что

$$\iint\limits_{S_1}\left[\frac{\partial}{\partial n_1}u(x,\ y,\ z)-f_n(x,\ y,\ z)\right]^2 d\sigma_1\leqslant\alpha_n^2, \tag{13}$$

где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Требуется, исходя из функций $f_n(x,\ y,\ z)$, построить последовательность функций, сходящуюся к функции $u(x,\ y,\ z)$ внутри D с гарантированной скоростью.

Предварительно введем некоторые определения. Пусть $f(x,\ y,\ z)$ — функция, определенная на поверхности S_2. Обозначим через $F(x,\ y,\ z)$ гармоническую функцию, определенную в области D, равную $f(x,\ y,\ z)$ на поверхности S_2 и равную нулю на поверхности S_1. Обозначим нормальную производную функции $F(x,\ y,\ z)$ на поверхности S_1 через $\widetilde{f}(x,\ y,\ z)$ (нормаль к S_1) и функцию $\widetilde{f}(x,\ y,\ -z)$ — через $\overline{f}(x,\ y,\ z)$. Очевидно, что функция $\overline{f}(x,\ y,\ z)$ определена на поверхности S_2 и однозначно определяется заданием функции $f(x,\ y,\ z)$.

Обозначим через A оператор, переводящий указанным выше образом функцию $f(x,\ y,\ z)$, заданную на S_2, в функцию $\overline{f}(x,\ y,\ z)$, заданную на S_2 так, что $\overline{f}=Af$.

Установим некоторые свойства оператора A:

1) Оператор A — вполне непрерывный, т. е. переводит всякое ограниченное множество функций в компактное. Это свойство легко получить из формулы Грина.

2) Оператор A — самосопряженный. Действительно, рассмотрим скалярное произведение

$$(Af,\ f)=\iint\limits_{S_2}Af(x,\ y,\ z)\cdot f(x,\ y,\ z)\,d\sigma_2.$$

По формуле Грина, функция $F(x,\ y,\ z)$ равна:

$$F(x,\ y,\ z)=\iint\limits_{S_2}\frac{\partial}{\partial n_2}G(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\sigma_2$$

и, следовательно,

$$(Af,\ f)=\iint\limits_{S_2}\frac{\partial}{\partial n_1}\iint\limits_{S}G(x,\ y,\ -z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\sigma_{2\xi}f(x,\ y,\ z)\,d\sigma_{2x}=$$

$$=\iint\limits_{S_2}\iint\limits_{S_2}\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}G(x,\ y,\ -z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)f(\xi,\ \eta,\ \zeta)f(x,\ y,\ z)\,d\sigma_{2\xi}d\sigma_{2x}$$

($d\sigma_{2x}$ — элемент площади на поверхности S_2 в переменных $x,\ y,\ z$ и $d\sigma_2$ — элемент площади в переменных $\xi,\ \eta,\ \zeta$).

Но в силу симметрии области D относительно плоскости $x,\ y$ имеем:

$$G(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)=G(x,\ y,\ -z,\ \xi,\ \eta,\ -\zeta)$$

и, значит:

$$(Af,\ f)=\iint\limits_{S_2}\iint\limits_{S_2}\frac{\partial^2}{\partial n_2\partial n_1}G(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ -\zeta)f(x,\ y,\ z)f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\sigma_{2x}\,d\sigma_{2\xi}=$$

$$=(f;\ Af),$$

что и требовалось доказать.

3) Оператор A имеет только положительные собственные значения. Это свойство нетрудно вывести из геометрических соображений, предположив противное.

Теперь сформулируем постановку V основной задачи, используя определение оператора A.

Постановка V. Пусть f — функция, определенная на поверхности S_2 и равная $f = A\psi$, причем

$$\| \psi \| \leqslant M. \tag{14}$$

Кроме того, пусть на S_2 нам известна последовательность функций f_n, сходящаяся к функции f так, что

$$\| f - f_n \| \leqslant \alpha_n, \tag{15}$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Требуется, исходя из функций f_n, построить последовательность функций, сходящуюся внутри D к функции $u(x, y, z)$ [$u(x, y, z)$ — гармоническая функция, равная нулю на S_1 и равная f на S_2].

Рассмотрим оператор $A + \varepsilon_n E$ ($\varepsilon_n > 0$). Из положительности операторов A следует, что оператор $A + \varepsilon_n E$ имеет обратный, причем

$$\| (A + \varepsilon_n E)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n}. \tag{16}$$

Пусть

$$(A + \varepsilon_n E)^{-1} f_n = \psi_n.$$

Обозначим через $u_n(x, y, z)$ гармоническую функцию, равную нулю на поверхности S_1 и равную ψ_n на поверхности S_2. Покажем, что последовательность функций $u_n(x, y, z)$ сходится к функции $u(x, y, z)$ при $z < -\frac{\varphi_0}{2}$.

Для удобства рассуждений предположим дополнительно, что для функций f_n существуют функции $A^{-1}f_n$, т. е. оператор, обратный к A, определен для функций f_n.

Это предположение не существенно, так как очевидно, что оператор A^{-1} определен на множестве функций, всюду плотном в L_2.

Из неравенства (16) и из ограниченности оператора A следует, что норма функции ψ_n (под нормой понимается интеграл от квадрата функции по поверхности S_2) удовлетворяет неравенству:

$$\| \psi_n \| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n} C_1 M,$$

где $C_1 = \| A \|$ — постоянная, зависящая от области D.

Следовательно, в силу (14):

$$\| \psi - \psi_n \| \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon_n} C_1 + 1 \right) M. \tag{17}$$

Оценим разность нормальных производных на S_1 функций $u(x, y, z)$ и $u_n(x, y, z)$ или разность

$$f - A(A + \varepsilon_n E)^{-1} f_n.$$

Преобразуем оцениваемую разность:

$$f - A(A+\varepsilon_n E)^{-1} f_n = A[A^{-1}f + (A+\varepsilon_n)^{-1} f_n] =$$
$$= A(A+\varepsilon_n E)^{-1}[(A+\varepsilon_n E)A^{-1}f - f_n] =$$
$$= A(A+\varepsilon_n E)^{-1}[f - f_n + \varepsilon_n A^{-1} f] =$$
$$= A(A+\varepsilon_n E)^{-1}[f - f_n + \varepsilon_n \psi] = (E+\varepsilon_n A^{-1})^{-1}(f - f_n + \varepsilon_n \psi).$$

Из того, что оператор A — положительный и вполне непрерывный следует, что норма оператора $(E+\varepsilon_n A^{-1})^{-1}$ не превосходит единицы. Значит, норма оцениваемой разности удовлетворяет неравенству:

$$\| f - A(A+\varepsilon_n E)^{-1} f_n \| \leqslant \| f - f_n + \varepsilon_n \psi \| \leqslant \alpha_n + \varepsilon_n M. \tag{18}$$

Таким образом, мы показали, что определенная в D гармоническая функция $w_n = u - u_n$ удовлетворяет неравенствам:

$$\iint\limits_{S_2} w_n^2 \, d\sigma_2 \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon_n} C_1 + 1\right) M, \tag{19}$$

$$\iint\limits_{S_1} \left(\frac{\partial}{\partial n_1} w_n\right)^2 d\sigma_1 \leqslant \alpha_n + \varepsilon_n M. \tag{20}$$

Из неравенства (19) следует неравенство:

$$\iint\limits_{\sigma} w_n^2 \, dx\, dy \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon_n} C_1 + 1\right) M. \tag{21}$$

Значит, по теореме 1,

$$\iint\limits_{\sigma_t} w_n^2(x,\ y,\ z)\, dx\, dy \leqslant C_2 \left(\frac{M}{\varepsilon_n}\right)^{\frac{\varphi_0 + z}{\varphi_0}} (\alpha_n + \varepsilon_n M)^{-\frac{z}{\varphi_0}}.$$

Полагая $\varepsilon_n = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{M}$, получим:

$$\iint\limits_{\sigma_t} w_n^2(x,\ y,\ z)\, dx\, dy \leqslant C_3 M^{2\frac{\varphi_0 + z}{\varphi_0}} \alpha_n^{-\frac{\varphi_0 + 2z}{2\varphi_0}}, \tag{22}$$

где C_3 — постоянная, зависящая только от области D.

Следовательно, последовательность функций u_n сходится к функции u при $z < -\dfrac{\varphi_0}{2}$ со скоростью, оцениваемой неравенством (22).

Из неравенства (22) нетрудно получить оценки и для модуля функции $w_n(x,\ y,\ z)$.

Поступило
3. I. 1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Carleman T., Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926.
[2] Pucci C., Sui problema di Cauchy non «ben posti», Atti Accad. Naz. d. Lincei, 18, fas. 5 (1955), 473—477.
[3] Лаврентьев М. М., О задаче Коши для уравнения Лапласа, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 2 (1955), 205—206.
[4] Лаврентьев М. М., К вопросу об обратной задаче теории потенциала, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 3 (1956), 389—390.
[5] Ландис Е. М., О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 107, № 5 (1956), 640—643.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 843—852

О. С. ПАРАСЮК

УМНОЖЕНИЕ ПРИЧИННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НЕСОВПАДАЮЩИХ АРГУМЕНТАХ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Боголюбовым**)

В работе построена теория умножения причинных функций квантовой теории поля при несовпадающих аргументах. Основным вспомогательным средством при этом является теория обобщенных функций

В настоящей работе, излагающей основные результаты работы автора (1), дано определение произведения причинных функций при несовпадающих аргументах. По своему содержанию работа примыкает к работе (2), в которой было дано строгое математическое обоснование вычитательного формализма Н. Н. Боголюбова, однако некоторые детали были пропущены. Так же, как в работе (2), мы пользуемся методами теории обобщенных функций С. Л. Соболева (3) и Л. Шварца (4).

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 определяются причинные функции и излагается способ их регуляризации. § 2 содержит построение произведения причинных функций при несовпадающих аргументах.

Заметим, что всюду в дальнейшем аргументы функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки четырехмерного пространства времени, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — четырехмерные векторы импульса,

$$kx = k^0x^0 - k^1x^1 - k^2x^2 - k^3x^3,$$

$\delta(x)$ — символ четырехмерной функции Дирака,

$$dx = dx^0dx^1dx^2dx^3, \quad dk = dk^0dk^1dk^2dk^3.$$

§ 1. Причинные функции и их регуляризация

Обозначим через $C(q, r, n)$ пространство функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающих частными производными до порядка q и таких, что все произведения

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}}$$

$$(s = 0,1, \ldots, r, \quad p = 0,1, \ldots, q, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

ограничены.

Рассмотрим последовательность $K_M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функций таких, что существуют интегралы

$$I_M(F) = \int K_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) F(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

и допустим, что последовательность I_M функционалов сходится слабо к пределу $I(F)$. В таком случае условимся писать

$$I(F) = \int K(x_1, x_2, \ldots, x_n) F(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

а функцию $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть обобщенной функцией, интегрируемой на пространстве $C(q, r, n)$.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие обобщенные функции, которые интегрируемы на $C(q, r, n)$ при некоторых произвольных, но конечных q, r.

Легко видеть, что класс так введенных обобщенных функций есть подкласс класса обобщенных функций Шварца, определенных как функционалы на пространстве S-функций, бесконечно дифференцируемых и убывающих быстрее любого полинома на бесконечности. Поэтому на наши функции распространяются основные факты теории Соболева—Шварца, причем, как легко показать, производная или преобразование Фурье функции $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, интегрируемой на $C(q, r, n)$, будет опять функцией, интегрируемой на некотором $C(q', r' n)$, где q', r' — некоторые целые числа, вообще говоря, отличные от q, r.

Перейдем к понятию причинных функций.

Причинные функции являются функциями Грина для волновых уравнений полей. Простейшая из них $D^c(x)$ может быть строго определена соотношением

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} \tilde{D}^c(k)\, dk, \tag{1.1}$$

где

$$\tilde{D}^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

в смысле слабой сходимости.

Наряду с функциями $D^c(x)$ будем рассматривать и более общие:

$$\Delta^c(x) = P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) D^c(x),$$

где P — лоренцинвариантный полином.

Основным методом дальнейшего исследования будет новая запись причинной функции, называемая α-представлением [см. (5)].

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha,$$

мы можем написать:

$$\tilde{D}^c(k) = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha, \tag{1.2}$$

а также

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} \tilde{D}^c(k)\, dk = \frac{1}{2^4\pi^2} \int e^{i\alpha(i\varepsilon - m^2)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha} i} \frac{d\alpha}{\alpha^2}. \tag{1.3}$$

Отметим, что в формуле (1.3) и всюду в дальнейшем интегралы

$$\int e^{i(ap^2+bp)}\,dp = -i\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-i\frac{b^2}{4a}}, \quad a>0,$$

$$\int e^{i(-ap^2+bp)}\,dp = i\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{i\frac{b^2}{4a}}, \quad a>0,$$

вычисляются как пределы

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int e^{i(ap^2+bp)-\eta((p^0)^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2)}\,dp,$$

что вполне законно с точки зрения обобщенных функций.

Запись причинной функции в виде (1.2) и (1.3) и будем называть α-представлением. Интеграла (1.3) фактически не существует и запись (1.3) следует считать формальной. Она является, однако, полезной, так как наглядно вскрывает характер тех особенностей, которыми обладает функция $D^c(x)$. Эти особенности в основном происходят от полюса при $\alpha = 0$. Чтобы их уничтожить, введем в формулу (1.3) множитель $I(\alpha)$, имеющий при $\alpha = 0$ нуль достаточно высокого порядка. В качестве $I(\alpha)$ лучше всего взять функцию

$$I(\alpha) = 1 + \sum c_j e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)}, \tag{1.4}$$

где числа c_j связаны с M_i соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \sum c_j &= 0,\\ m^2 + \sum c_j M_j^2 &= 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ m^{2(l-1)} + \sum c_j M^{2(l-1)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

обеспечивающими наличие в $I(\alpha)$ нулей достаточно высокого порядка.

Полученную таким способом функцию обозначим через $\operatorname{reg} D^c(x)$, соответственно $\operatorname{reg}\Delta^c(x)$.

Легко видеть, что

$$\operatorname{reg}\Delta^c(x) = \Delta^c(x) + \sum c_j \Delta^c_{M_j}(x) \tag{1.6}$$

и, следовательно, $\operatorname{reg}\Delta^c(x)$ является регулярной лоренцинвариантной функцией, количество производных которой определяется числом нулей функции $I(\alpha)$.

Имеет место [см. (6)]

ТЕОРЕМА 1. *Вспомогательные массы могут быть выбраны таким способом, что при некотором определенном способе одновременного стремления их величин к бесконечности функция* $\operatorname{reg}\Delta^c(x)$ *сходится слабо к* $\Delta^c(x)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторые фиксированные различные массы μ_j. В силу того, что детерминант

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_l^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_1^{2(l-1)} & \cdots & & \mu_l^{2(l-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

система уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{1\leqslant j\leqslant l} a_j^{(\nu)} = \delta_{0\nu},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant l} a_j^{(\nu)}\mu_j^{2(l-1)} = \delta_{l-1,\nu}\\ (\nu = 0,1,\ldots,l-1)\end{gathered} \tag{1.7}$$

будет разрешимой. Положим $M_j = \mu_j M$. Тогда из системы (1.5)—(1.7) легко получаем:

$$c_j = -\sum_{0\leqslant\nu\leqslant l-1} a_j^{(\nu)}\left(\frac{m}{M}\right)^{2\nu}.$$

Итак, при $M\to\infty$ $|c_j|\leqslant \text{const}$.

Оценим разность:

$$\int \operatorname{reg}\Delta^c(x)F(x)\,dx - \int \Delta^c(x)F(x)\,dx = \sum_{1\leqslant j\leqslant l} c_j \int \Delta^c_{M_j}(x)F(x)\,dx,$$

где $F(x)$ — любая функция класса $C(q, r, 1)$ при достаточно больших q, r. Так как числа c_j ограничены, то необходимо только показать, что

$$\int F(x)\,\Delta^c_{M_j}(x)\,dx \to 0$$

при $M\to\infty$. Последнее обстоятельство становится очевидным после перехода к импульсному представлению, на основании равенства Парсеваля.

Отметим, что указанная теорема отнюдь не является следствием общей регуляризационной теоремы Шварца, ибо функции $\operatorname{reg}\Delta^c_M(x)$ обладают дополнительным свойством лоренцинвариантности.

§ 2. Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах

Рассмотрим в четырехмерном пространстве времени связную диаграмму G с узлами $x_r\,(r = 1, 2, \ldots, n)$ и направленными линиями l, соединяющими произвольным образом узлы x_r между собой. Каждой линии l, ведущей от x_r к x_s, сопоставим причинную функцию $\operatorname{reg}\Delta^c_l(x_r - x_s)$ и образуем произведение

$$\prod_l \operatorname{reg}\Delta^c_l(x_r - x_s). \tag{2.1}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Выражение*

$$\int \prod_l \operatorname{reg}\Delta^c_l(x_r - x_s)\,F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \tag{2.2}$$

при снятии регуляризации (т. е. устремлении масс M_j указанным выше способом к бесконечности) стремится к пределу для всех функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in D(q, r, n)\subset C(q, r, n)$, аннулирующихся при совпадении аргументов.

Отметим, что сформулированная теорема решает основную задачу настоящей работы, так как определяет произведение $\Pi\Delta_l^c(x_r - x_s)$ при несовпадающих аргументах.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $\operatorname{reg}\Delta_l^c(x)$ *представлена в виде суммы двух функций:*

$$\operatorname{reg}\Delta_l^c(x) = \operatorname{reg}\Delta_l^{c1}(x) + \operatorname{reg}\Delta_l^{c2}(x), \tag{2.3}$$

где

$$\operatorname{reg}\Delta_l^{c1}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int\left\{P(k)\int_0^1 I(\alpha)\, e^{i\alpha(k^2-m_l^2+i\varepsilon)}\, d\alpha\, e^{ikx}\right\} dk, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{reg}\Delta_l^{c2}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int\left\{P(k)\int_1^\infty I(\alpha)\, e^{i\alpha(k^2-m_l^2+i\varepsilon)} d\alpha\, e^{ikx}\right\} dk. \tag{2.5}$$

Если выражения

$$\int\left\{\prod_{l\subset L'}\operatorname{reg}\Delta_l^{c1}(x_r - x_s)\right\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где L' *— любое подмножество множества* L *всех линий диаграммы* G $(F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— те же функции, что и в теореме* 2), *стремятся к пределу при* $\varepsilon \to 0$, $M \to \infty$, *то выражение* (2.2) *будет обладать тем же свойством.*

Доказательство. Отметим сначала, что функция

$$\operatorname{reg}\Delta_l^{c2}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int\left\{P(k)\int_1^\infty I(\alpha)\, e^{i\alpha(k^2-m_l^2+i\varepsilon)}\, d\alpha e^{ikx}\right\} dk =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int_1^\infty I(\alpha)\left\{\int P(k)\, e^{i\alpha(k^2-m_l^2+i\varepsilon)}\, e^{ikx} dk\right\} d\alpha =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int_1^\infty I(\alpha)\left\{P(-i\nabla q)\int e^{i\alpha(k^2-m_l^2+i\varepsilon)}\, e^{ikx+ikq}\, dk\right\}\Big|_{q=0} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2^4\pi^2}\int_1^\infty I(\alpha)\, e^{-i\alpha(m_l^2-i\varepsilon)}\, P(-i\nabla q) e^{-\frac{(x+q)}{4^\alpha} i}\, \frac{d\alpha}{\alpha^2}\Big|_{q=0}, \tag{2.6}$$

аналитическая и интегрируемая при любом M и ε, сходится в обычном смысле к функции

$$\Delta_l^{c2}(x) = \frac{1}{2^4\pi^2}\int_1^\infty e^{-i\alpha m_l^2}\, P(-i\nabla q) e^{-\frac{(x+q)}{4^\alpha} i}\, \frac{d\alpha}{\alpha^2}\Big|_{q=0},$$

обладающей теми же свойствами.

Очевидно, что эти свойства сохраняются и для функции

$$\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^{c2}(x_r - x_s).$$

Теперь имеем:

$$\int\Big\{\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^c(x-x_s)\Big\}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$=\int\Big\{\sum_{L'+L''=L}\prod_{l\subset L'}\operatorname{reg}\Delta_l^{c_1}(x_r-x_s)\prod_{l\subset L''}\operatorname{reg}\Delta_l^{c_2}(x_r-x_s)\Big\}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx.$$

В силу замечания, сделанного выше, произведения

$$\prod_{l\subset L''}\operatorname{reg}\Delta_l^{c_2}(x_r-x_s)$$

можно включить в $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. можно положить:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^{c_2}(x_r-x_s)\,F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

причем, как легко проверить, функция $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также будет принадлежать классу $D(q, r, n)\subset C(q, r, n)$.

Теперь видно, что из существования пределов для выражений

$$\int\prod_{l\subset L'}\operatorname{reg}\Delta_l^{c_1}(x_r-x_s)\,F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

будет вытекать существование предела для выражения (2.2).

Прежде чем перейти к формулировке следующей леммы, заметим, что, согласно результатам работы [1], импульсный образ $I_M(\ldots k\ldots)$ произведения $\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^c(x_r-x_s)$ для связной диаграммы может быть записан в виде:

$$I_M(k_1, k_2, \ldots, k_n)=$$

$$=\delta\Big(\sum_{j=1}^{n}k_j\Big)\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\ldots\int_0^\infty d\alpha_L\prod_l I(\alpha_l)\,e^{-i\sum\limits_l\alpha_l m_l^2-\varepsilon\sum\limits_l\alpha_l}\,f(\ldots k\ldots\alpha\ldots),$$

где

$$f(\ldots k\ldots\alpha\ldots)=F(\ldots k\ldots\alpha\ldots)\,e^{i\sum A_{ab}(\alpha)k_ak_b},$$

функция $F(\ldots k\ldots\alpha\ldots)$ — полином по $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и рациональная функция по α_l с полюсами при $\alpha_l=0$, $\sum A_{ab}x_ax_b$ — положительно определенная квадратичная форма, $A_{ab}(\alpha)$ — однородные рациональные функции первой степени по α_l.

Выражение $I_M(\ldots k\ldots)$ является регулярной функцией, благодаря наличию регуляризирующих множителей $I(\alpha_l)$, обращающихся в нуль при $\alpha_l=0$.

Теперь может быть уже сформулирована следующая

ЛЕММА 2. *Пусть* ϑ_k^r *— символ* r*-кратного дифференцирования по импульсам типа*

$$\frac{\partial}{\partial k_r},\quad \frac{\partial}{\partial k_r}\pm\frac{\partial}{\partial k_s}.$$

Рассмотрим связную диаграмму и положим

$$I^1_M(\ldots k\ldots)=$$

$$=\delta\Big(\sum k\Big)\int_0^1 d\alpha_1\int_0^1 d\alpha_2\ldots\int_0^1 d\alpha_L e^{-i\sum_l \alpha_l m_l^2-\varepsilon\sum_l \alpha_l}\prod_l I(\alpha_l) f(\ldots k\ldots\alpha\ldots)\equiv$$

$$\equiv\delta\Big(\sum k\Big) Л_M(\ldots k\ldots). \tag{2.7}$$

Тогда при достаточно большом r выражение

$$\int \vartheta_k^r Л_M(\ldots k\ldots)\,\Phi(\ldots k\ldots)\,dk_1 dk_2\ldots dk_n, \tag{2.8}$$

где $\Phi(k)$ — любая функция из некоторого класса $C(q, r, n)$, стремится при $\varepsilon\to 0$, $M\to\infty$ к определенному пределу.

Доказательство. Совершенно ясно, что предел при $\varepsilon\to 0$ существует. Необходимо только доказать существование предела при $M\to\infty$. В этом случае можно считать, что $I(\alpha_l)\to 1$, и интеграл (2.7) может расходиться из-за полюсов при $\alpha_l=0$. Если мы покажем, что операция ϑ_k^r устраняет полюсы $\alpha_l=0$, то предел при $M\to\infty$ будет существовать даже в обычном смысле. Для доказательства последнего утверждения применим метод математической индукции по числу линий и узлов диаграммы G. С этой целью изучим, как меняется $f(\ldots k\ldots\alpha\ldots)$ от добавления к диаграмме одной новой линии, соединяющей два узла, либо одного нового узла, соединенного одной линией с остальной частью диаграммы.

Не нарушая общности, мы можем предположить, что новая линия соединяет узел 1 с узлом 2. Функцию распространения новой линии обозначим через

$$\operatorname{reg}\Delta^{c1}(x_1-x_2)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int_0^1 I(\alpha)\Big\{\int Z(p)\,e^{i\alpha(p^2-m_l^2+i\varepsilon)}e^{ipx}\,dp\Big\}\,d\alpha.$$

Тогда в первом случае будем иметь:

$$\operatorname{reg}\Delta^{c1}(x_1-x_2)\prod_l \operatorname{reg}\Delta_l^{c1}(x_r-x_s)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{4n+4}}\int \operatorname{reg}\Delta^{c1}(p)\,e^{ip(x_1-x_2)}\delta\Big(\sum k\Big)Л_M(\ldots k\ldots)e^{i\sum k_r x_n}\,dp\,dk_1\,dk_2\ldots dk_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{4n+4}}\int e^{i\sum k_r x_r}\delta\Big(\sum k\Big)\int Л_M(k_1-p,\ k_2+p,\ldots)\,\Delta^c(p)\,dp,$$

т. е.

$$f^*(k_1, k_2,\ldots, k_n,\alpha)=\int Z(p)\,e^{i\alpha p^2} f(k_1-p,\ k_2+p,\ldots k_n\ldots\alpha_l\ldots)\,dp,$$

где звездочка означает f, подсчитанное с учетом добавленной линии.

В случае добавления одного узла получаем аналогично:

$$f^*(k_0, k_1,\ldots, k_n,\alpha)=Z(k_0)\,e^{i\alpha k_0^2} f(k_1-k_0,\ k_2\ldots k_n,\alpha\ldots),$$

где k_0 — импульс, соответствующий новому добавленному узлу x_0, $Z(k_0)$ — полином функции распространения добавленной линии.

Покажем, что операция ϑ_k^r, примененная к выражению $f(\ldots k \ldots \alpha \ldots)$, может сделать в нем степень по каждому α_l как угодно высокой.

Для случая диаграммы из двух узлов и одной линии этот факт проверяется непосредственно.

Допустим теперь, что утверждение верно для связной диаграммы с L линиями и N узлами, т. е. что выражение $\vartheta_k^r f(\ldots k \ldots \alpha \ldots)$, подсчитанное для данной диаграммы, имеет по каждому α_l достаточно высокую степень. Добавим к диаграмме одну линию и рассмотрим

$$f^*(k_1, k_2, \ldots, k_N, \alpha) = \int Z(p)\, e^{i\alpha p^2} f(k_1 - p,\ k_2 + p, \ldots, k_n \ldots \alpha \ldots)\, dp.$$

Подействуем теперь оператором ϑ_k^{n+l} на $f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots, \alpha, \ldots)$, где n — число дифференцирований по k, l — число дифференцирований типа

$$\frac{\partial}{\partial k_2} - \frac{\partial}{\partial k_1}.$$

Получаем:

$$\vartheta_k^{n+l} f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha) = \int Z(p)\, e^{i\alpha p^2} \vartheta_k^{n+l} f(k_1 - p,\ k_2 + p, \ldots, \alpha \ldots)\, dp =$$

$$= \int \vartheta_p^l \{Z(p)\, e^{i\alpha p^2}\}\, \vartheta_k^n f(k_1 - p,\ k_2 + p, \ldots, k_n, \alpha \ldots)\, dp.$$

По условию, степень по каждому α_l в выражениях

$$\vartheta_p^l \{Z(p)\, e^{i\alpha p^2}\}, \quad \vartheta_k^n f(k_1 - p,\ k_2 + p, \ldots, k_n, \ldots, \alpha \ldots)$$

будет достаточно высокой при достаточно больших l, n. Покажем, что это свойство сохраняется и после интегрирования по p, если l, n будут достаточно большими числами.

Ясно, что можно положить:

$$\vartheta_p^l \{Z(p)\, e^{i\alpha p^2}\} = Z(-i\nabla q, \alpha)\, e^{i\alpha p^2 + ipq}\big|_{q=0},$$

$$\vartheta_k^n f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha) = Z_1(\ldots - i\nabla q_a \ldots \alpha \ldots)\, e^{i\sum A_{ab} k_a k_b + i\sum k_a q_a}\big|_{q_a=0}.$$

Положив

$$\begin{aligned} C_a &= -1, \quad a = 1, \\ C_a &= +1, \quad a = 2, \\ C_a &= 0, \quad a \neq 1, 2, \end{aligned}$$

будем иметь:

$$\vartheta_k^{n+l} f^*(k_1, k_2, \ldots, \alpha \ldots) = Z(-i\nabla q, \alpha)\, Z_1(\ldots - i\nabla q_a \ldots \alpha) \cdot$$

$$\cdot \int e^{i\alpha p^2 + ipq} e^{i\sum A_{ab}(k_a + C_a p)(k_b + C_b p) + i\sum\limits_a \{(k_a + C_a p) q_a\}}\, dp\Big|_{\substack{q=0 \\ q_a=0}} =$$

$$= Z(-i\nabla q, \alpha)\, Z_1(\ldots - i\nabla q_a \ldots)\, \frac{\pi^2}{i}\, \frac{e^{i\sum A_{ab} k_a k_b + i\sum k_a q_a + kq}}{(\sum A_{ab} C_a C_b + \alpha)^2} \cdot$$

$$\cdot \exp i \left\{ \frac{-(2\sum A_{ab} C_a k_b + \sum C_a q_a + q)^2}{4(\sum A_{ab} C_a C_b + \alpha)} \right\}_{q_a = q = 0}.$$

При выполнении дифференцирования по q_a, q полиномы Z, Z_1 умножатся на выражения типа

$$\frac{\sum A_{ab}k_aC_b}{\sum A_{ab}C_aC_b+\alpha}.$$

Так как, по предположению, степень по каждому α в Z и Z_1 достаточно высокая, то это свойство не будет нарушено после выполнения дифференцирований. Этим лемма 2 доказана.

В случае, когда к диаграмме прибавляется один узел, предложение очевидно.

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства теоремы 2. С этой целью рассмотрим произвольную функцию из некоторого класса $D(q, r, n) \subset C(q, r, n)$. Совершенно ясно, что такая функция будет вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_l (x_r - x_s)^{n_l}\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(q', r', n)$, q', r' — некоторые целые числа.

Легко проверить, что импульсный образ функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет вида

$$\widetilde{F}(\ldots k \ldots) = \vartheta_k^r \widetilde{\Phi}(\ldots k \ldots),$$

где $\widetilde{\Phi}(\ldots k \ldots)$ — импульсный образ функции $\Phi(\ldots x \ldots)$.

В силу равенства Парсеваля, мы можем написать:

$$\int\Big\{\prod_{l\subset L} \operatorname{reg}\Delta_l^{c_1}(x_r - x_s)\Big\}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int \delta\Big(\sum k\Big)\,Л_M(\ldots k \ldots)\,\vartheta_k^r\widetilde{\Phi}(\ldots k \ldots)\,dk_1dk_2\ldots dk_n.$$

Снимая функцию δ и перебрасывая оператор ϑ_k^r на функцию $Л_M$, получаем выражение типа:

$$\int \vartheta_k^r Л_M(\ldots k \ldots)\,\Phi(\ldots k \ldots)\,dk_1dk_2\ldots dk_n,$$

которое, как следует из леммы 2, стремится к пределу при $\varepsilon \to 0$, $M \to \infty$.

Для полного доказательства необходимо еще рассмотреть случай несвязных диаграмм. Этот случай не представляет затруднений, в силу следующей теоремы прямого умножения.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть последовательность функций* $K_M(\ldots x \ldots)$ *сходится слабо к обобщенной функции* $K(\ldots x \ldots)$, *а последовательность* $Q_M(\ldots y \ldots)$ — *к обобщенной функции* $Q(\ldots y \ldots)$, *причем аргументы* x *и* y *независимые.*

Тогда последовательность

$$K_M(\ldots x \ldots)\,Q_M(\ldots y \ldots)$$

сходится слабо к пределу.

Этот предел обозначают через $K(\ldots x \ldots)\,Q(\ldots y \ldots)$ и называют прямым произведением функций $K(\ldots x \ldots)$ и $Q(\ldots y \ldots)$. Мы не при-

водим доказательства этой теоремы, так как, по существу, она следует из теории прямых произведений обобщенных функций, изложенной в книге Шварца ([4]).

В заключение выражаю искреннюю благодарность Н. Н. Боголюбову за ценные указания при выполнении настоящей работы.

Поступило
22.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Парасюк О. С., К теории причинных сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 100, в. 4 (1955), 643—645.

[2] Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., О вычитательном формализме при умножении причинных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 585—610.

[3] Соболев С. Л., Methode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy, Матем. сборн., 1 (43) (1936), 39—72.

[4] Schwartz L., Theorie de distributions, I, II, Paris, 1950—51.

[5] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля. II, Устранение расходимостей из матрицы рассеяния, Успехи физических наук, 57 (1955), 1—92.

[6] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля. I, Матрица рассеяния, Успехи физических наук, 55, в. 2 (1955), 150—214.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 853–864

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМОВ

11—20

Алимов, Н. Г. Об упорядоченных полугруппах, 14 (1950), 569—576.

Альпер, С. Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области, 19 (1955), № 6, 423—444.

Аманов, Т. И. Граничные функции классов $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ и $H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}$, 19 (1955), № 1, 17—32.

Андрунакиевич, В. А. Полурадикальные кольца, 12 (1948), 129—178.

Андрунакиевич, В. А. К определению радикала кольца, 16 (1952), 217—224.

Андрунакиевич, В. А. Радикал в обобщенных Q-кольцах, 18 (1954), 419—426.

Андрунакиевич, В. А. Кольца с аннуляторным условием, 20 (1956), 547—568.

Анфертьева, Е. А. О представлении через определенные интегралы некоторого специального ряда Дирихле, 12 (1948), 79—96.

Апарисио Бернардо Э. О некоторых свойствах многочленов с целыми коэффициентами и о приближении функций в среднем многочленами с целыми коэффициентами, 19 (1955), № 5, 303—318.

Арешкин, Г. Я. Структуры локально бикомпактных T_1- и T_2-пространств, 13 (1949), 213—220.

Ахиезер, Н. И. О целых трансцендентных функциях конечной степени, имеющих майоранту на последовательности вещественных точек, 16 (1952), 353—364.

Ахиезер, Н. И. Об одном семействе целых функций конечной степени и одной чебышевской задаче, 16 (1952), 459—468.

Бабкин, Б. Н. Приближенное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом С. А. Чаплыгина, 18 (1954), 477—484.

Баренблатт, Г. И. и Левитан, Б. М. О некоторых краевых задачах для уравнения турбулентной теплопроводности, 16 (1952), 253—280.

Бари, Н. К. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, 18 (1954), 159—176.

Бари, Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, 19 (1955), № 5, 285—302.

Бачелис, Р. Д. О разностных операторах с постоянными коэффициентами, 19 (1955), № 1, 69—80.

Бернштейн, С. Н. Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени, 12 (1948), 421—444.

Бернштейн, С. Н. Примечание к моей работе «Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени», 12 (1948), 571—573.

Бернштейн, С. Н. Функции конечной степени и σ-функции конечной полустепени, 13 (1949), 111—124.

Бернштейн, С. Н. О некоторых свойствах циклически монотонных функций, 14 (1950), 381—404.

Бернштейн, С. Н. Примечания к теории регулярно монотонных функций, 16 (1952), 3—16.

Бернштейн, С. Н. Об антимайорантах, 16 (1952), 497—502.

Бесов, О. В. О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве, 20 (1956), 469—484.

Битюцков, В. И. Локальная предельная теорема для последовательности событий, образующих сложную цепь второго порядка, 12 (1948), 101—110.

Бицадзе, А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения, 17 (1953), 525—538.

Блох, Э. Л. О наиболее плотном расположении на гиперсфере сферических сегментов, 20 (1956), 707—712.

Боас, Р. П. Полнота некоторых множеств аналитических функций, 13 (1949), 55—60.

Боголюбов, Н. Н. и Парасюк, О. С. О вычитательном формализме при умножении причинных функций, 20 (1956), 585—610.

Болтянский, В. Г. Вторые препятствия для секущих поверхностей, 20 (1956), 99—136.

Боревич, З. И. О группах гомологий, связанных со свободной группой, 16 (1952), 365—384.

Боревич, З. И. Группы гомологий p-расширений регулярного локального поля, 16 (1952), 427—436.

Бюшгенс, С. С. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости, 12 (1948), 481—512.

Векуа Н. П. Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, 16 (1952), 157—180.

Векуа, Н. П. Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций, 20 (1956), 377—384.

Виденский, В. С. Об оценках производных многочлена, 15 (1951), 401—420.

Виленкин, Н. Я. Об одном классе полных ортонормальных систем, 11 (1947), 363—400.

Виленкин, Н. Я. К теории лакунарных ортогональных систем, 13 (1949), 245—252.

Виленкин, Н. Я. Теория характеров топологических абелевых групп с заданной ограниченностью, 15 (1951), 439—462.

Виленкин, Н. Я. Прямые и обратные спектры топологических групп и их теория характеров, 15 (1951), 503—532.

Виноградов, А. И. Об одной «почти бинарной» задаче, 20 (1956), 713—750.

Виноградов, И. М. Об оценке тригонометрических сумм с простыми числами, 12 (1948), 225—248.

Виноградов, И. М. О распределении произведений простых чисел и значений функции Мебиуса, 12 (1948), 341—350.

Виноградов, И. М. Улучшение остаточного члена одной асимптотической формулы, 13 (1949), 97—110.

Виноградов, И. М. Верхняя граница модуля тригонометрической суммы, 14 (1950), 199—214.

Виноградов, И. М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы, 15 (1951), 109—130.

Виноградов, И. М. Арифметический метод в применении к вопросам распределения чисел с заданным свойством индекса, 15 (1951), 297—308.

Виноградов, И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$, 16 (1952), 197—210.

Виноградов, И. М. Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел, 17 (1953), 3—12.

Виноградов, И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$, 17 (1953), 285—290.

Виноградов, И. М. Распределение по простому модулю простых чисел с заданным значением символа Лежандра, 18 (1954), 105—112.

Виноградов, И. М. Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений, 19 (1955), № 1, 3—10.

Виноградов, И. М. Особые случаи оценок тригонометрических сумм, 20 (1956), 289—302.

Волков, Д. М. Билинейные интегралы линейных гиперболических задач, 15 (1951), 75—90.

Волков, Д. М. Интегралы высших порядков типа законов сохранения для линейных гиперболических задач, 15 (1951), 255—278.

Ворович, И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек, 19 (1955), № 4, 173—186.

Ворович, И. И. Об устойчивости движения при случайных возмущениях, 20 (1956), 17—32.

Вулих, Б. З. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, 17 (1953), 365—388.

Гаврилов, Ю. М. О сходимости итерационных процессов и критериях знакоопределенности квадратичных форм, 18 (1954), 87—94.

Гаврин, М. К. О приближении непрерывной функции линейным дифференциальным оператором от многочлена, 12 (1948), 15—30.

Гагуа, М. Е. О некоторых вопросах равномерной аппроксимации решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, 18 (1954), 177—184.

Гамкрелидзе, Р. В. Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий, 20 (1956), 685—706.

Гахов, Ф. Д. Один случай краевой задачи Римана для системы пар функций, 14 (1950), 549—568.

Гахов, Ф. Д. Особые случаи краевой задачи Римана для систем n пар функций, 16 (1952), 147—156.

Гахов, Ф. Д. и Крикунов Ю.М. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, 20 (1956), 207—240.

Гахов, Ф. Д. и Черский, Ю. И. Особые интегральные уравнения типа свертки, 20 (1956), 33—52.

Гельфанд, И. М. и Граев, М. И. Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии), 17 (1953), 189—248.

Гельфанд, И. М. и Левитан, Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, 15 (1951), 309—360.

Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А. Унитарные представления группы Лоренца, 11 (1947), 411—504.

Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А. Нормированные кольца с инволюцией и их представления, 12 (1948), 445—480.

Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А. Связь между унитарными представлениями комплексной унимодулярной группы и ее унитарной подгруппы, 14 (1950), 239—260.

Гельфонд, А. О. Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, 14 (1950), 413—420.

Гельфонд, А. О. О квази-полиномах, наименее отклоняющихся от нуля на отрезке [0,1], 15 (1951), 9—16.

Гельфонд, А. О. О разбиении натурального ряда на классы группой линейных подстановок, 18 (1954), 297—306.

Гельфонд, А. О. Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой Re $s=1$, 20 (1956), 145—166.

Гельфонд, А. О. и Ибрагимов, И. И. О функциях, производные которых равны нулю в двух точках, 11 (1947), 547—560.

Гельфонд, А. О. и Кубенская, И. М. О теореме Перрона в теории разностных уравнений, 17 (1953), 83—86.

Гельфонд, А. О. и Фельдман, Н. И. О мере взаимной трансцендентности некоторых чисел, 14 (1950), 493—500.

Геронимус, Я. Л. Об асимптотических формулах для ортогональных полиномов, 12 (1948), 3—14.

Геронимус, Я. Л. О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций, 12 (1948), 325—336.

Геронимус, Я. Л. Об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на единичном круге, и о некоторых свойствах положительных гармонических функций, 14 (1950), 123—144.

Геронимус, Я. Л. Об ортогональных полиномах В. А. Стеклова, 16 (1952), 469—480.

Геронимус, Я. Л. О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами, 20 (1956), 775—782.

Гинзбург, Г. М. Об условиях единственности предельных распределений, 15 (1951), 563—580.

Глушков, В. М. К теории нильпотентных локально бикомпактных групп, 20 (1956), 513—546.

Гнеденко, Б. В. Об одной теореме С. Н. Бернштейна, 12 (1948), 97—100.

Головина, Л. И. Коммутативные радикальные кольца, 14 (1950), 449—472.

Гордон, И. И. Классификация отображений n-мерного комплекса в n-мерное действительное проективное пространство, 16 (1952), 113—146.

Градштейн, И. С. О поведении решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, вырождающихся в пределе, 13 (1949), 253—280.

Граев, М. И. Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах, 11 (1947), 33—46.

Граев, М. И. Свободные топологические группы, 12 (1948), 279—324.

Граев, М. И. О свободных произведениях топологических групп, 14 (1950), 343—354.

Граев, М. И. и Гельфанд, И. М. Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии), 17 (1953), 189—248.

Гуревич, А. А. и Рохлин, В. А. Аппроксимационные теоремы для измеримых потоков, 14 (1950), 537—548.

Гуревич, Г. Б. Некоторые арифметические инварианты матричных алгебр Ли и критерий их полной приводимости, 13 (1949), 403—416.

Гусейнов, А. И. Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, 12 (1948), 193—212.

Даревский, В. М. О методах Toeplitz'a, 11 (1947), 3—32.

Даревский, В. М. Условия совместности методов Toeplitz'a, 12 (1948), 379—396.

Делоне, Б. Н. Алгорифм разделенных параллелограммов, 11 (1947), 505—538.

Делоне, Б. Н. К шестидесятилетию Ивана Матвеевича Виноградова, 15 (1951), 385—394.

Демьянов, В. Б. Пары квадратичных форм над полным дискретно-нормированным полем классов вычетов, 20 (1956), 307—324.

Джрбашян, М. М. Об одной экстремальной задаче из теории взвешенных ортогональных полиномов, 12 (1948), 555—568.

Джрбашян, М. М. Теоремы единственности и представимости для аналитических функций, 16 (1952), 225—252.

Джрбашян, М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), 18 (1954), 427—448.

Джрбашян, М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, 19 (1955), № 2, 133—190.

Джрбашян, М. М. и Тамадян, А. П. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, 20 (1956), 485—512.

Дзядык, В. К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$, 17 (1953), 135—162.

Дзядык, В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси, 20 (1956), 623—642.

Дикий, Л. А. Дзета-функция дифференциального уравнения на конечном отрезке, 19 (1955), № 4, 187—200.

Добрушин, Р. Л. Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний, 17 (1953), 291—330.

Дубровский, В. М. Замечания к моей работе «О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и о предельном переходе под знаком интеграла», 11 (1947), 101—104.

Дубровский, В. М. О некоторых условиях компактности, 12 (1948), 397—410.

Дубровский, В. М. О равностепенно суммируемых функциях и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества, 13 (1949), 341—356.

Дынкин, Е. Б. Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, 16 (1952), 563—572.

Дынкин, Е. Б. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, 19 (1955), № 4, 247—266.

Дюбюк, П. Е. О числе подгрупп абелевой p-группы, 12 (1948), 351—378.
Евграфов, М. А. Поведение степенного ряда для функций класса H_δ на границе круга сходимости, 16 (1952), 481—492.
Евграфов, М. А. Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски, 16 (1952), 521—524.
Евграфов, М. А. Новое доказательство теоремы Перрона, 17 (1953), 77—82.
Евграфов, М. А. О полноте систем аналитических функций, близких к $\{z^nP(z)\}$, $\{[\varphi(z)]^n\}$ и о некоторых интерполяционных задачах, 17 (1953), 421—460.
Евграфов, М. А. О построении и единственности целой функции $F(z)$ по данным значениям $F^{(n)}(n^2)$, 18 (1954), 201—206.
Евграфов, М. А. Об одном рекуррентном соотношении, связанном с интерполяционной задачей Абеля — Гончарова, 18 (1954), 449—460.
Залгаллер, В. А. Вариации кривых вдоль фиксированных направлений, 15 (1951), 463—476.
Зыков, А. А. Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов, 17 (1953), 63—76.
Ибрагимов, И. И. О полноте системы аналитических функций, 11 (1947), 75—100.
Ибрагимов, И. И. О полноте системы аналитических функций $\{F(\alpha_k z)\}$, 13 (1949), 45—54.
Ибрагимов, И. И. Об интерполяции целой периодической функции, 13 (1949), 231—244.
Ибрагимов, И. И. О наилучшем приближении многочленами функций $[ax+b|x|]|x^s$ на отрезке $[-1, +1]$, 14 (1950), 405—412.
Ибрагимов, И. И. и Гельфонд, А. О. О функциях, производные которых равны нулю в двух точках, 11 (1947), 547—560.
Иванов, В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному, 20 (1956), 793—818.
Ивашев-Мусатов, О. С. О коэффициентах Фурье — Стильтьеса сингулярных функций, 20 (1956), 179—196.
Каландия, А. И. Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей, 15 (1951), 185—198.
Каменомостская, С. Л. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа с малым параметром при старших производных, 19 (1955), № 5, 345—360.
Камынин, Л. И. О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. I, 17 (1953), 163—180.
Камынин, Л. И. О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. II, 17 (1953), 249—268.
Карпелевич, Ф. И. О характеристических корнях матриц с неотрицательными элементами, 15 (1951), 361—383.
Келдыш, М. В. К пятидесятилетию М. А. Лаврентьева, 15 (1951), 3—8.
Козлова, З. И. О накрытиях некоторых A-множеств, 14 (1950), 421—442.
Козлова, З. И. Расщепление некоторых B-множеств, 15 (1951), 279—296.
Козлова, З. И. Взаимоотношения между теоремами кратной отделимости, 16 (1952), 389—404.
Козлова, З. И. О накрытии множеств, 19 (1955), № 2, 125—132.
Колесова, Е. В. К теории неявных функций, 18 (1954), 461—476.
Колмогоров, А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, 13 (1949), 281—300.
Колмогоров, А. Н. Несмещенные оценки, 14 (1950), 303—326.
Колмогоров, А. Н., Петров, А. А., Смирнов, Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, 11 (1947), 561—566.
Коробов, Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения, 14 (1950), 215—238.
Коробов, Н. М. Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей, 15 (1951), 17—46.
Коробов, Н. М. О нормальных периодических системах, 16 (1952), 211—216.
Коробов, Н. М. Многомерные задачи распределения дробных долей, 17 (1953), 389—400.

Коробов, Н. М. Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений, 19 (1955), № 5, 361—380.

Коробов, Н. М. О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах, 20 (1956), 649—660.

Королюк, В. С. О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок, 19 (1955), № 1, 81—96.

Королюк, В. С. Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, 19 (1955), № 2, 103—124.

Кострикин, А. И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5, 19 (1955), № 3, 233—244.

Котелянский, Д. М. Оценки для определителей матриц с преобладающей главной диагональю, 20 (1956), 137—144.

Кошляков, Н. С. Исследование одного класса дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами, 16 (1952), 537—562.

Кошляков, Н. С. Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. I, 18 (1954), 113—144.

Кошляков, Н. С. Исследование некоторых вопросов аналитический теории рационального и квадратичного поля. II, 18 (1954), 213—260.

Кошляков, Н. С. Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. III, 18 (1954), 307—326.

Кошляков, Н. С. Письмо в редакцию, 19 (1955), № 3, 271.

Красносельский, М. А. Об одной краевой задаче, 20 (1956), 241—252.

Красносельский, М. А. и Соболев, В. И. Условия сепарабельности пространств Орлича, 19 (1955), № 1, 59—68.

Крейн, М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа, 11 (1947), 309—326.

Крейн, М. Г. О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале $(0, \infty)$, 16 (1952), 293—324.

Крикунов, Ю. М. и Гахов, Ф. Д. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, 20 (1956), 207—240.

Кубенская, И. М. и Гельфонд, А. О. О теореме Перрона в теории разностных уравнений, 17 (1953), 83—86.

Кузнецов, П. И. и Стратонович, Р. Л. К математической теории коррелированных случайных точек, 20 (1956), 167—178.

Курепа, Г. Множества счетных последовательностей из целых чисел (к проблеме Суслина), 11 (1947), 59—74.

Лаврентьев, М. А. Пути развития советской математики, 12 (1948), 411—416.

Лаврентьев, М. А. Основная теорема теории квази-конформных отображений плоских областей, 12 (1948), 513—554.

Лаврентьев, М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа, 20 (1956), 819—842.

Ладыженская, О. А. О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений, 15 (1951), 545—562.

Ландкоф, Н. С. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле, 11 (1947), 181—196.

Лапин, А. И. Теория символа Шафаревича, 17 (1953), 31—50.

Лапин, А. И. К теории символа Шафаревича, 18 (1954), 145—158.

Лапин, А. И. Общий закон взаимности и новое обоснование теории полей классов, 18 (1954), 335—378.

Лапин, А. И. О модулярных функциях степени два, 20 (1956), 325—336.

Лапин, А. И. Письмо в редакцию, 20 (1956), 583—584.

Латышева, К. Я. По поводу одного результата Н. С. Кошлякова, 18 (1954), 207—212.

Левин, Б. Я. Об одном специальном классе целых функций и о связанных с ним экстремальных свойствах целых функций конечной степени, 14 (1950), 45—84.

Левитан, Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, 16 (1952), 325—352.

Левитан, Б. М. Об одной специальной тауберовой теореме, 17 (1953), 269—284.

Левитан, Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряжен-

ного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям, 17 (1953), 331—364.

Левитан, Б. М. О спектральной функции уравнения $y'' + \{\lambda - q(x)\} = 0$, 17 (1953), 473—484.

Левитан, Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. II, 19 (1955), № 1, 33—58.

Левитан, Б. М. О решении задачи Коши для уравнения $\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u = \frac{d^2u}{dt^2}$, 20 (1956), 337—376.

Левитан, Б. М. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\, u = 0$, 20 (1956), 437—468.

Левитан, Б. М. и Баренблатт, Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения турбулентной теплопроводности, 16 (1952), 253—280.

Левитан, Б. М. и Гельфанд, И. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, 15 (1951), 309—360.

Леонтьев, А. Ф. О целых функциях экспоненциального типа, принимающих в заданных точках заданные значения, 13 (1949), 33—44.

Леонтьев, А. Ф. О функциях, определенных рядами полиномов Дирихле, 13 (1949), 221—230.

Линник, Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин, 11 (1947), 111—138.

Линник, Ю. В. К теории неоднородных цепей Маркова, 13 (1949), 65—94.

Линник, Ю. В. Элементарное доказательство теоремы Зигеля на основе способа И. М. Виноградова, 14 (1950), 327—342.

Линник, Ю. В. Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений, 14 (1950), 501—522.

Линник, Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха, 16 (1952), 503—520.

Линник, Ю. В. и Реньи, А. А. О некоторых гипотезах теории характеров Дирихле, 11 (1947), 539—546.

Линник, Ю. В. и Сапогов, Н. А. Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова, 13 (1949), 533—566.

Лузин, Н. Н. О частях натурального ряда, 11 (1947), 403—410.

Лунц, А. Г. Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем, 16 (1952), 405—426.

Люкшин, В. С. Погружение риманова двумерного многообразия в трехмерное эвклидово пространство, 13 (1949), 363—384.

Ляпин, Е. С. Нормальные комплексы ассоциативных систем, 14 (1950), 179—192.

Ляпин, Е. С. Простые коммутативные ассоциативные системы, 14 (1950), 275—282.

Ляпин, Е. С. Полупростые коммутативные ассоциативные системы, 14 (1950), 367—380.

Ляпунов, А. А. О непрерывных отображениях A-множеств, 13 (1949), 61—64.

Ляпунов, А. А. Об эффективной измеримости, 13 (1949), 357—362.

Ляпунов, А. А. О признаках вырождения для B-множеств, 17 (1953), 563—578.

Мальцев, А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов», 11 (1947), 567—568.

Мальцев, А. И. Об одном классе однородных пространств, 13 (1949), 9—32.

Мальцев, А. И. Нильпотентные группы без кручения, 13 (1949), 201—212.

Мальцев, А. И. Об упорядоченных группах, 13 (1949), 473—482.

Манин, Ю. И. О сравнениях третьей степени по простому модулю, 20 (1956), 673—678.

Марков, А. А. О зависимости аксиомы B6 от других аксиом системы Bernays'a—Gödel'я, 12 (1948), 569—570.

Марков, А. А. О представлении рекурсивных функций, 13 (1949), 417—424.

Марченко, В. А. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, 19 (1955), № 6, 381—422.

Мацкина, Р. Ю. О непрерывных образах гильбертова пространства, 15 (1951), 95—103.

Мацкина, Р. Ю. Универсальное непрерывное отображение гильбертова пространства, 15 (1951), 533—544.

Мацкина, Р. Ю. О взаимно однозначных непрерывных образах гильбертова пространства, 19 (1955), № 4, 267—272.

Меньшов, Д. Е. О некоторых свойствах рядов Фурье, 18 (1954), 379—388.

Мергелян, С. Н. Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями, 15 (1951), 395—400.

Миронов, В. Т. К вопросу о нулях дзета-функции Римана, 15 (1951), 91—94.

Морозов, М. И. О некоторых вопросах равномерного приближения непрерывных функций посредством функций интерполяционных классов, 16 (1952), 75—100.

Мышкис, А. Д. Об одном экстремальном свойстве решения первой краевой задачи в теории потенциала, 17 (1953), 13—30.

Мягкова, Н. Н. О группах конечного ранга, 13 (1949), 495—512.

Наймарк, М. А. Экстремальные спектральные функции симметрического оператора, 11 (1947), 327—344.

Наймарк, М. А. Континуальный аналог леммы Шура и его применение к формуле Планшереля для комплексных классических групп, 20 (1956), 3—16.

Наймарк, М. А. и Гельфанд, И. М. Унитарные представления группы Лоренца, 11 (1947), 411—504.

Наймарк, М. А. и Гельфанд, И. М. Нормализованные кольца с инволюцией и их представления, 12 (1948), 445—480.

Наймарк, М. А. и Гельфанд, И. М. Связь между унитарными представлениями комплексной унимодулярной группы и ее унитарной подгруппы, 14 (1950), 239—260.

Нечаев, В. И. О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}$, 17 (1953), 485—498.

Никольский, С. М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $(a-x)^s$, 11 (1947), 139—180.

Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье, 12 (1948), 259—278.

Никольский, С. М. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации, 13 (1949), 513—532.

Никольский, С. М. Квадратурные формулы, 16 (1952), 181—196.

Никольский, С. М. Компактность классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций многих переменных, 20 (1956), 611—622.

Новиков, П. С. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп, 18 (1954), 485—524.

Норден, А. П. О нормализованных поверхностях конформного пространства, 14 (1950), 105—122.

Олейник, О. А. и Петровский, И. Г. О топологии действительных алгебраических поверхностей, 13 (1949), 389—402.

Павлов, П. П. Силовские p-подгруппы полной линейной группы над простым полем характеристики p, 16 (1952), 437—458.

Парасюк, О. С. Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах, 20 (1956), 843—852.

Парасюк, О. С. и Боголюбов, Н. Н. О вычитательном формализме при умножении причинных функций, 20 (1956), 585—610.

Петров, А. А., Колмогоров, А. Н., Смирнов, Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, 11 (1947), 561—566.

Петровский, И. Г. и Олейник, О. А. О топологии действительных алгебраических поверхностей, 13 (1949), 389—402.

Пинскер, М. С. Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями, 19 (1955), № 5, 319—344.

Положий, Г. Н. Вариационно-топологические теоремы краевых задач теории кручения валов переменного сечения. Метод сохранения области и мажорантных областей, 19 (1955), № 3, 245—270.

Понтрягин, Л. С. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий, 13 (1949), 125—162.

Понтрягин, Л. С. Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, 13 (1949), 193—200.

Понтрягин, Л. С. Классификация отображений $(n+1)$-мерной сферы в полиэдр K_n, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей 2,..., n—1 тривиальны, 14 (1950), 7—44.

Постников, А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа, 19 (1955), № 1, 11—16.

Постников, А. Г. Оценка показательной тригонометрической суммы, 20 (1956), 661—666.

Постников, А. Г. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, 20 (1956), 751—764.

Прохоров, Ю. В. Об усиленном законе больших чисел, 14 (1950), 523—536.

Прохоров, Ю. В. Некоторые уточнения теоремы Ляпунова, 16 (1952), 281—292.

Пугачев, В. С. Общая теория корреляции случайных функций, 17 (1953), 401—420.

Пятецкий-Шапиро, И. И. Сингулярные модулярные функции, 20 (1956), 53—98.

Реньи, А. О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, 12 (1948), 57—78.

Реньи, А. А. и Линник, Ю. В. О некоторых гипотезах теории характеров Дирихле, 11 (1947), 539—546.

Родосский, К. А. О комплексных нулях L-функций Дирихле, 12 (1948), 47—56.

Родосский, К. А. О распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях, 12 (1948), 123—128.

Родосский, К. А. О нулях L-функций Дирихле, 13 (1949), 315—328.

Родосский, К. А. О распределении малых значений модуля ζ-функции, 19 (1955), № 2, 97—102.

Родосский, К. А. О степенных невычетах и нулях L-функций, 20 (1956), 303—306.

Родосский, К. А. Об исключительном нуле, 20 (1956), 667—672.

Розенкноп, И. З. О некоторых свойствах совокупности замкнутых путей в системе из n состояний с заданными переходами между ними, 14 (1950), 95—100.

Розенфельд, Б. А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей 11 (1947), 283—308.

Романов, Н. П. Пространство Гильберта и теория чисел, 15 (1951), 131—152.

Рохлин, В. А. Об эндоморфизмах бикомпактных коммутативных групп, 13 (1949), 329—340.

Рохлин, В. А. и Гуревич, А. А. Аппроксимационные теоремы для измеримых потоков, 14 (1950), 537—548.

Салехов, Г. С. О задаче Коши — Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций, 14 (1950), 355—366.

Санов, И. Н. О некоторой системе соотношений в периодических группах с периодом степенью простого числа, 15 (1951), 477—502.

Санов, И. Н. Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли, 16 (1952), 23—58.

Санов, И. Н. Новое доказательство теоремы Минковского, 16 (1952), 101—112.

Сапогов, Н. А. Двумерная предельная теорема для двумерной цепи, 13 (1939), 301—314.

Сапогов, Н. А. О законе больших чисел для зависимых случайных величин, 14 (1950), 145—154.

Сапогов, Н. А. Проблема устойчивости для теоремы Крамера, 15 (1951), 205—218.

Сапогов, Н. А. и Линник, Ю. В. Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова, 13 (1949), 533—566.

Сарманов, О. В. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на сумму почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга, 11 (1947), 569—575.

Сегал, Б. И. Пространственные задачи теории потенциала для цилиндрических областей, 16 (1952), 59—74.

Скитович, В. П. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения, 18 (1954), 185—200.

Скопин, А. И. p-расширения локального поля, содержащего корни степени p^M из единицы, 19 (1955), № 6, 445—470.

Скорняков, Л. А. Натуральные тела веблен-веддербарновой проективной плоскости, 13 (1949), 447—472.

Скорняков, Л. А. Право-альтернативные тела, 15 (1951), 177—184.

Скорняков, Л. А. Метризация проективной плоскости в связи с данной системой кривых, 19 (1955), № 6, 471—482.

Сливняк, И. М. О теореме единственности в теории потенциала, 14 (1950), 473—492.

Смирнов, Ю. М. О топологических пространствах, компактных в данном отрезке мощностей, 14 (1950), 155—178.

Смирнов, Ю. М. О сильно-паракомпактных пространствах, 20 (1956), 253—274.

Смирнов, Ю. М. О метрической размерности в смысле П. С. Александрова, 20 (1956), 679—684.

Смирнов, Ю. М., Колмогоров, А. Н., Петров, А. А. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, 11 (1947), 561—566.

Соболев, В. И. и Красносельский, М. А. Условия сепарабельности пространств Орлича, 19 (1955), № 1, 59—68.

Соболев, С. Л. К пятидесятилетию Ивана Георгиевича Петровского, 15 (1951), 201—204.

Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики, 18 (1954), 3—50.

Соболев, С. Л. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений, 20 (1956), 413—436.

Соколов, Н. П. О пучках вещественных кубических тройничных форм, 19 (1955), № 3, 201—232.

Стечкин, С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций, 15 (1951), 219—242.

Стечкин, С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье, 17 (1953), 87—98.

Стечкин, С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций, 17 (1953), 461—472.

Стечкин, С. Б. О теореме Колмогорова — Селиверстова, 17 (1953), 499—512.

Стечкин, С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), 19 (1955), № 4, 221—246.

Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами, 20 (1956), 197—206.

Стечкин, С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение), 20 (1956), 385—412.

Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, 20 (1956), 643—648.

Стечкин, С. Б. Одна экстремальная задача для многочленов, 20 (1956), 765—774.

Стратонович, Р. Л. и Кузнецов, П. И. К математической теории коррелированных случайных точек, 20 (1956), 167—178.

Супруненко, Д. А. Об одном свойстве нильпотентных матричных групп, 19 (1955), № 4, 273—274.

Тайманов, А. Д. О жестких базах δs-операции, 14 (1950), 443—448.

Тайманов, А. Д. О кратной отделимости замкнутых множеств, 17 (1953), 51—62.

Тамадян, А. П. и Джрбашян, М. М. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, 20 (1956), 485—512.

Тартаковский, В. А. Решение проблемы тождества для групп с k-сократимым базисом при $k>6$, 13 (1949), 483—494.

Темляков, А. А. Аналитическое продолжение функций двух переменных, 16 (1952), 525—536.

Тиман, А. Ф. Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами, 11 (1947), 263—282.

Тиман, А. Ф. О некоторых методах суммирования рядов Фурье, 14 (1950), 85—94.

Тиман, А. Ф. О квази-гладких функциях, 15 (1951), 243—254.

Тиман, А. Ф. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, 17 (1953), 99—134.

Тихомиров, А. И. Обобщение теоремы Мальцева о расщепляемых алгебрах, 11 (1947), 47—58.

Толстов, Г. П. О частных производных, 13 (1949), 425—446.

Трахтенброт, Б. А. Определение конечного множества и дедуктивная неполнота теории множеств, 20 (1956), 569—582.

Туран, П. О гипотезе Римана, 11 (1947), 197—262.

Ульянов, П. Л. Обобщение теоремы Марцинкевича, 17 (1953), 513—524.

Фаддеев, Д. К. К теории гомологий в группах, 16 (1952), 17—22.

Фаддеев, Д. К. К теории гомологий для конечных групп операторов, 19 (1955), № 3, 193—200.

Фельдман, Н. И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I, 15 (1951), 53—74.

Фельдман, Н. И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. II, 15 (1951), 153—176.

Фельдман, Н. И. и Гельфонд, А. О. О мере взаимной трансцендентности некоторых чисел, 14 (1950), 493—500.

Фомин, С. В. О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований, 14 (1950), 261—274.

Фрейман, Г. А. О густоте последовательностей, 16 (1952), 385—388.

Фрейман, Г. А. Обратные задачи аддитивной теории чисел, 19 (1955), № 4, 275—284.

Халилов, З. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, 11 (1947), 345—362.

Халилов, З. И. Линейные сингулярные уравнения в нормированном кольце, 13 (1949), 163—176.

Хинчин, А. Я. Две теоремы, связанные с задачей Чебышева, 11 (1947), 105—110.

Хинчин, А. Я. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера, 12 (1948), 113—122.

Хинчин, А. Я. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева, 12 (1948), 249—258.

Хинчин, А. Я. О дробных частях линейной формы, 13 (1949), 3—8.

Хургин, Я. И. О единственности решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных, 12 (1948), 213—223.

Хухунайшвили, Г. Е. Непрерывные образы гильбертова пространства, 20 (1956), 275—288.

Чакалов, Л. Н. О сходимости одной формулы тригонометрической интерполяции, 13 (1949), 177—191.

Черский, Ю. И. и Гахов, Ф. Д. Особые интегральные уравнения типа свертки, 20 (1956), 33—52.

Чогошвили, Г. С. Об эквивалентности функциональной и спектральной теорий гомологии, 15 (1951), 421—438.

Чудаков, Н. Г. О конечной разности для функции $\psi(x, k, l)$, 12 (1948), 31—46.

Шапиро, З. Я. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа, 17 (1953) 539—562.

Шапиро-Пятецкий, И. И. О законах распределения дробных долей показательной функции, 15 (1951), 47—52.

Шафаревич, И. Р. О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^x, 18 (1954) 261—296.

Шафаревич, И. Р. Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел, 18 (1954), 327—334.

Шафаревич, И. Р. О задаче погружения полей, 18 (1954), 389—418.

Шафаревич, И. Р. Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа, 18 (1954), 525—578.

Широкорад, Б. В. К вопросу о применимости центральной предельной теоремы к цепям Маркова, 18 (1954), 95—104.

Шнейдер, А. А. О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами, 12 (1948), 179—192.

Штраус, А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов, 18 (1954), 51—86.
Штраус, А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов, 19 (1955), № 4, 201—220.
Штраус, А. В. О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси, 20 (1956), 783—792.
Яковкин, М. В. О некоторых критериях неприводимости полиномов, 14 (1950), 283—295.
Замечание Ю. Л. Шмульяна по поводу статьи Ю. М. Гаврилова «О сходимости итерационных процессов», 19 (1955), № 2, 191.
От редакции, 11 (1947), 401—402.
За передовую советскую науку, 16 (1952), 493—495.
К семидесятилетию С. Н. Бернштейна, 14 (1950), 193—198.
К шестидесятилетию Б. Н. Делоне, 14 (1950), 297—302.
К пятидесятилетию Андрея Николаевича Колмогорова, 17 (1953), 181—188.
К семидесятилетию со дня рождения Иосифа Виссарионовича Сталина, 14 (1950), 3—6.
Памяти великого труженика и организатора науки Сергея Ивановича Вавилова, 15 (1951), 105—108.
Родион Осиевич Кузьмин (некролог), 13 (1949), 385—388.
Евгений Евгеньевич Слуцкий (некролог), 12 (1948), 417—420.
Николай Григорьевич Чеботарев (некролог), 12 (1948), 337—340.
От Центрального Комитета Коммунистической партии Советского Союза ССР и Президиума Верховного Совета СССР, 17 (1953).
Положение о премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики, 12 (1948), 111—112.
О конкурсах на соискание премий Академии наук СССР в 1949 году, 13 (1949), 95.
Присуждение премии имени П. Л. Чебышева 1948 года, 14 (1950), 101—104.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

20 (1956), 865—866

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 20

Андрунакиевич В. А. Кольца с аннуляторным условием . . . . . 547—568

Бесов О. В. О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве . . . . . 469—484

Блох Э. Л. О наиболее плотном расположении на гиперсфере сферических сегментов . . . . . 707—712

Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С. О вычитательном формализме при умножении причинных функций . . . . . 585—610

Болтянский В. Г. Вторые препятствия для секущих поверхностей . . . 99—136

Векуа Н. П. Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций. . . . . 377—384

Виноградов А. И. Об одной «почти бинарной» задаче . . . . . 713—750

Виноградов И. М. Особые случаи оценок тригонометрических сумм . . . 289—302

Ворович И. И. Об устойчивости движения при случайных возмущениях 17—32

Гамкрелидзе Р. В. Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий . . . . . 685—706

Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам . . . . . 207—240

Гахов Ф. Д. и Черский Ю. И. Особые интегральные уравнения типа свертки . . . . . 33—52

Гельфонд А. О. Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\mathrm{Re}\ s=1$ . . . . . 145—166

Геронимус Я. Л. О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами . . . . . 775—782

Глушков В. М. К теории нильпотентных локально бикомпактных групп 513—546

Демьянов В. Б. Пары квадратичных форм над полным дискретно-нормированным полем классов вычетов . . . . . 307—324

Джрбашян М. М. и Тамадян А. П. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области . . . . . 485—512

Дзядык В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ на конечном отрезке вещественной оси . . . . . 623—642

Иванов В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному 793—818

Ивашев-Мусатов О. С. О коэффициентах Фурье — Стильтьеса сингулярных функций . . . . . 179—196

Коробов Н. М. О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах . . . . . 649—660

Котелянский Д. М. Оценки для определителей матриц с преобладающей главной диагональю . . . . . 137—144

Красносельский М. А. Об одной краевой задаче . . . . . 241—252

Кузнецов П. И. и Стратонович Р. Л. К математической теории коррелированных случайных точек . . . . . 167—178

Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа . . . . . 819—842

Лапин А. И. О модулярных функциях степени два . . . . . 325—336

Лапин А. И. Письмо в редакцию . . . . . 583—584

Левитан Б. М. О решении задачи Коши для уравнения

$$\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u = \frac{d^2u}{dt^2}$$ . . . . . 337—376

Левитан Б. М. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}u = 0$ . . . . . 437—468
Манин Ю. И. О сравнениях третьей степени по простому модулю . . . . 673—678
Наймарк М. А. Континуальный аналог леммы Шура и его применение к формуле Планшереля для комплексных классических групп . . . 3—16
Никольский С. М. Компактность классов $H^{(r_1, \ldots, r_n)}$ функций многих переменных . . . . . 611—622
Парасюк О. С. Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах . . . . . 843—852
Постников А. Г. Оценка показательной тригонометрической суммы . . . 661—666
Постников А. Г. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых . . . 751—764
Пятецкий-Шапиро И. И. Сингулярные модулярные функции . . . . . 53—98
Родосский К. А. О степенных невычетах и нулях L-функций . . . . . 303—306
Родосский К. А. Об исключительном нуле . . . . . 667—672
Смирнов Ю. М. О сильно-паракомпактных пространствах . . . . . 253—274
Смирнов Ю. М. О метрической размерности в смысле П. С. Александрова 679—684
Соболев С. Л. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений . . . . . 413—436
Стечкин С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами . . . . . 197—206
Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение) 385—412
Стечкин С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами . . . . . 643—648
Стечкин С. Б. Одна экстремальная задача для многочленов . . . . . 765—774
Трахтенброт Б. А. Определение конечного множества и дедуктивная неполнота теории множеств . . . . . 569—582
Хухунайшвили Г. Е. Непрерывные образы гильбертова пространства 275—288
Штраус А. В. О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси . . . . . 783—792
Алфавитный указатель томов 11—20 . . . . . 853—864

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Отделение физико-математических наук

КОНКУРСЫ НА СОИСКАНИЕ ИМЕННЫХ ПРЕМИЙ АКАДЕМИИ НАУК СССР В 1957 ГОДУ

Отделение физико-математических наук Академии наук СССР сообщает, что в 1957 году будут проведены следующие конкурсы на соискание премий:

1. Имени М. В. Ломоносова в размере 20 000 рублей за особо выдающиеся научные исследования и открытия в области физики.

2. Имени П. Л. Чебышева в размере 20 000 рублей за лучшие работы в области математики.

Премии присуждаются Президиумом Академии наук СССР по конкурсу советским гражданам, их авторским коллективам и советским научным учреждениям.

Работы на соискание именных премий могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими учреждениями, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными гражданами.

На конкурс представляются только работы, опубликованные в печати.

Работы на премию им. М. В. Ломоносова представляются в Отделение физико-математических наук Академии наук СССР (Москва, В-71, Б. Калужская, 14) на русском языке в двух экземплярах с надписью «На соискание премии имени М. В. Ломоносова».

Работы на премию им. П. Л. Чебышева представляются в Математический институт им. В. А. Стеклова (Москва, В-134, 1-й Академический пр., д. 8) на русском языке в двух экземплярах с надписью «На соискание премии имени П. Л. Чебышева.

При работах должны быть приложены: автореферат на каждую работу (не более 0,25 авт. листа), краткие биографические сведения об авторах и перечень их научных работ и изобретений.

Срок представления работ на соискание именных премий до 1 сентября 1957 года.

Отделение физико-математических наук Академии наук СССР

Зам. главного редактора доктор физ.-мат. наук И. Р. Шафаревич

Т-11711 Подписано к печати 28/XI 1956 г. Формат бум. $70\times108^{1}/_{16}$. Зак. 931
Уч.-изд. л. 11,9 Бум. л. $4^{7}/_{8}$ Печ. л. 13,36 Тираж 2650 экз.

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10